مدينة الملك عبدالعزيز
للعلوم والتقنية KACST

مركز دراسات الوحدة العربية

سلسلة تاريخ العلوم عند العرب (٣ / ج٣)

الرياضيات التحليلية
بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة

الجزء الثالث

الحسن بن الهيثم

نظرية المخروطات، الأعمال الهندسية والهندسة العملية

الدكتور رشدي راشد

ترجمة: د. بدوي المبسوط

كتب أعلام وقادة الفكر العربي والعالمي
لمتابعة الكتب التي نصورها ونرفعها لأول مرة
على الروابط التالية

اضغط هنا منتدى مكتبة الاسكندرية

صفحتي الشخصية على الفيسبوك

جديد الكتب على زاد المعرفة 1

صفحة زاد المعرفة 2

زاد المعرفة 3

زاد المعرفة 4

زاد المعرفة 5

scribd مكتبتي على

مكتبتي على مركز الخليج

أضغط هنا مكتبتي على تويتر

ومن هنا عشرات آلاف الكتب زاد المعرفة جوجل

الرياضيات التحليلية

بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة

الجزء الثالث

الحسن بن الهيثم

نظرية المخروطات، الأعمال الهندسية والهندسة العملية

تُرْجِمَتْ هـذِهِ الأعمـالُ ونُشِـرَتْ
بِدَعْمٍ ماليٍّ مِنْ مدينةِ الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية،
ضِمْنَ مبادرةِ الملك عبد الله لِلْمحتوى العَرَبِيّ

مدينة الملك عبدالعزيز
للعلوم والتقنية KACST

مركز دراسات الوحدة العربية

سلسلة تاريخ العلوم عند العرب (٣ / ج٣)

الرياضيات التحليلية

بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة

الجزء الثالث

الحسن بن الهيثم

نظرية المخروطات، الأعمال الهندسية والهندسة العملية

الدكتور رشدي راشد

ترجمة: د. بدوي المبسوط

الفهرسة أثناء النشر ـ إعداد مركز دراسات الوحدة العربية

راشد، رشدي

الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة / رشدي راشد؛ ترجمة بدوي المبسوط

٥ ج (ج ٣، ٨٣٠ ص). ـ (سلسلة تاريخ العلوم عند العرب؛ ١٣/ج٣)
محتويات: ج ٣. الحسن بن الهيثم: نظرية المخروطات، الأعمال الهندسية والهندسة العملية.
ببليوغرافية: ص ٨١١ ـ ٨١٨.
يشتمل على فهرس الأسماء والمصطلحات.
ISBN 978-9953-82-375-1 (vol. 3)
ISBN 978-9953-82-372-0 (set)
١. الرياضيات عند العرب ـ تاريخ. ٢. ابن الهيثم، أبو علي محمد بن الحسن البصري. أ. المبسوط، بدوي (مترجم). ب. العنوان. ج. السلسلة.

510.1

العنوان الأصلي بالفرنسية

Les Mathématiques infinitésimales
du IXème au XIème siècle
vol. 3: Ibn Al-Haytham:
Théorie de coniques, constructions géométriques, et géométrie pratique
par Roshdi Rashed
(London: Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, 2000)

مركز دراسات الوحدة العربية

بناية «بيت النهضة»، شارع البصرة، ص. ب: ٦٠٠١ ـ ١١٣
الحمراء ـ بيروت ٢٠٣٤ ٢٤٠٧ ـ لبنان
تلفون: ٧٥٠٠٨٤ ـ ٧٥٠٠٨٥ ـ ٧٥٠٠٨٦ ـ ٧٥٠٠٨٧ (٩٦١١+)
برقياً: «مرعربي» ـ بيروت، فاكس: ٧٥٠٠٨٨ (٩٦١١+)
e-mail: info@caus.org.lb Web Site: http://www.caus.org.lb

الطبعة الأولى
بيروت، ٢٠١١

المحتويـات

ـ تقديم : *الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة في سلسلة تاريخ العلوم عند العرب ضمن مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي* .... د. محمد بن إبراهيم السويل ١١

حول الترجمة العربية لهذا الكتاب ١٣

فاتحة ١٥

تمهيد ١٩

تنبيه ٢٣

مقدّمة : القطوع المخروطية والأعمال الهندسية ٢٥

الفصل الأوَّل
نظرية القطوع المخروطية والأبنية الهندسية
«في تمام كتاب المخروطات»
مقدّمة

١ ـ ابن الهيثم وكتاب «المخروطات» لأبلونيوس ٣٥

٢ ـ المقالة الثامنة من كتاب «المخروطات» ٣٦

٣ ـ «في تمام كتاب المخروطات» : هدف المشروع ٥٥

٤ ـ تاريخ النصّ ٦٠

الشرح الرياضي ٧١

نصّ «في تمام كتاب المخروطات» ١٩٩

الفصل الثاني
تصويب شكل بني موسى في مخروطات أبلونيوس

١ ـ مقدّمة ٢٦٥
١ ـ ١ الشرح الرياضي ٢٦٧
١ ـ ٢ تاريخ النص ٢٨٧
١ ـ ٣ نصّ مخطوطة «في شكل بني موسى» ٢٩١

الفصل الثالث
«مسائل الأعمال الهندسية»

١ ـ المسبّع المتساوي الأضلاع ٣٠٩
مقدّمة ٣٠٩
١ ـ ١ آثار مؤلّف لأرشميدس حول المسبّع المتساوي الأضلاع ٣١٢
١ ـ ٢ جدل حول الأولويّة: السجزي ضدّ أبي الجود ٣٢١
١ ـ ٣ مقدّمات عمل المسبّع: قسمة قطعة من خطّ مستقيم ٣٣٧
١ ـ ٣ ـ ١ قسمة أرشميدس (D_1) ٣٣٨
١ ـ ٣ ـ ١ ـ ١ الفترة الأولى: القسمة في النص المنسوب إلى أرشميدس ٣٤٠
١ ـ ٣ ـ ١ ـ ٢ الفترة الثانية: ابن سهل ٣٤٢
١ ـ ٣ ـ ١ ـ ٣ الفترة الثالثة: القوهي والصاغاني ٣٤٦
١ ـ ٣ ـ ١ ـ ٣ ـ ١ القوهي: المؤلّف الأوّل ٣٤٦
١ ـ ٣ ـ ١ ـ ٣ ـ ٢ الصاغاني ٣٥١
١ ـ ٣ ـ ١ ـ ٣ ـ ٣ القوهي: المؤلّف الثاني ٣٥٩
١ ـ ٣ ـ ٢ قسمة أبي الجود/ السجزي (D_2) ٣٦٨
١ ـ ٣ ـ ٣ قسمة أبي الجود (D_3) ٣٧٩
١ ـ ٣ ـ ٤ المقارنة بين قسمات:
أبي الجود والشّنّي وكمال الدين بن يونس ٣٨٢
١ ـ ٣ ـ ٥ قسمتا ابن الهيثم (D_4، D_5) ٣٩٠
١ ـ ٣ ـ ٥ ـ ١ المثلّث [1, 3, 3] وقسمة ابن الهيثم (D_5) ٣٩١

١ ـ ٣ ـ ٥ ـ ٢ المثلّث [3,2,2] والقسمة من النوع (D_3) ٣٩٢
١ ـ ٣ ـ ٥ ـ ٣ المثلّث [1,5,1] وقسمة ابن الهيثم (D_4) ٣٩٣
١ ـ ٣ ـ ٥ ـ ٤ المثلّث [1,2,4] والقسمة (D_1) ٣٩٤
١ ـ ٤ عملان إضافيّان: لنصر بن عبد الله ولمؤلّف مجهول ٣٩٥
١ ـ ٤ ـ ١ نصر بن عبد الله ٣٩٥
١ ـ ٤ ـ ٢ نصّ لمؤلّف مجهول ٤٠٠
١ ـ ٥ مؤلّفا ابن الهيثم حول عمل المسبّع ٤٠٢
١ ـ ٥ ـ ١ «في مقدّمة ضلع المسبّع» ٤٠٢
١ ـ ٥ ـ ٢ «في عمل المسبّع» ٤١٤
٢ ـ قسمة الخطّ ٤٤٢
٣ ـ في مسألة عددية في المجسّمات ٤٤٨
٤ ـ تاريخ نصوص ابن الهيثم ٤٥٣
٤ ـ ١ «في عمل المسبّع في الدائرة» ٤٥٣
٤ ـ ٢ «في مقدّمة ضلع المسبّع» ٤٥٨
٤ ـ ٣ «في قسمة الخطّ الذي استعمله أرشميدس»، في المقالة الثانية في «الكرة والأسطوانة» ٤٦٠
٤ ـ ٤ في مسألة عددية مجسّمة ٤٦٢
٥ ـ نصوص مخطوطات ابن الهيثم ٤٦٣
٥ ـ ١ «في مقدّمة ضلع المسبّع» ٤٦٥
٥ ـ ٢ «في عمل المسبّع في الدائرة» ٤٧٣
٥ ـ ٣ «في قسمة الخطّ الذي استعمله أرشميدس» في المقالة الثانية من كتابه «في الكرة والأسطوانة» ٤٩١
٥ ـ ٤ «في مسألة عددية مجسّمة» ٤٩٤

الفصل الرابع
«الهندسة العملية: المساحة»

٤ ـ ١ مقدّمة ٤٩٩
٤ ـ ٢ الشرح الرياضي ٥٠٢

٤ ـ ٢ ـ ١ كتاب «في أصول المساحة» ٥٠٢
٤ ـ ٢ ـ ٢ في مسألة مجسّمة ٥٢٦
٤ ـ ٣ تاريخ النصوص ٥٣٢
٤ ـ ٣ ـ ١ «في أصول المساحة» ٥٣٢
٤ ـ ٣ ـ ٢ «في معرفة ارتفاع الأشخاص القائمة وأعمدة الجبال وارتفاع الغيوم» .. ٥٣٤
٤ ـ ٣ ـ ٣ «في استخراج أعمدة الجبال» ٥٣٩
٤ ـ ٤ نصوص مخطوطات ابن الهيثم: ٥٤١
٤ ـ ٤ ـ ١ «في أصول المساحة» ٥٤٣
٤ ـ ٤ ـ ٢ «في معرفة ارتفاع الأشخاص القائمة وأعمدة الجبال وارتفاع الغيوم» .. ٥٩٣
٤ ـ ٤ ـ ٣ «في استخراج أعمدة الجبال» ٥٩٥

الملحق الأوّل

تقليد في البحث: المسبَّع المتساوي الأضلاع

تاريخ النصوص ٥٩٧
١ ـ «كتاب عمل الدائرة المقسومة بسبعة أقسام متساوية لأرشميدس» ٦٠٤
٢ ـ ١ «كتاب عمل المسبَّع في الدائرة لأبي الجود» ٦٠٥
٢ ـ ٢ «رسالة أبي الجود في الدلالة على طريقي القوهي والصاغاني» ٦٠٦
٢ ـ ٣ كتابة مختصرة للمؤلّف السابق ٦٠٦
٣ ـ ١ «كتاب السجزي في عمل المسبَّع في الدائرة» ٦٠٦
٣ ـ ٢ «مقالة السجزي في عمل المسبَّع في الدائرة» (النسخة المختصَرة) ٦٠٧
٤ ـ ١ «استخراج أبي سهل القوهي في عمل المسبّع المتساوي الأضلاع
في دائرة معلومة» ٦٠٨
٤ ـ ٢ «رسالة أبي سهل القوهي في استخراج ضلع المسبَّع المتساوي الأضلاع
في الدائرة» (نسخة مختصَرة) ٦١٠

٥ ـ «رسالة الصاغاني إلى عضد الدولة في عمل المسبّع» ٦١١
٦ ـ «كتاب في كشف تمويه أبي الجود للشنّي» ٦١١
٧ ـ «رسالة نصر بن عبد الله في استخراج وتر المسبّع» ٦١٢
٨ ـ «تركيب لتحليل مقدّمة المسبّع المتساوي الأضلاع في الدائرة» ٦١٢
٩ ـ «رسالة بن يونس في البرهان على إيجاد المقدّمة التي أهملها أرشميدس في كتابه في تسبيع الدائرة» ٦١٢
النصوص الخاصة بعمل المسبّع [أرشميدس] ٦١٥
ـ «كتاب عمل الدائرة المقسومة بسبعة أقسام متساوية» لأرشميدس ٦١٧
ـ نصوص ثلاثة كتب لأبي الجود ٦٣٣
ـ نصّا كتابَي السجزي ٦٦١
ـ نصوص كتب القوهي ٦٧٧
ـ نص كتاب الصاغاني ٧٠٥
ـ نص كتاب الشنّي ٧١٧
ـ نص كتاب نصر بن عبد الله ٧٣٥
ـ نص كتاب مؤلّف مجهول: «تركيب لتحليل مقدمة المسبّع المتساوي الأضلاع في الدائرة» ٧٤١
ـ نصّا كتابَي بن يونس ٧٤٧

الملحق الثاني
سنان ابن الفتح والقبيصي: المساحات المناظرية

سنان ابن الفتح والقبيصي ٧٥٩
نصّ «ومما استخرجه سنان بن الفتح في المساحات المناظرية» ٧٦٠
فقرة من رسالة أبي صقر عبد العزيز بن عثمان القصيبي «في المساحات المناظرية» .. ٧٦٣

التعليقات الإضافية ٧٦٥
١ ـ «في تمام كتاب المخروطات» ٧٦٥
٢ ـ رسم بالآلة (نيوسِس) لقسمة الخطّ الذي استعمله أرشميدس ٧٦٧
٣ ـ من كلام ابن الهيثم على مقدِّمة أرشميدس في ضلع المسبَّع ٧٧٠
٤ ـ القوهي ومقدِّمة قسمة الخطّ لأرشميدس: الشرح الرياضي والنصّ ٧٧٥
● ملاحظة حول وجود النقطة I. ٧٧٦
ملاحظات حول النصوص ٧٨٧
ملحق للمجلَّد الثاني ٨٠٥
المراجع ٨١١
فهرس الأسماء ٨١٩
فهرس المصطلحات ٨٢٥

تقديـــم

الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة
في سلسلة تاريخ العلوم عند العرب
ضمن مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي

يطيب لي أن أقدِّم لهذه المجلدات الخمسة في الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة، التي تُترجَمُ وتُنشَرُ بالتعاون بين **مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية ومركز دراسات الوحدة العربية**، في إطار مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي.

تهدف هذه المبادرة إلى إثراء المحتوى العربي عبر عدد من المشاريع التي تنفّذها مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية بالتعاون مع جهات مختلفة داخل المملكة وخارجها. ومن هذه المشاريع ما يتعلق بترجمة الكتب العلمية الهامة، بهدف تزويد القارئ العربي بعلم نافع يفيد في التوجّه نحو مجتمع المعرفة والاقتصاد القائم عليها، ومنها ما يتعلق برقمنة المحتوى العربي الموجود ورقياً وإتاحته على الشبكة العالمية، الإنترنت.

يُعَدُّ هذا العمل، الذي يستند إلى إحدى عشرة مخطوطة عربية، خطوة هامة في اكتشاف المخطوطات العربية العلمية وتحقيقها، وفي إظهار وتحليل مدرسة عربية أصيلة في الرياضيات التحليلية والهندسة ورياضيات اللامتناهيات في الصغر، مع تتبع علمائها وتطورها وإنتاجها وأصالتها.

وتبينُ هذه المجلدات بشكل جليٍّ أن الحضارة العربية الإسلامية واللغة العربية قد قادت عربة المعرفة في مجالات العلم نحو أربعة قرون، وهذا يؤكّد ما أقرّه العالِم جورج سارتون في كتابه المرجعي **مدخل في تاريخ العلم**، كما أوضحت هذه المجلدات، أن العلماء العرب والمسلمين لم يكونوا نَقَلَةً لِعِلْمِ غيرهم فقط بل أنتجوا العلوم الأصيلة، وكان منهم عباقرة كابن الهيثم.

إن مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية سعيدة بصدور هذه المجلدات الخمسة. وأود أن أشكر المؤلف، وأشكر مركز دراسات الوحدة العربية على الجهود التي بذلها لتحقيق الجودة العالية في الترجمة والمراجعة، وعلى سرعة الإنجاز، كما أشكر زملائي في مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية الذين يتابعون تنفيذ مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي.

الرياض ١٠/ ٤/ ١٤٣٢هـ
رئيس مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية
د. محمد بن إبراهيم السويل

حول الترجمة العربية لهذا الكتاب

لقد بدأ رشدي راشد منذ أكثر من خمس عشرة سنة بنشر أجزاء متتابعة من دراسة موسوعيّة متكاملة في «الرياضيّات التحليلية» تطمح إلى تجميع وثائق هندسة اللامتناهيات في الصغر المكتوبة بالعربية وإلى تحقيقها وشرحها وكتابة تاريخها خلال فترة ازدهارها القصوى بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة، أي بين القرن التاسع والقرن الحادي عشر للميلاد. ولقد صدرت حتّى الآن خمسة مجلّدات باللغة الفرنسية من هذه المجموعة القيّمة التي جاءت كمساهمة أساسية لا غنى عنها في دراسة التراث العلمي العربي وتحقيق ونشر مخطوطاته وكتابة تاريخه، وكذلك للتأريخ للعلوم الرياضيّة العربيّة وتطبيقاتها.

ولقد كرّس رشدي راشد هذا **المجلّد الثالث** لدراسة أعمال ابن الهيثم الهندسيّة موضحاً موضعها ضمن الأعمال الهندسية التي ظهرت بين القرن التاسع والقرن الحادي عشر للميلاد. وهكذا نجد فيه دراسات للمخطوطات الخاصة بنظريّة المخروطات وعمل المسبّع المتساوي الأضلاع في الدائرة وقسمة الخطّ وفقاً لمقدِّمة أرشميدس، مع تفاصيل مهمّة عن المجادلات التي حصلت بين ريّاضيّي ذلك العصر؛ كما نجد فيه دراسة للمخطوطات الخاصة بالهندسة العمليّة مثل علم المساحة وقياس أحجام المجسّمات. ويضمُّ هذا المجلّد العديد من نصوص المخطوطات التي جرى تحقيقها لأوّل مرّة؛ وهذا ما يُعطي فكرة متكاملة عن البحوث الهندسيّة من خلال وصف حيٍّ لها، كما يوضِّح إسهامات ابن الهيثم نفسه.

وأوّد أن أشكر الأستاذ رشدي راشد على السماح لي بنقل الرسوم الهندسية والعديد من العبارات الرياضية من القرص الإلكتروني للنسخة

الفرنسية الأصل، وعلى إمدادي بالنصوص العربية المستشهد بها من المخطوطات والمراجع الأخرى، وعلى مراجعته لأجزاء كثيرة من الترجمة.

لقد استخدمت في هذه الترجمة، من جهة، المصطلحات الرياضية التي اعتمدها ابن الهيثم والتي كانت متداولة في عصره، وحاولت، من جهة أخرى، قدر الإمكان انتقاء أكثر المصطلحات الرياضية الأخرى انتشاراً وتعبيراً وبعداً عن اللّبس. ولقد اعتمدتُ غالباً في ترجمة المصطلحات الرياضية الحديثة إلى العربية على «معجم الرياضيات المعاصرة» (تأليف صلاح أحمد وموفَّق دعبول وإلهام حمصي، مؤسسة الرسالة للطبع والنشر والتوزيع، بيروت ١٩٨٣).

ألفت نظر القارئ الكريم إلى ضرورة قراءة الصيغ الرياضية الواردة في الكتاب من اليسار إلى اليمين، إلا في بعض الحالات التي ترد فيها الصيغة ضمن الجملة.

وأدرك جيداً، كما يُدرك كلٌّ من مارس ترجمة النصوص الرياضية والعلمية إلى العربية، أنّ المسألة في هذا المضمار معقّدة، وأشكر، سلفاً، أيّ نقد بنّاء في هذا الإطار.

بدوي المبسوط

فاتحـة

الفِكْرُ حَبْلٌ، متى يُمْسَكْ على طَرَفٍ   مِـنـه، يُـنَـطْ بـالـثُـرَيّـا ذلـك الـطَّـرَفُ

والعقلُ كالبحرِ، ما غيضَتْ غَوارِبُهُ   شـيـئـاً، ومـنـه بَـنـو الأيّـامِ تَـغْـتَـرِفُ

تُعبِّر أبيات أبي العلاء هذه أجمل وأدقّ تعبير عمّا قامت به أجيال من الرّياضيّين، وما تقوم به أجيال العلماء جملةً، عند إقامة صرح هذا الفصل أو ذاك من الريّاضيّات والعلوم. وتُعبِّر أيضاً أحسن تعبير عمّا تقوم به أجيال المؤرّخين لهذه الفصول. وكيف لا يكون ذلك كذلك؟ ألم نرَ كيف تعاقبت الأجيال، وكيف اغتَرَف كلّ جيل من بحر العقل ليزيده على الذي ورثه لإقامة صرح الريّاضيّات التحليليّة؟ فلقد رأينا في المجلّد الأوّل من هذا الكتاب كيف بدأ البحث بالعربية في هذا الميدان عند الكِندي وأعدائه الألدّاء ـ بني موسى ـ وكيف طوِّرت أبحاث أرشميدس، التي تُرجِم بعضها إلى العربيّة، في حساب المساحات والأحجام المنحنية، وكذلك أبحاث غيره في المساحات والأحجام القصوى، وكيف ازدهرت على أيدي أجيال من الرياضيين، مثل ثابت بن قرّة وحفيده إبراهيم بن سنان والخازن والقوهي وابن سهل. ورأينا أيضاً أنّ هذا الازدهار لم يكن وليد الصدفة ولا ابن الحظّ، ولكنّه كان نتيجة لعمل دؤوب دعمته مؤسّسات عامّة وخاصّة. وكان الفصُّ المعرفيّ لهذا الازدهار عند ريّاضيّي هذه الحقبة هو إقامة الصلة بين الهندسة المساحية ـ أو الهندسة الأرشميدية ـ والهندسة الوضعية، أعني تلك التي تعالج الوضع والصورة كما نجدها عند أبلونيوس. ويبدو أنّ الكثير ممن يشتغل بتاريخ الهندسة لم يُدرك حقّ الإدراك هذه الخطوة الجديدة التي كان لها جُلُّ الأثر في تقدُّم البحث الهندسيّ. فإن كان بعض بذورها قد أُلقي من قبل، فإنّها لم تبلغ ما بلغته إلا بعد القرن التاسع، أعني حين اشتغل الريّاضيّون بأعمال أرشميدس وبكتابات أبلونيوس في الوقت نفسه، وخاصّة كتابه الضخم : «المخروطات».

بيّنا في المجلّد الأوّل من كتابنا هذا بعض نتائج هذه الخطوة المعرفية الجديدة، التي بدأت مع بني موسى قبل أن يتمّ نضوجها إبّان القرن العاشر الميلاديّ، التي من بينها تطبيق المناهج الإسقاطيّة والتحويلات التآلفية، مع ثابت بن قرّة وحفيده وخلفائهم من أمثال أبي سهل القوهي والعلاء بن سهل.

ثمّ أتينا في المجلّد الثاني بأعمال ابن الهيثم في هذا الميدان تحقيقاً وتأريخاً وتحليلاً، وبيّنّا كيف زاد ابن الهيثم لما ورثه إحكاماً ويقيناً، وكيف أخذ بسبل من خلفهم ليبلغ بها نهايتها الريّاضيّة والمنطقيّة، وكيف أضاف الجديد. وبيّنّا أيضاً أنّ مشروع ابن الهيثم العلميّ يقوم على ركيزتين: إتمام ما أتى به سابقوه والوصول به إلى نهايته، هذا مما ألزمه إقامته على قواعد نظريّة ثابتة ومتينة. ولقد أدّى هذا المشروع في كثير من المجالات العلمية إلى نقد الموروث وتجديده، بل الثورة عليه. وهذا مما يُفسّر في بعض الأحيان التوقُّف النسبي للتقدّم في بعض الفصول، بعد ابن الهيثم. فمتابعة التقدّم بعده كان يلزم تجديد المفاهيم الريّاضيّة ولغة الرياضيات التحليلية. هكذا يبدو الأمر في حساب المساحات والأحجام المنحنية، وكذلك في حساب المساحات والأحجام القصوى.

بيّن المجلّدان الأوّلان من هذه الموسوعة، كما بيّنت أعمال ابن سنان والقوهي وغيرهم، مما نشرناه[1]، أنّ الهندسة العربية لم تكن ـ كما اعتقد ويعتقد البعض ـ استمراراً باهتاً للهندسة اليونانية، ولكنّها كانت امتداداً لها في بعض الميادين، وتجديداً لها في ميادين أخر، وإبداعاً لم يُسبق إليه في ميادين أخر مثل الهندسة الجبرية وبداية الهندسة الإسقاطية، وهندسة التحويلات التآلفية، . . . الخ.

كان هدفنا في هذا الكتاب، وما زال، المساهمة في إقامة صرح

---

١ انظر: R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān: Logique et géométrie au X^ème siècle*(Leiden, E. J. Brill, 2000؛ وانظر أيضاً: **علم الهندسة والمناظر في القرن الرابع الهجري (ابن سهل ـ القوهي ـ ابن الهيثم)**، ترجمة شكر الله الشالوحي، مراجعة عبد الكريم العلاف، سلسلة تاريخ العلوم عند العرب، ٣ (بيروت، ١٩٩٦).

الهندسة العربية محقّقين نصوصها المخطوطة تحقيقاً متأنّياً ودقيقاً، وتحليلها تحليلاً مُعمّقاً والتأريخ لها تأريخاً موضوعيّاً لا يُنسَبُ إليها ما لم تتضمّنه ولا ينقصها حقَّها فيما تضمّنته. ولتحقيق هذا الهدف، حسب طاقتنا، رأينا حصر بحثنا في هذا الكتاب على أعمال ابن الهيثم، لما أوضحناه من أسباب. وحتّى نضع هذه الأعمال وضعها التاريخي والعلميّ الصحيح، كان لا مفرّ من أمرين آخرين: أحدهما وضع بحوث ابن الهيثم في التقليد العلمي الذي أراد البلوغ به إلى نهايته، والآخر هو وضع الرياضيات التحليلية نفسها بين أعمال ابن الهيثم الهندسية. أما الأمر الأوّل فألزمنا تحرير المجلّد الأوّل من هذا الكتاب، كما ألزمنا تحرير ملاحق المجلّد الثالث، كما سيلزمنا تحرير ملاحق المجلّدات الأخَر، أمّا الأمر الثاني، فألزمنا تحرير المجلّد الثالث كما سيلزمنا تحرير ما سيليه من المجلّدات. كلُّ هذا يفسّر للقارئ احتفاظنا بعنوان الكتاب، أعني الرياضيات التحليلية، لكلّ المجلّدات، حتّى وإن كانت تعالج فصولاً هندسية أخرى.

وإن كان لي أن أنهي هذه الفاتحة بدعاء، فهو ألاّ يضيع هذا الجهد سدى؛ فهدفي في كلّ هذه التحقيقات وما يصحبها من تحليل وتأريخ ودراسة، هو أن يتسنّى لقارئ العربية التعرُّفُ على هذا التراث بصورة لائقة، وأن يستطيع المؤرِّخون إعادة كتابة تاريخ الهندسة والرياضيات بحسب ما تقتضيه المعايير العلمية من أمانة وموضوعية، وأن تأخذ الرياضيات العربية مكانها عند التأريخ، لا أكثر منه، ولكن أيضاً لا أقلّ منه.

رشدي راشد

باريس سنة ٢٠٠٠

تمهيـــد

لقد أردنا، في المجلّدين الأوّلين أن نعيد كتابة تقليدٍ في البحث الهندسي بكامله، وهو تقليد الأرشميديين العرب في رياضيات اللامتناهيات في الصغر. ولكنّ هذا لم يكن هدفنا الوحيد، إذ كنّا نريد أيضاً تكوين أوّل نواة لمجموعة الوثائق الهندسية العربية. بقي هدفنا على حاله، وإن تغيّر شكلياً؛ وهو جمع المواد واستخدامها في كلّ ما يؤدّي إلى الإقلاع عن طريقة في كتابة التاريخ، جزئية في أحسن الأحوال أو حكائيّة في أسوأ الأحوال. لسنا ساذجين حتّى ندّعي إعادة تصويب كاملة لهذا التاريخ؛ وما يَحمينا من الوقوع في هذا الوهم يَتمثّل بمحدودية الوسائل التي لدينا وبغياب مؤلّفات عديدة ما زالت مؤقّتاً مفقودة أو مفقودة نهائياً. لقد حاولنا ببساطة أن نكون شاملين بشكل معقول، وأن نكون على الأخصّ منهجيّين بشكل كافٍ، بحيث نكشف عن المدلول الصحيح لنشاط رياضيّ مُعينٍّ في زمن مُعينٍّ.

لقد بدا لنا من قبيل الحكمة أن نبدأ بأعمال ابن الهيثم الهندسية بكاملها تقريباً، قبل أن نرجع إلى أسلافه. إن تبريرَ هذا الخيار المقصود منهجيّاً يكمُن في المركز الفريد لهذا الهندسيّ الكبير؛ فهو وريث لقرنين من النشاط الكبير في البحث الهندسي؛ وهكذا أراد أن يوصل هذه البحوث إلى أبعد مدى تسمح به الإمكانيات المنطقية. ألم يكن هدفه إتمام إسهامات أسلافه اليونانيين والعرب، كما أعلن ذلك مرّات عديدة بعبارات بدون التباس؟ إنّ مشروع ابن الهيثم الواضح هو إصلاح أخطاء أسلافه والأخذ الكامل بما استبصروه، ودفع إنجازاتهم إلى أبعد مدى ممكن. كان من الطبيعي إذن أن تُشكِّل أعمال ابن الهيثم مركزاً مُتقدِّماً ننطلق منه لنرجع بطريقة منظّمة إلى ماضي هذا البحث الهندسي. أمّا

الطرائق التي رتّبناها للقيام بهذا النهج التراجعي، فهي تستند إلى تاريخ التقليد النصّي لكل مؤلّف وإلى التقليد المفهوميّ الذي يندرج فيه. ولقد شرحنا ذلك في مكان آخر[1].

لقد كرّسنا المجلّد الثاني، الذي صدر قبل المجلّد الأوّل، بكامله لأعمال ابن الهيثم في هندسة اللامتناهيات في الصغر وفي الهندسة الأرشميدية. أمّا المجلّد الأوّل فهو مكرّس لكتابات الأرشميديين العرب السابقين لابن الهيثم. تندرج هذه الكتابات ضمن تقليد بدأ به بنو موسى منذ القرن التاسع وتابعه أسلافُ ابن الهيثم المباشرون مثل القوهي وابن سهل، كما أغْنَتْه سلالة من الشُّرّاح. إنّ هناك سمتين تفرضان نفسيهما مباشرة على كلّ من يُريد أن يصف هذه الإسهامات.

السمة الأولى هي أنّ هذا التقليد قد أُسِّسَ وطُوِّرَ على أيدي هندسيّين. وكان هؤلاء، بالرغم من اطّلاعهم على الجبر وتأثُّرهم به على درجات مختلفة، يريدون البحث في الهندسة. غير أنّنا نشعر ضمن هذا التقليد بتأثير كثيف للجبر. فقد أدخِلَ نوع من مفهوم القياس، زِيد على لغة المقارنة التقليدية بين الأشكال، لتحديد مساحات السطوح وأحجام الأجسام المنحنية؛ كما استُخدِمت فيه بشكل مُكثّف الجموع بين المقادير والمتباينات الحسابية.

والسمة الثانية، التي مرّت كالسّمة الأولى بدون أن تلفت نظر أحد، هي مرافقة تقريباً للأولى، فقد عدل هؤلاء الهندسيّون عن اعتبار أنفسهم كورثة لأرشميدس فقط بل كخلفاء أيضاً لأبلونيوس. لم يحدث أبداً قبل ذلك العصر أن ترافق هذان التياران الهندسيان بمثل هذه الشدّة. لقد كان لدى هؤلاء الرياضيين نظرية للقطوع المخروطية أكثر إعداداً من تلك التي كانت لدى أرشميدس نفسه. وكانوا على معرفة بكتابات لأبلونيوس، من بينها «كتاب المخروطات»، كما تدرّبوا أيضاً على الاهتمام بخواصّ الوضع والصورة. وقاموا كلّهم بدون استثناء، من بني موسى حتّى ابن

---

[1] انظر: *«L'histoire des sciences entre épistémologie et histoire,» Historia scientiarum, 7.1 (1997)*, p. 1-10.

الهيثم، ببحوث مشترَكة في هندسة أرشميدس وهندسة أبلونيوس. وكان هذا التوحيد بين التيّارين عملاً مؤثّراً ومبدأ للاكتشاف والتنظيم في آن واحد. وهكذا لم يكن من وليد الصدفة أنَّ فصولاً جديدة لم تلبث أن ظهرت: التحويلات النقْطية، دراسة بعض الإسقاطات، الهندسة الجبرية، . . . هذا هو المشهد الجديد الذي تُظهره أعمال ابن الهيثم، الذي يُشكِّل خلفيّة بحوثه في هندسة اللامتناهيات في الصغر. سنكرِّس المجلّدات التالية لدراسة النصوص، نظراً إلى كثرتها وغِناها أيضاً. إنَّ العنوان الذي وضعناه للمجلّدين الأوّلين لم يَعُد ملائماً كثيراً؛ غير أننا قرّرنا الاحتفاظ به لكي لا نقطع الاتصال بين عناصر هذه المجموعة؛ وسيدلُّ العنوان الفرعي على الموضوع الذي يُنظِّم حوله كلّ كتاب. هذا الحلُّ، الذي لا يرضينا تماماً، هو الحلّ الأقل سوءاً من الناحية العملية.

لقد قام كريستيان هوزيل، مدير البحوث في مركز البحوث الوطني الفرنسي، وفقاً للقواعد التي اتبعناها لهذه المجموعة، بقراءة هذا المجلّد؛ فليتقبّل كلمات شكري الحارّة. أوجّه امتناني، أيضاً، إلى ألين أوجيه، مهندسة الدراسات في مركز البحوث الوطني الفرنسي، التي حضّرت النسخة الفرنسية من هذا المجلّد للطباعة وحضّرت له معجم المفردات والفهرس.

رشدي راشد

بور لا رين، ١٩٩٩

تنبيه

لقد استخدمنا الأحرف لتسمية المخطوطات، وفقاً لمصطلحات واردة في المراجع.

< > يفصل هذان القوسان ما تجب إضافته لكي يسدَّ نقصاً في نصّ مخطوطة ما.

[] يفصل هذان القوسان المعقوفان الكلمة أو المقطع الذي يجب حذفه لكي يُحفَظَ تماسكُ النصّ.

/ هذه الإشارة تدلُّ على نهاية الورقة في المخطوطة المعنية بالأمر.

مقدِّمـــة

القطوع المخروطية والأعمال الهندسية

لاحظ الهندسيّون اليونانيون بسرعة أنَّ الأعمال الهندسيّة لا تنحصر فقط ضمن المسائل الخاصة بالسطوح المستوية، وأنَّ المسائل «القابلة للعمل» ليست فقط تلك التي يُمكن حلّها بواسطة المسطرة والبركار. ولقد دفع هذا الاكتشاف المهمّ بعض الرياضيين إلى البحث عن منحنيات مختلفة عن الدائرة، وخاصة المنحنيات المخروطية. إنَّ تاريخ هذه الأعمال الهندسية قد رُويَ مراراً، وهذا ما لا يدع مجالاً للتوقُّف عنده[1]. لنذكِّر ببساطة بأنَّ القطوع المخروطية قد استُخدِمت منذ زمن بعيد حتّى في القرن الرابع قبل الميلاد لحلّ مسألة خاصّة بالهندسة المجسّمة؛ إذ إنَّ مانخمس (*Ménechme*) استعان بقطع مكافئ وبقطع زائد لحلّ مسألة «مضاعفة حجم المكعّب». هل كان هذا الاستخدام عملاً معزولاً أم كان مُعتاداً في ذلك الزمن؟ هل كان عملاً مؤسّساً لنظرية المخروطات نفسها؟ إنَّ الجوابَ عن هذه الأسئلة مستحيلٌ، بسبب الغموض الذي يلفُّ أصول هذه النظرية. ولكنَّ الذي يهمُّنا هنا هو أن نتحقّق أن المنحنيات المخروطية قد استُخدِمت منذ زمن بعيد في عمل حلول للمسائل الخاصّة بالهندسة المجسّمة.

تناول قونون الساموسي (*Conon de Samos*)، بعد مانخمس (*Ménechme*) بفترة وجيزة، أيْ في أواسط القرن الثالث قبل الميلاد، المسألة نفسها بمجملها، وفقاً لما ذكره أبلونيوس. يُخبرنا هذا الأخير بالفعل، في مقدِّمة المقالة الرابعة من «كتاب المخروطات»، أنَّ قونون الساموسي اهتمّ بالقطوع المخروطية، وقام ببحوث لمعرفة عدد نقاط التقاطع فيما بينها، أي «أكبر

---

[1] انظر: Th. Heath, *A History of Greek Mathematics*, 2 vol. (*Oxford, 1921; reprod. Oxford, 1965); O. Becker, Grundlagen der Mathematik,* 2e éd. (Munich, 1964).

عدد من النقاط التي تتقاطع عليها القطوع المخروطية التي لا تتطابق بشكل كامل فيمكنها أن تتلاقى فيما بينها»[٢]. هذا هو الصدى الوحيد والبعيد الذي وصل إلينا حول كيفيّة حصول هذا البحث وهدفه. فهل هو شبيه بالبحث الذي قام به أبلونيوس في المقالة الرابعة من «كتاب المخروطات»، حيث يُناقِش عدد النقاط مُستَخدِماً استدلالاً بالخُلْف؟ نحن نجهل ذلك؛ ولكنَّ هذه الشهادة الهامَّة لأبلونيوس تسمح لنا بالقول إنَّ بعض الرياضيين الذين لا يَقِلّون شأناً بأهميتهم، مثل قونون الذي ذكرناه، قد حاولوا بعد مانخمس، أن يدرسوا المنحنيات المخروطية، أو على الأقلّ، عددَ نقاط التقاطع فيما بينها. وإذا تابعنا قراءة ما كتبه أبلونيوس نعلم أنَّ هذا البحث لقونون كان موضوع انتقاد لسببين، في آن واحد، يخصَّان دقة هذا العمل والفائدة المرجوَّة منه. فلقد وجَّه نيقوطاليس السيريني (*Nicotalès de Cyrène*)، المعاصر لقونون انتقاداً مزدوجاً، إلى هذا الأخير، نقله أبلونيوس بالعبارات التالية:

عرض قونون الساموسي مسألة التقاطع على تراسيديوس (*Trasydée*) ولكن دون أن يتطرّق إلى البرهان، كما كان يجب عليه أن يفعل؛ ولهذا السبب وجّه إليه نيقوطاليس السيريني اللومَ بحقٍّ[٣].

وإذا كان أبلونيوس مُتَّفقاً مع نيقوطاليس في هذا الانتقاد الأوّل لقونون، فإنّه لا يوافقه على انتقاده الثاني حيث اعتبر نيقوطاليس أنّ المسائل التي أثارها قونون غير مفيدة:

يقول <أبلونيوس> إنَّ نيقوطاليس هذا الذي ذكرنا لمخالفته لقونون رغم أنّه لا يحتاج إلى شيء مما استنبطه قونون في معرفة التقسيم، وليس زعمه حقٌّ، وذلك أنّه إذا كان ممكناً أن يعلم أمر التقسيم من غير حاجة إلى هذه الأشياء، فإنَّ معرفة بعضه تكون أسهل إذا علم على هذه الجهة. وبهذه الأشياء نعلم ما كان منه غير محدود أو ما كان على جهات كثيرة، وما لا يمكن أن يكون البتّة[٤].

---

٢ انظر: *Apollonius, Les Coniques d'Apollonius de Perge, Œuvres traduites par Paul Ver Eecke* (Paris, 1959), p. 281.

٣ المرجع السابق ص. ٢٨١

٤ المرجع السابق ص. ٢٨٢

لقد جرت محاولة في منتصف القرن الثالث قبل الميلاد لإحالة بعض المناقشات (التحديدات) إلى تحديد نقاط التقاطع بين قطعينْ مخروطيَّينْ، ولكنَّ هذه المحاولة لا ترتكز على أيّة قاعدة متينة وتشكو من غياب البرهان. هل فكَّر، لهذا السبب، بعضُ الرياضيين مثل نيقوطاليس، بإمكانية الاستغناء عنها؟ وتبقى هناك مسألة بدون حلّ: كيف كان موقف أرشميدس حول هذا الموضوع، وهو الصديق الأصغر سنّاً لقونون؟ هل تَبِع قونون وتبنَّى هذه التقنيَّة الجديدة أم أنَّه اعتمد على تقنيّة نيقوطاليس؟ هل واصل تفضيل « تقنيّة النيوسِس» (*neusis*)[٥] أم أنَّه بدأ يتحوَّل نحو التقنيّة الجديدة ـ تقاطع القطوع المخروطية ـ لبساطتها؟ يُرجِع أرشميدس، في كتاب «اللولب» (*La Spirale*)، بعض القضايا إلى التقنية القديمة ويبدو كأنَّه يُسَلِّم بأنَّ المناقشة قد تمَّت بواسطتها (انظر القضايا ٥، ٦، ٧ و ٩). هل يُمكن أن نستنتج أنَّ هذه التقنيّة الجديدة كانت قد بدأت تحلُّ محلَّ التقنيّة القديمة، على الأقل في مُحيط قونون؟ وقد يتطلّب إصلاحُ هذا الوضع تقوية هذه التقنيَّة، التي ابتكرها قونون، باستدلالات مُتَّسِقة؛ وهذا ما قد يستلزم بدوره معرفة فُضْلى بالخواصّ المحلّية وبخواصّ القطوع المخروطية والخطوط المقارَبة في اللانهاية.

ولكنَّ هذه المعرفة، كما يبدو، كانت لم تزل غير مُكتملة، إذ إنَّ اكتمالها قد حصل فيما بعد. وسنرى أنَّ تاريخ هذا الميدان مرتبِط، تحديداً، بتاريخ هذه المعرفة. يبقى أنَّ أبلونيوس، خلافاً لنيقوطاليس، لم يَرفض منهج قونون بكامله؛ فهو مع إقراره بالضُعف المنطقي لهذا المنهج، يعترف بالقيمة الاستكشافية للمسائل والطرائق التي وجدها قونون. هل يُمكن أن يُفسِّر هذا الوضع موقفَ أرشميدس الذي كان أصغر سنّاً من قونون وأكبر سنّاً بجيل أو جيلين من أبلونيوس؟ وقد يحدث أن يكتفي أرشميدس من وقت إلى آخر ـ انظر مثلاً مقدِّمة القضية الرابعة من المقالة الثانية من كتاب «الكرة والأسطوانة» ـ بعد أن يعرض مسألة خاصة بالهندسة المجسَّمة، بتحديد الحلّ بدون إعطاء البرهان. فهل كان يريد،

[٥] أي «الرسم بالآلة»: وضع خطّ بين منحنٍ (دائرة على سبيل المثال) وخطّ مفروض بحيث يكون الخطّ الموضوع مائلاً نحو نقطة مفروضة.

كما ارتأى ابن الهيثم بعد ذلك باثني عشر قرناً، أن يتجنّب استخدام تقاطع القطوع المخروطية لنفس السبب المذكور أعلاه؟ مهما يكن من أمر فإنّ لوم نيقوطاليس وسكوت أرشميدس وحذر أبلونيوس لم يمنع استخدام القطوع المخروطية لحلّ المسائل الخاصّة بالهندسية المجسّمة. وهكذا استخدم ديوقليس (*Dioclès*) الذي خلف أرشميدس وعاصر أبلونيوس[٦] التقاطع بين قَطعينْ مكافئين لحلّ مسألة «مضاعفة حجم المكعّب».

لقد كان إسهام أبلونيوس الشخصي في هذا الميدان أكثر أهمِّيَّة من إسهام ديوقليس، وإن لم يكن تأثيره مباشراً. ونحن نشير خاصّة إلى المقالة الخامسة من «المخروطات» التي كرَّسها لدراسة الأعمدة على القطوع المخروطية ولتحديد مجموعة النقاط التي ستُسَمَّى فيما بعد مُتَبَسِّطة المنحني (هويغنس *Huygens*). درس أبلونيوس المُتَبَسِّطة ـ عذراً لهذه المفارَقة التاريخية ـ عن طريق مناقشة وجود نقاط التقاطع بين قطع مخروطي وقطع زائد ذي خطَّين مقارَبيْن متعامِديْن. فهو يقوم في القضايا ذات الأرقام ٥١، ٥٢، ٥٥، ٥٦، ٥٨، ٥٩، ٦٢ وَ ٦٣ من هذه المقالة الخامسة بدراسة التقاطع بين القطع الزائد ذي الخطَّين المقارَبيْن المتعامِديْن وكلٍّ من القطوع المخروطية الثلاثة. ولكنَّ هذه الدراسة، التي هي الأكثر إحكاماً بين تلك التي وصلت إلينا في هذا الموضوع من قِبَل الرياضيين الهلّينستيّين، تشكو فيما يخصُّ المسألة التي تهمُّنا هنا من حَصْرَين: إذ إنَّ الأمر يتعلّق، في جميع الحالات، بقطع زائد ذي خطَّين مقارَبيْن متعامِديْن، كما إنَّ التقاطعَ ينقصه البرهان. وليس هذا النقصان نتيجة لعجز من قِبَل الرياضي ولا لانعدام الوسائل التي تسمح جزئياً على الأقلّ بالقيام بهذا البرهان. بل إنَّ مثل هذا المنهج، ببساطة، لم يكن بعدُ مطلباً برهانياً، إذ إنَّه يبدو واضحاً في كلّ الحالات. وحتَّى لو كنّا نستطيع أن نستشفَّ هذا البرهان بين السطور ضمن إسهامات مثل إسهام أوطوقيوس، وهذا ما يعوِّض البراهين الناقصة في «الكرة والأسطوانة»، فإنَّ هذا البرهان لا يظهر في هذه الإسهامات كمعيار يجب تحقيقه.

---

٦ انظر: Les Catoptriciens grecs. I: Les miroirs ardents, Textes établis, traduits et commentés par R. Rashed, Collection des Universités de France (Paris, 2000)، ص. ٧٨ وما يليها.

وهكذا يرتسِم تطوُّرُ البحث حول تقاطع القطوع المخروطية، قبل بداية القرن التاسع. ويتعلّق الأمر، كما يظهر بوضوح، بإسهامات نادرة ومبعثَرة أجريَت هنا وهناك لحلِّ بعض المسائل الخاصَّة بالهندسة المجسَّمة، واستُخدِم فيها التقاطع بين القطوع المخروطية من حين إلى آخر (ولم يتردَّد المؤلّفون في استخدام منحنيات أخرى؛ ولو أن بابوس كان يميل، كما يبدو، إلى تفضيل القطوع المخروطية على غيرها من المنحنيات في المقالتين الثالثة والرابعة من مجموعته الرياضية). لن نُعيد هنا كتابة تاريخ هذا الميدان الذي حُرِّرَ بإتقان مرّاتٍ عديدة. يكفي بأن نُذكِّر باختصار بالمسائل الخاصة بالهندسة المجسَّمة. لقد أشرنا إلى «مضاعفة حجم المكعَّب»، وإلى مقدِّمة القضيّة الرابعة من المقالة الثانية من كتاب «الكرة والأسطوانة» وإلى المقالة الخامسة من كتاب «المخروطات»، وإلى تثليث الزاوية. ولنلاحظ أيضاً الحلولَ العديدة التي تراكمت مع الزمن لبعض هذه المسائل.

إنَّ مثال مضاعفة حجم المكعَّب والمُتَوَسِّطينْ بليغٌ بوجه خاصٍّ في هذا الصدد: عند ديوقليس وبابوس وأوطوقيوس نجد ما لا يقلُّ عن عشرين حلاًّ، من بينها عدة حلول تُستخدَم فيها القطوعُ المخروطية. يبقى علينا أن نلاحظ، وهذا جوهريّ بالنسبة إلى مستقبل البحث بدءاً من القرن التاسع الميلادي، أنَّ هذه المسائلَ وحلولها تستَخْدِمُ مفاهيمَ جديدة حول المنحنيات وخواصِّها، مع العلم أنَّ إعداد هذه المفاهيم قد تحقَّق، فيما بعد، على أيدي رياضيين متأخِّرين. ولنلاحظ من جهة أخرى أنَّ هذه المسائل كانت تعبِّر في ذلك العصر عن رغبة في توسيع الهندسة الأقليدية.

لقد أعيدَ بكثافة، ابتداء من القرن التاسع، تناولُ المسائل الموروثة من قِبَل الرياضيين اليونانيين. وحتّى لو كان الكلام على نتائجَ جديدة سابقاً لأوانه، فإنَّه لا يمكن إلا أن نلاحظ تغيُّر وإصلاح الظروف المحيطة بالبحوث. فنحن نلاحظ، من جهة، تزايداً غير مسبوق للدراسات المكرَّسة لهذه المسائل الموروثة، خلال فترة زمنيّة قصيرة نسبيّاً.

كما نلاحظ، من جهة أخرى، استخدامَ تقاطع القطوع المخروطية، وحدَها بدون غيرها تقريباً، لحل هذه المسائل. وإنَّ استخدام طرائق أخرى لم يكن نادراً فحسب، بل إنَّه يبدو كصدى لذكرى قديمة لدى بني موسى[7]، ولدى البيروني فيما بعد. وهذه الطرائق لم تعد تتطلّب، على كلِّ حال، استخدام المنحنيات المتسامية. وهذا يعني أننا أمام مجهود مضاعف مع نوع من الإجماع على حصر الطرائق المستَخدَمة بتلك الخاصة بتقاطع القطوع المخروطية. وهكذا أصبح الأمر يتعلّق بِـ «ميدان عمل» للقطوع المخروطية.

ولكنَّ هذا الميدان ما لبث أن توسَّع. ولقد جرت هذه الحركة في أوّل الأمر من خلال الفكر الهلينيستي تقريباً. والمثال الأكثر تعبيراً في هذا الخصوص هو مثال المُسَبَّع المتساوي الأضلاع. فبينما لم يترك لنا الرياضيون اليونانيون أيَّ عمل للمسبَّع، نشهد في نهاية القرن العاشر جدلاً حقيقياً، داخل الأسرة الرياضيّة، أدّى إلى ظهور ما لا يقلُّ عن اثنتي عشرة رسالة مكرّسة لهذا الموضوع. ولكنَّ هذا التوسُّع المستوحى من الرياضيات الهلينيستية قد ترافق مع تطوُّر لهذا الميدان نفسِه، مع هدفٍ جديدٍ نشأ من المحاولات الأولى لحل بعض المعادلات الجبرية من الدرجة الثالثة بواسطة القطوع المخروطية. ولقد بدأتْ بالفعل، في نهاية القرن التاسع، إثارة هذه المسألة التي بقيت موضوع بحث إلى أن قدَّم الخيَّام حلّها العامّ. إنَّ أسماء الماهاني والخازن والقوهي وابن عراق وأبي الجود خاصة تدلُّ على بعض المراحل في هذا المشروع. لقد تغيَّرت، بفضل أعمال هؤلاء، ملامحُ ميدان حلول المسائل الخاصّة بالهندسة المجسَّمة بواسطة القطوع المخروطية؛ إذ إنَّه قد تضمَّن آنذاك، إلى جانب المسائل القديمة، تلك التي أثيرت عن طريق الجبر.

يقابل هذا التباينَ في الأصول، كما أشرنا سابقاً، توحيدٌ في طرائق

---

٧ انظر: الفصل الأوّل من المجلّد الأوّل من هذه الموسوعة: **الرياضيّات التحليلية، بنو موسى، ثابت بن قرّة، ابن سنان، الخازن، القوهي، ابن السمح، ابن هود.**

العمل؛ إذ إنَّ الطريقة الوحيدة التي اتُّبِعت، من بعدُ، هي استخدام تقاطع القطوع المخروطية. وهذا، بالتحديد، ما يُميِّز البحث، كما يبدو، انطلاقاً من القرن التاسع.

ينتمي ابن الهيثم إلى هذا التقليد، وهو الذي عدَّله. ونحن نشهد معه إنهاء تحويل «ميدان العمل» إلى فصل في الهندسة مُكرَّس للأعمال الهندسية. ولكن، قبل أن نفصِّل ونحلِّل هذا التطوُّر النظري، لنتوقَّف عند أعمال ابن الهيثم المكرَّسة للأعمال الهندسية. نعدُّ منها ما لا يقلُّ عن عشر رسائل.

تتضمّن المجموعة الأولى ثلاث رسائل:

١ ـ «في مقدِّمة ضلع المسبَّع»

٢ ـ «في عمل المُسَبَّع في الدائرة»

٣ ـ «في قسمة الخط الذي استعمله أرشميدس في المقالة الثانية من كتابه في الكرة والأسطوانة».

تعالج هذه المؤلّفات الثلاثة المسائل التي أثارها سابقو ابن الهيثم. وسوف نرى أنَّ هذا الأخير يحاول في كلِّ مرّة إتمام دراسة المسألة التي وضعها سابقوه وحلّوها في حالة خاصّة، أو بدون برهان على تقاطع بين قَطعين مخروطيّيْن.

تُظهِر المجموعة الثانية من هذه الرسائل اعتماداً واضحاً على الجبر.

٤ ـ «في مسألة عددية مُجَسَّمة»

٥ ـ «في استخراج أربعة خطوط»

يعالج هذا المؤلّف الأخير، المفقود للأسف، المسألة التالية: نُريد أن نجد أربعة خطوط بين خطَّيْن بحيث تكون الخطوط الستة في تناسب مستمرّ. يكتب الجبريّ الخيّام:

«وذلك قد بيّنه أبو علي ابن الهيثم إلا أنّه صعب جداً لا يُمكن أن يلحق بكتابنا هذا.»[8].

تؤدّي هذه المسألة، في الواقع، إلى معادلة من الدرجة الخامسة بحيث يجري حلّها بواسطة التقاطع بين قطع زائد وقطع مكافئ مُعمَّم (مكعَّبة، أي منحنٍ من الدرجة الثالثة). إنَّ شهادة الخيّام تُذكِّرنا بأنّه كان لدى ابن الهيثم طريقة مشابهة لتلك التي نجدها لاحقاً عند فرما (*Fermat*) ضمن كتابه *Dissertatio Tripartita*.

أما المجموعة الثالثة فهي تضمُّ رسالة واحدة:

٦ ـ «في تمام كتاب المخروطات»

ولقد لعب هذا المؤلّف دوراً أساسيّاً في تكوين فصل الأعمال الهندسية.

تتشكّل المجموعة الرابعة والأخيرة من عدّة رسائل تعالج، حسب عناوينها، المسائل الملحقة ببناء القطوع المخروطية.

٧ ـ «في خواصّ القطوع»

عنوان هذا المؤلّف هو مثيل لعنوان مؤلّف آخر حول الدائرة («في خواصّ الدائرة»)، محقّق في المجلّد الرابع من هذا الكتاب[9]. لا يدرس ابن الهيثم في هذا المؤلّف الأخير الخواص المتريّة فحسب، بل أيضاً الخواصّ التآلفية، بالإضافة إلى بعض الخواصّ الإسقاطية. فهل درس ابن الهيثم في نص رسالته «في خواصّ القطوع المخروطية» نفس الخواصّ ولكن للقطوع المخروطية؟ إنَّ هذا غيرُ مُستبعَد، فالتشابه بين العنوانين يوحي بذلك، كما يوحي بذلك اهتمام سابقي ابن الهيثم ـ ابن سنان والقوهي وابن سهل. . . ـ بهذه الخواصّ نفسها.

---

٨ انظر: رشدي راشد وبيجان وهاب زاده: **رياضيات عمر الخيام**، ترجمة نقولا فارس، مركز دراسات الوحدة العربية، بيروت ٢٠٠٥، ص. ٢٢٤، ١٠-١١.

٩ انظر المجلّد الرابع من هذه الموسوعة، الفصل الأول.

٨ ـ «في عمل القطوع المخروطية»

لم يُذكَر هذا المؤلَّف، بخلاف المؤلَّف السابق، من قِبَل كتّاب السِّيَر القدامى ولا من قِبَل الرياضيين الذين نعرفهم. ولكنَّ ابن الهيثم نفسه يَذكُره[١٠]. في رسالته «في المرايا المُحْرِقة بالقطوع المكافئة». ونفهم من سياق كلامه أنَّ ابن الهيثم قد برهن فيه الخاصّة التالية للقطع المكافئ: المسافة بين البؤرة والرأس تساوي ربع الضلع القائم. لقد خُصِّص هذا المؤلَّف المفقود، بدون شكٍ، لرسم القطوع المخروطية؛ وقد يُشبِه نوعاً ما مؤلَّف ابن سنان «في رسم القطوع الثلاثة»[١١].

٩ ـ «في بركار القطوع»

يوحي هذا العنوان، الذي أورده كُتّاب السِّيَر القدامى، بأنَّ هذا المؤلَّف يدرس آلة من نوع «البركار التامّ» للقوهي مُخصَّصة لرسم القطوع المخروطية. إنَّ ضياع هذا المؤلّف يحرِمنا بالطبع من إسهام جديد، بعد إسهاميْ القوهي وابن سهل، في دراسة الآلات الرياضية المكرَّسة لرسم القطوع المخروطية.

١٠ ـ «في استخراج جميع القطوع بطريق الآلة»

لقد ذكر ابن الهيثم[١٢] بنفسه هذا المؤلّف، ولكن لم يذكره أحد من كُتَّاب السِّيَر القدامى أو من الرياضيين. يُعالِج هذا المؤلّف، كما يبدو، نفس الموضوع السابق؛ ويحقُّ لنا أن نتساءل إذا كان هذا المؤلّف، في الواقع، هو نفس المؤلّف السابق الذي ذكرناه بعنوانه الحقيقي، بينما يرد هنا بعنوان يُظهِر مُحتواه.

---

١٠ انظر المجلّد الثاني من هذه الموسوعة، الجدول التلخيصي لأعمال ابن الهيثم، رقم ٩، ص. ٤٧٨.

١١ انظر الفصل الثالث في: R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au x^e siècle* (Leiden, 2000).

١٢ انظر المجلّد الثاني من هذه الموسوعة، الجدول التلخيصي لأعمال ابن الهيثم، رقم ٣٧، ص. ٤٨٦.

تكفي هذه العناوين المختلفة لتُظهِر لنا ابن الهيثم في مُعترَك بحوثه حول خواصّ القطوع المخروطية الضرورية للقيام بتطبيقاتها. فهو يهتمّ بطرائق رَسْمها وبخواصّ وضعها وشكلها وليس فقط بخواصّ القياس، أي بكلّ ما يبدو ضرورياً للأعمال الهندسية. يبقى علينا إذاً أن نعيد منهجيّاً دراسة النصوص التي وصلت إلينا من هذه المجموعات المختلفة.

الفصل الأوّل

نظرية القطوع المخروطية والأبنية الهندسية

"في تمام كتاب المخروطات"

مقدِّمة

١- ابن الهيثم وكتاب "المخروطات" لأبلونيوس

لنؤكـــِّد أنَّ نظرية القطوع المخروطية لم تحتلّ قبل القرنين التاسع والعاشر الميلاديين مكاناً مركزياً إلى الحدّ الذي وصلت إليه خلال هذه الفترة. لا يتعلّق الأمر فقط بخواصّ هذه المنحنيات، بل أيضاً بقابلية تطبيقها على ميادين لم يتنبّأ بها الرياضيّون الأوائل مثل أرشميدس وأبلونيوس نفسيهما. وهذا يعني أنَّ نظرية المخروطات لم تعد فقط أداة قويَّة بين أيدي الهندسيِّين، بل أصبحت، خلال هذين القرنين، تـــُقدِّم للجبريين وسيلة لحلِّ معادلات الدرجة الثالثة[1]. لم يُخالف ابن الهيثم هذه القاعدة، فهو كهندسيّ يدرس الخواصّ الهندسية للقطوع المخروطية، وهذا ما فعله في مؤلّفه "في مساحة المجسَّم المكافئ". وهو كفيزيائي يهتمّ بالخواصّ الانكسارية لبعض هذه المنحنيات، وهذا ما فعله في مؤلّفه "في المرايا المُحرقة بالقطوع". وهو يستخدم، أيضاً، هذه المنحنيات في حلِّ مسائل الأعمال الهندسية... يكفي، باختصار، أن نستعرض أعمال ابن الهيثم لنتحقـــّق أنَّ القطوع المخروطية وخواصَّها متواجِدة فيها من أوّلها إلى آخرها. وهكذا نفهم، بدون عناء، سبب اهتمام ابن الهيثم بمؤلّف أبلونيوس، وخاصَّة أنَّ هذا الأخير كان الوحيد في الساحة، بعد ضياع كلّ أعمال سابقيه. لقد اطلع الرياضيّون العرب، بمن فيهم ابن الهيثم، على هذا المؤلّف ودرسوه واستشهدوا به أكثر من أيِّ مؤلّف يونانيّ آخر في الرياضيّات، باستثناء كتاب "الأصول" لأقليدس. لم يكن ابن الهيثم على معرفة دقيقة بكلّ تفاصيل كتاب

[1] انظر: رشدي راشد: "الجبر"، ضمن رشدي راشد: موسوعة تاريخ العلوم العربية (بيروت ١٩٩٧) الجزء الثاني، ص. ٤٦٣-٤٨٩.

"المخروطات" فحسب، بل كان ينسخه من وقت إلى آخر، كما تدلّ على ذلك المخطوطة التي نسخها بيده والتي وصلت إلينا بعد عشرة قرون[٢].

كان ابن الهيثم الرياضيُّ، والنسّاخُ عندما تتطلّب الظروف ذلك، يعرف تاريخ النصّ العربي لمؤلّف أبلونيوس. ولقد روى هذا التاريخ بنو موسى، الذين كانوا على رأس من قام بالبحث عن المخطوطات اليونانية وبترجمتها، في نصٍّ كان ابن الهيثم مُطَّلعاً عليه اطّلاعاً جيداً، إذ إنــّه زاد عليه بعض التصحيحات[٣]. يقول بنو موسى إنــّهم حصلوا على نسخة أولى تتضمَّن المقالات السبع الأولى ولكنــّها كانت صعبة الفهم؛ ثمَّ وجد أحمد بن موسى، خلال إقامته في دمشق، نسخة أوطوقيوس المتضمّنة للمقالات الأربع الأولى، وهي النسخة التي لا غنى عنها لفهم المجموعة[٤]. يُذكــِّر بنو موسى، كما سنرى لاحقاً، بأنــّهم لم يعثروا من بين المقالات الثماني التي تكلّم عليها أبلونيوس في صدر كتاب "المخروطات"، سوى على المقالات السبع الأولى، وبأنَّ المقالة الثامنة مفقودة. لقد دفع فقدانُ هذه المقالة ابنَ الهيثم إلى تصوُّر مشروعه: إعادة كتابة هذه المقالة المفقودة، على سبيل التخمين، "لإتمام" كتاب "المخروطات". يجب علينا، إذاً، أن نتفحَّص الآثار المُحتَمَلة لهذه المقالة الثامنة، ثمَّ أن نتساءل على ما يُمكن أن يُفهَم من كلمة "إتمام". إنَّ من المُهِمِّ، فعلاً، هو أن نعرف إذا كان قد بقي أيُّ أثرٍ من هذه المقالة الثامنة قابلٍ لتوجيه بحث ابن الهيثم ، قبل أن نتفحَّصَ مغزى مشروعه.

٢ ـ المقالة الثامنة من كتاب "المخروطات"

يُشير أبلونيوس مرّتين في كتاب "المخروطات" إلى هذه المقالة الثامنة الناقصة: المرَّة الأولى في صدر الكتاب حيث يشرح تركيب الكتاب، والمرَّة الثانية في المقالة السابعة[٥]. لم يساعدنا شُرّاح كتاب "المخروطات" في توضيح هذه المسألة: فشرح هيباثيا (*Hypatie*) مفقود وسيرينوس أنطينوي (*Sérénus d'Antinoë*) لا يُخبِرنا بشيء عن الموضوع، أمّا أوطوقيوس فهو كأبلونيوس لا يتحدَّث عن الموضوع. تبقى لدينا مُقدّمات أبلونيوس لكتاب

[٢] انظر: أبلونيوس، "المخروطات"(نسخة مُصوّرة عن مخطوطة أيا صوفيا ٢٧٦٢ من قِبَل م. ناظم ترزيوغلو)، نشر مؤسّسة البحث الرياضي، ٤ (إسطنبول ١٩٨١).
[٣] انظر: بنو موسى، "مقدّمات كتاب المخروطات"، مخطوطة إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الأوراق ٢٢٣ظ ـ ٢٢٦ظ.
[٤] انظر ص.٥١-٥٣.
[٥] انظر ص.٥٥-٥٧.

"المخروطات" التي أوردها بابوس في "المجموعة الرياضية". ويجب أن نضيف إلى ما سبق إشارة النديم، كاتب السِّيَر في القرن العاشر، إلى "أربع قضايا" من المقالة الثامنة. سنتناول من جديد هذه القصّة، التي رُوِيت مرات عديدة، لكي نرى حقيقة الأمر.

يبدو بالفعل أنّ المقالة الثامنة من "المخروطات" قد فُقِدَت من زمن بعيد، ولو أنّ أحداً لا يستطيع تأكيد ذلك بدقّة؛ ولقد حصل ذلك بدون أدنى شكٍّ منذ زمن بابوس، وربما كان ذلك قبل زمنه. أراد بابوس بالفعل أن يُثبِت مقدّمات لإتمام ما عرضه أبلونيوس في "المخروطات"[٦]. فهو يُقدِّم بالتتابع إحدى عشرة مقدّمة للمقالة الأولى، وثلاث عشرة مقدّمة للمقالة الثانية، وثلاث عشرة مقدّمة للمقالة الثالثة – ليس هناك أيّة مقدّمة للمقالة الرابعة–، وستّ مقدّمات للمقالة الخامسة، وأخيراً إحدى عشرة مقدّمة للمقالة السادسة. وهكذا يُميِّز بابوس ويعزل بوضوح، حتّى المقالة السادسة، كلّ مجموعة من المقدّمات، ويوضِّح انتماءها للمقالة المكرَّسة لها. ثمَّ يُنهي عرضه بالمقدّمات المُخَصَّصة، بدون تمييز، للمقالتين السابعة والثامنة. هذا الخروج عن القياس غير مفهوم: لماذا جمع بين المقدّمات الخاصَّة بالمقالتين الأخريَيْن من الكتاب، بعد أن حرص على فصل المقدّمات الخاصَّة بكلٍّ مقالة من المقالات الستّ الأولى؟ يُمكن أن نقول إنّ بابوس كان متعوّداً قليلاً على هذا التصرُّف، إذ إنّه جمع في كتابه "اللازمات" (*les Porismes*)، بين مقدّمات لثلاث مقالات. ولكن هذا لا يتعلّق بنفس المنهج، إذ إنّه بدأ في "المخروطات" بالتمييز بين المقدّمات، بينما جمع بينها في كتاب "اللازمات". ولكنّ هذا الخروج عن القياس لم يكن وحيداً، إذ كنّا نتوقّع من بابوس أن يتكلّم بالجمع عند الإشارة إلى مقالتين، ولكنّه تكلّم بالمفرد؛ فهو يكتب: τοῦ ZH "مقدّمات ٧ وَ ٨". هل هذا حادث عرضي أم أنّه دلالة على أنّ النصّ الذي كان بين يديه لا يُشير إلا إلى مقالة واحدة؟ ليس هناك في النصّ ما يوحي بجواب معقول عن هذا السؤال. كلّ ما يمكن أن نقوله هو أنَّ النصّ يُثير مسألة المعرفة

[٦] حرّر بابوس سبعين مقدّمة لمقالات "المخروطات" موجودة ضمن المقالة السابعة من "المجموعة الرياضية" [انظر هولتش، المجلّد الثاني، ص. ٦٣٦ وما يليها؛ انظر أيضاً *Apollonius Pergaeus, éd. J.L. Heiberg, 2 vol. (Leipzig, 1891-1893 ; repr. Stuttgart, 1974)*، المجلّد الثاني ص. ١٤٣ وما يليها؛ أنظر كذلك: *La Collection mathématique*, traduit par P. Ver Eecke, 2 vol. (Paris, 1982)، المجلّد الثاني، ص. ٧١٨؛ انظر أيضاً: A. Jones, *Pappus of Alexandria*, Book 7 of the Collection، ص. ٢٩٦ وما يليها؛]. هذه المقدّمات كبيرة الأهمّيّة، بداهة، لكتابة تاريخ التقليد النصّي لمقالات "المخروطات" الأربع الأولى [انظر: M. Decorps-Foulquier, *Les Coniques d'Apollonius de Perge*، (أطروحة جامعة ليلّ ١٩٩٤) ص. ٥١ وما يليها، وهي منشورة تحت عنوان *Recherches sur les* Coniques *d'Apollonios de Perge* (باريس ٢٠٠٠)، ص. ٥٢-٥٩ وَ ٢٣٧-٢٦٥]. وهذه المقدّمات مكرّسة في أغلبيّتها لسدّ نقص ضمن برهان أبلونيوس، أي لتعويض قفزة في التحرير قام بها هذا الأخير عن قصد. ويستطيع القارئ المطّلع كما يجب على "كتاب الأصول"، أن يُعوّض تماماً، وحده، هذه القفزة في البرهان.

المُمكِنة لبابوس بالمقالة الثامنة من "المخروطات"؛ كما أنــّـه لا يُمكن، كما يبدو، أن نجد حلاً لهذه المسألة عبر الاستعانة بتاريخ النصّ.

تبقى لدينا طريقة أخرى لتوضيح الأمور، وهي أن نقارن بين المقدِّمات وقضايا أبلونيوس الواردة في المقالة السابعة التي وصلت إلينا. ليست هذه الطريقة سهلة، كما يبدو لأوّل وهلة، وليست، من جهة أخرى، حاسمة. نحن نعلم استناداً إلى هايبرغ (*Heiberg*) أنَّ مُقدِّمات بابوس، لمقالات كتاب "المخروطات" الثلاث الأولى نفسها الموجودة باللغة اليونانية، ليست مفيدة أبداً لإعادة كتابة القضايا. وهذا الوضع لا يَخُصُّ فقط كتاب "المخروطات" بل إنــّـه ناتِجٌ من أسلوب بابوس في التحرير. ولقد عانى ب. تانــّيري (*P. Tannery*) صعوبة مُشابِهة في كتاب أبلونيوس "الأمكنة المُستوية" (*Lieux Plans*). أمّا الصعوبة الثانية، فهي ناتجة من فقدان المقالة السابعة في اللغة اليونانية، وهذا ما يحرمنا من استخدام وسائل دراسة النصوص وانتقالها. أما المقالة الثامنة فليس لها أثر في أيّة لغة، وهذا ما يجعل الوضعَ ملائماً لتوليد الأساطير. ولنبدأ الآن، بعد أن تنبَّهنا إلى هذه المشاكل، بتفحُّص هذه المقدِّمات لبابوس؛ لعلّنا نجد فيها الجواب عن معرفته الممكنة بالمقالة الثامنة.

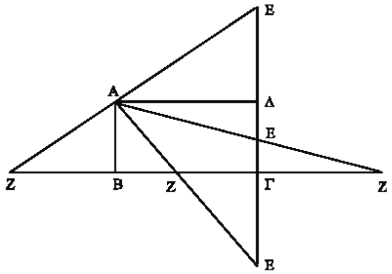
يتعلّق الأمر بمجموعة، من أربع عشرة مقدِّمة، مُخصَّصة للمقالتين السابعة والثامنة. لا يُشير بابوس، كما قلنا سابقاً، إلى الموضع الذي تبدأ فيه، ولا إلى الموضع الذي تنتهي فيه المقدِّمات الخاصّة بالمقالة السابعة. وهذا ما يجعلنا في جهل تامّ لعدد القضايا التي قد أمكنه الاطلاع عليها في المقالة الثامنة. يبقى علينا، إذاً، أن نعزل القضايا الخاصّة بالمقالة السابعة.

يدرس بابوس في المقدِّمتين الأوليَيْن، من هذه المجموعة التي تحتوي على أربع عشرة مُقدِّمة، حالتين خاصّتين بقضيّة واحدة. قد تخصُّ هاتان المقدِّمتان، لأوّل وهلة، القضيّة الخامسة من المقالة السابعة من "المخروطات"؛ ولكنَّ التفحُّصَ الحذِرَ يُظهِر وضعاً أكثر تعقيداً. وذلك أنَّ هناك، في الواقع، حالة ثالثة، لم يُشِر إليها بابوس مطلقاً، تخصُّ

القضيّة[٧] الخامسة من المقالة السابعة. كما أنـــّا، إذا طبّقناها، نحصل على مبرهنة فيثاغوروس ونستنتج عندئذ النتيجة المطلوبة. تختلف الطريقة المتــّبعة إذاً عن طريقة أبلونيوس. ولكن، فلنبدأ ببرهنة هذه الأقوال.

يُدخِل بابوس في المقدّمتين مستطيلاً هو $AB\Gamma\Delta$ وخطّاً خارجاً من A، مارّاً داخل المستطيل في المقدّمة الأولى، ومارّاً بكامله خارج المستطيل في المقدّمة الثانية. يُبيِّن بابوس أنّ :

$$AE.AZ = \Delta E.\,\Delta\Gamma + BZ.B\Gamma \qquad (١)$$



الشكل ١

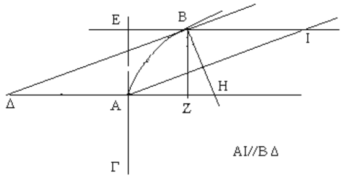
يُمكِن أن نُحدِّدَ وضعيّة الخطّ بنقطة تقاطعه E مع الخطّ $\Delta\Gamma$، ويُمكن أن نحصل على الحالات التالية للشكل:

١- E بين Δ وَ Γ؛ فتكون Z عندئذ بعد Γ على الخطّ $B\Gamma$.

٢- E بعد Γ ؛ فتكون Z عندئذ بين B وَ Γ ، وهذا ما يتوافق مع شكل المقدّمة الأولى لبابوس.

---

[٧] تقول هذه القضيّة: فليكن $\mathcal{P}$ قطعاً مكافئاً محوره AH ورأسه A، وليكن BI قطراً من أقطاره وَ $c = A\Gamma$ ضلعه القائم للمحور، وليكن BZ عموديّاً على AH. فأقول إنّ الضلع القائم للقطر $B\Gamma$ هو c_1، حيث إنّ $c_1 = A\Gamma + 4AZ$. انظر الشكل التالي:



٣- E بعد Δ ؛ فتكون Z عندئذ بعد B ، وهذا ما يتوافق مع شكل المقدّمة الثانية لبابوس.

وهكذا يكون معنا، للخطّ الخارج من A، ثلاث حالات للشكل نقوم فيها بنفس الاستدلال ونحصل فيها على نفس النتيجة المُمَثــَّلة بالمعادلة (١).

الحالة الأولى للشكل- E بين Δ وَ Γ – غير موجودة في نصّ بابوس، بالرغم من أنـــَّها تتوافق مع شكل القضيّة الخامسة من المقالة السابعة لأبلونيوس حيث تكون E في وسط $\Gamma\Delta$. ولكنه من الممكن أن نعالج هذه القضيّة الخامسة باستخدام مقدّمة بابوس، بطريقتين مُختلفتين بدون إدخال العمود BH الذي يُستخدَم في طريقة أبلونيوس. ولكنّ الاستدلال يكون عندئذ مختلفاً عن استدلال أبلونيوس (انظر شكل القضيّة الخامسة من المقالة السابعة من كتاب "المخروطات").

يُمكننا بالفعل أن نتناول:

ا) المستطيل $AEBZ$ وكذلك الخطّ $B\Delta$ المماسّ في النقطة B للقطع المكافئ والخارج من رأس المستطيل B.

ب) المستطيل $AEBZ$ وكذلك الخطّ AI الخارج من رأس المستطيل A والموازي للخطّ $B\Delta$. يكون الخطّ AI عندئذ الإحداثيّة الثانية (العمودية) للنقطة A بالنسبة إلى القطر BI، ويكون معنا $AI = B\Delta$ ؛ وتـــُعطينا مقدّمة بابوس:

ا) $E\Theta.EA + ZA.Z\Delta = B\Theta.B\Delta$ ، ب) $AT.AI = EB.EI + ZT.ZB$

ولكن، وفقاً للقضية ٣٥ من المقالة الأولى، تكون النقطة A في وسط $Z\Delta$؛ فتكون Θ أيضاً في وسط $B\Delta$ وَ T في وسط ZB. يتعلّق الأمر إذاً في ا) وفي ب) بحالة خاصّة من مقدّمة بابوس:

ا) $B\Delta^2 = EA^2 + Z\Delta^2 \Leftarrow B\Delta^2 = BZ^2 + Z\Delta^2$

ب) $AI^2 = EI^2 + ZB^2 \Leftarrow AI^2 = EI^2 + EA^2$ ؛

وهذا يرجع إلى تطبيق مبرهنة فيثاغوروس على المثلّث $B\Delta Z$ في الحالة ا) وعلى المثلّث AEI في الحالة ب)؛ وهذه النتائج يُمكن الحصول عليها بدون استخدام مُقدّمة بابوس.

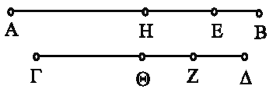
فإذا رمزنا فعلاً بـِ c_0 إلى الضلع القائم الخاصّ بالمحور AZ و بـِ c إلى الضلع القائم الخاصّ بالقطر IB ، يكون معنا:

$c.AZ = c . A\Delta = c. BI = AI^2 = B\Delta^2$ ، $c_0.AZ = EA^2 = BZ^2$ ، $4.AZ^2 = EI^2 = Z\Delta^2$ ؛

فنستنتج إذاً من ا) وَ ب) أنّ : $4.AZ^2 + AZ . c_0 = c . AZ$ ، فيكون $4.AZ + c_0 = c$.

تـــبيِّن هذه المناقشة، الطويلة قليلاً، أنَّ التوافق، بين المقدّمتين الأولـــيَيْن لبابوس والقضيّة الخامسة من المقالة السابعة، ضعيف إلى درجة بحيث لا يُمكن لأحدٍ أن يُحدّد نصَّ القضية أو مُحتواها استناداً إلى المقدّمتين فقط، إذا لم يكن مُطَّلِعاً عليها سابقاً. إنَّ هذا الغموض يمنعنا من أن نقول، إذا التزمنا بالدقـــّة، إنَّ المقدّمة هي مقدّمة القضيَّة. كلُّ ما يُمكن قوله هو أنَّ بابوس استند إلى شكل القضيَّة الخامسة من المقالة السابعة أو على شكل مشابه له ليُبرهن علاقة متريّة عامَّة مُعادِلة لمبرهنة فيثاغوروس في حالة أبلونيوس.

تسمح المقدّمة الثالثة – وتكون المقدّمة الرابعة حالة خاصَّة لها– بإقامة البرهان الخاصّ بمجموع القطرين المزدوجين لقطع زائدٍ؛ وهذا هو غرض القضيَّة ٢٥ من المقالة السابعة. وإذا طبّقنا فرضيّة المقدّمة الثالثة على قطرين مزدوجين لقطع زائد، نحصل على الخاصَّة المُثْبَتة في القضيّة ١٣ من المقالة السابعة[٨]. فلنَتَبَنَّ إذاً هذه الفرضيَّة، فنحصل على نتيجة المقدّمة الثالثة التي تعطينا نتيجة القضيَّة ٢٥. لم يُشِر أبلونيوس، من جهة أخرى، إلى الحالة الخاصَّة التي يُمكن أن نستخرجها من المقدّمة الرابعة. لِنُبَسِّط قليلاً هذه الأقوال.



الشكل ٢

يفرض بابوس في المقدّمة الثالثة أنّ: $AB > \Delta\Gamma$ ، $AH = HB$ ، $\Gamma\Theta = \Theta\Delta$؛ ويأخذ $E \in [HB]$ ، $Z \in [\Theta\Delta]$ بحيث يكون $AE.EB = \Gamma Z. \Delta Z \Leftarrow AE > \Gamma Z$.

---

[٨] يقول أبلونيوس "كلّ قطع زائد، فإنّ فضل ما بين مربّعي سهميه مساوٍ لفضل ما بين مربّعيْ كلّ قطرين مزدوجين من أقطاره الباقية، أيّ قطرين كانا.

تدرس القضيَّة ٢٥ من المقالة السابعة مجموع قطرين مزدوجين لقطع زائدٍ.

لنأخذ زوجاً من قطرين مزدوجين: (d_1, d'_1) وَ (d_2, d'_2) ؛ نحن نعلم أنَّ $d_1 > d'_1$ وأنَّ $d_2 > d'_2$ أيضاً.

لنفرض أنَّ $d_2 > d_1 > d'_1$ ولنضع $d_2 = HB = AH$ و $d'_2 = HE$ ، $d_1 = \Theta\Delta = \Gamma\Theta$ وَ $d'_1 = \Theta Z$؛ فنحصل على :

$$AE.EB = \Gamma Z.Z\Delta \Leftrightarrow HA^2 - HE^2 = \Theta\Gamma^2 - \Theta Z^2 \Leftrightarrow d_2^2 - d_2'^2 = d_1^2 - d_1'^2$$

وهذا ما يتوافق مع نتيجة القضية ١٣ من المقالة السابعة. يكون معنا:

$$AE.EB = \Gamma Z.\Delta Z \Rightarrow AE > \Gamma Z،$$

ولكنَّ $d_2 + d'_2 = AE$ و $d_1 + d'_1 = \Gamma Z$ ، فيكون معنا إذاً: $d_1 + d'_1 > d_2 + d'_2$.

ليكن d'_0 وَ d_0 محورَي القطع الزائد؛ يكون معنا $d_1 > d_0$ ، فيكون إذاً: $d_1 + d'_1 > d_0 + d'_0$،

فيكون بالتالي: $d_0 + d'_0 < d_1 + d'_1 < d_2 + d'_2$.

يفترض بابوس في المقدِّمة الرابعة أنَّ $AH = \Gamma\Theta$، فيكون معنا في هذه الحالة:

$$AE.EB = \Gamma Z.Z\Delta \Rightarrow AE = \Gamma Z .$$

يكون القطران، d_1 وَ d_2، في قطع زائد متساويين إذا كانا متناظرين بالنسبة إلى أحد المحورين، فيكون القطران المزدوجان معهما متناظرين أيضاً؛ فيكون معنا: $d'_2 = d'_1$، فينتج من ذلك أنَّ: $d_1 + d'_1 = d_2 + d'_2$.

يكون معنا: $AH = \Theta\Gamma \Rightarrow AE = \Gamma Z \Leftrightarrow d_1 = d_2 \Rightarrow d_1 + d'_1 = d_2 + d'_2$.

لم يُشِر أبلونيوس إلى هذه الحالة الخاصَّة.

ولنلاحظ أخيراً أنـــَّه لو كان معنا $d_1 < d'_1$ لحصلنا أيضاً على $d_2 < d'_2$. نستطيع في هذه الحالة أن نُطبِّقَ المقدِّمة الثالثة واضعين $d'_2 = HB = AH$ وَ $d_2 = HE$ ، $\Gamma\Theta = \Theta\Delta = d'_1$ وَ $d_1 = OZ$. فنحصل عندئذ على: $AE.EB = \Gamma Z.Z\Delta \Leftrightarrow d_2'^2 - d_2^2 = d_1'^2 - d_1^2$،

ويُمكن أن ننهي البرهان بنفس الطريقة.

وهكذا حدَّدنا الشروط التي تجعل المقدّمتين الثالثة والرابعة مُقدّمتين للقضيَّة ٢٥[٩] من المقالة السابعة من "المخروطات". الشرط الأوّل هو استخدام القضيّة ١٣ من المقالة السابعة، وهذا ما لم يُشِرِ بابوس قطّ إليه. والشرطُ الثاني، إذا أردنا الكلام على توافق حقيقيّ بين المقدّمات والقضايا، هو أن يوجَدَ نصّ لكتاب "المخروطات" حيث يكون أبلونيوس قد عالج فيه الحالة الخاصَّة بالمقدِّمة الرابعة، أي حالة التناظر بالنسبة إلى المحورين. ولكنَّ هذا النصَّ غير موجود، إلا إذا دخلنا ميدان التخمينات التي تفرض وجود نصٍّ، بين يديْ بابوس لكتاب "المخروطات"، مختلف عن النصّ الموجود لدينا. ولكن يبقى من المستحيل أن نبرهن أنَّ بابوس يستند بالفعل إلى قضيّة أبلونيوس، حتّـــى لو كان احتمالُ ذلك غيرَ معدوم.

ونجد أنفسنا مع مقدِّمة بابوس الخامسة في وضع غامض مشابِه. يُمكن أن نستنتج أنَّ هذه المقدّمة كانت مُخصَّصة للقضية ٢٧، من المقالة السابعة، المتعلّقة بالقطع الناقص. ولكنَّ أبلونيوس لا يُبرهن فيها شيئاً؛ فهو يكتب: "وقد تبيَّن أنَّ ذلك في القطع الناقص على ما قلنا في الشكل كــد من هذه المقالة"[١٠]، بفضل القضيَّة ٢٤ من المقالة السابعة. إذا سلّمنا، إذاً، بأنَّ المقدَّمة الخامسة مُخصَّصة لهذه القضيَّة، فإنَّــه يتوجَّب علينا أن نُسلّم أيضاً أنَّ هذه القضيَّة نفسها تسمح باستخراج برهان لم يُعطِه أبلونيوس قطٌّ.

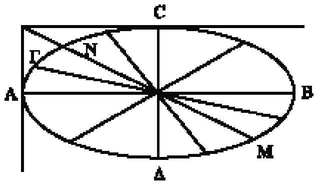
يُمكننا، بالفعل، إعادة كتابة المقدَّمة الخامسة لبابوس. ليكن معنا أربعة خطوط أطوالها بالترتيب a، b ، c، d، مع: $a>b$، $d>c$ ، $a>c$ وَ $b>d$؛ فنحصل على: $a-c>b-d$.

لنتناول القضيَّة ٢٧ من المقالة السابعة. ليكن AB وَ CD محوريْ القطع الناقص، $AB = d_0$ ، $CD = d'_0$ مع $d_0 > d'_0$. ليكن NM القطر الذي يُساوي القطر المزدوج معه، وليكن $\Delta\Gamma$ قطراً اختيارياً. لنضع $d = \Delta\Gamma$؛ وليكن d' القطر المزدوج مع d.

---

[٩] "كلّ قطع زائد، فإنّ الخطّ المساوي لسهميه أصغر من الخط المساوي لقطرين آخرين مزدوجين من أقطاره، أيّ قطرين كانا، والخط المساوي لما قرب من الأقطار المجانبة من السهم الأطول مع القطر المزدوج معه أصغر من الخط المساوي لما بعد من الأقطار المجانبة عن السهم الأطول مع القطر المزدوج معه.

[١٠] انظر: أبلونيوس، *Les Coniques d'Apollonius de Perge, trad. Ver Eecke* ، ص. ٥٨٨.



الشكل ٣

- إذا كان Γ على القوس $\widehat{AN}$، يكون معنا: $d_0 > d > d' > d'_0$.

تعطي المقدّمة الخامسة: $d_0 - d'_0 > d - d'$.

- إذا كانت النقطة Γ على القوس $\widehat{NC}$، يكون معنا $d' > d$ ؛ فيكون إذاً: $d_0 > d' > d > d'_0$،

فتعطينا المقدّمة الخامسة عندئذ: $d_0 - d'_0 > d' - d$.

- إذا كانت Γ في النقطة N، يكون معنا: $d = d'$، $d - d' = 0$. فتكون النتيجة العامة إذاً

$d_0 - d'_0 > |d - d'|$؛

يتعلّق الأمر ببرهان مستقلٍ للقضيّة ٢٤ من المقالة السابعة.

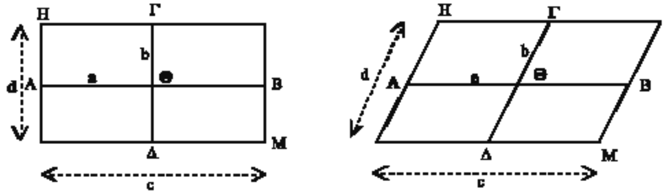
إنّ القول بأنّ المقدّمة الخامسة هي مقدّمة للقضيّة ٢٧ من المقالة السابعة يفترض إذاً أنّ بابوس، لسبب غير معروف، لم يرَ أنّ هذه القضيّة بديهية استناداً إلى القضيّة ٢٤ من المقالة السابعة، أو أنّــه أراد ببساطة أن يستخرِج علاقة مترية، في وضع القضية ٢٧ من المقالة السابعة، مستقلّة عن هذه الأخيرة. ليس هناك أيّة حُجّة نصيّة لدعم إحدى هاتين الإمكانيتين، وهذا ما يجعلنا، على هذا النحو، أمام مُقدّمة لا ضرورة لها، غير ذات أهمّيّة وغير ذات موضوع.

المقدّمة السادسة تـُعطي نتيجة خاصّة بمستطيلين متشابهين؛ وهي، أيضاً، غير ذات أهمّيّة. تقول هذه النتيجة: إذا كانت نسبة التشابه مساوية لـ ٢، فإنّ نسبة المساحتين مساوية لـ ٤. يُدخِل بابوس أربعة خطوط أطوالها بالترتيب a، b، c وَ d ، بحيث يكون $2a = c$، $2b = d$ ، ويُبيّن أنّ $4\,a\,.\,b = c\,.\,d$.

لا يُبرهن بابوس هذه النتيجة في الحالة البديهية لمتوازيَيْ الأضلاع ولا في الحالة العامّة. ولكنّــنا نلقى، في القضيّة ٣١ التي يُمكن أن ندرس هذه المقدّمة استناداً إليها ،

حالة المستطيل المُحدَّد بواسطة مِحورَي القطع الناقص، وحالة متوازي الأضلاع المُحَدَّد بواسطة القطرين المزدوجين. نورد فيما يلي نصّ أبلونيوس:

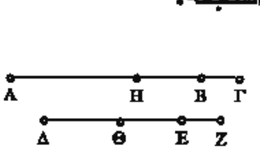
وأربعة أمثال سطح، ط ح (HΘ)، الذي هو سطح ح م (MH) ، مساوٍ لأربعة أمثال سطح اط في ط ح، (AΘ في ΘΓ)، الذي هو مثل السطح القائم الزوايا الذي يحيط به سهما اب جـد، (AB وَ ΔΓ)[11].



الشكل ٤

لو كانت المقدّمة السادسة مُخصصّــصة، إذاً، للقضيّة ٣١ من المقالة السابعة، لأخطأت هدفها جزئيّاً.

تُــعالج المقدّمات، ذات الأرقام ٧ و ٩ وَ ١١، قِسَماً متشابهة، وهو موضوع غير وارد في المقالة السابعة. والمقدّمة التاسعة هي، فضلاً عن ذلك، حالة خاصّة من المقدّمة السابعة؛ والمقدّمة الحادية عشرة هي عكس المقدّمة التاسعة. والمقدّمتان الثامنة والعاشرة مُدخلَتان، بدون سبب، على التوالي، بين السابعة والتاسعة وبين التاسعة والحادية عشرة؛ كما أنــّهما تــُؤدّيان إلى خواصّ ليس لها أيّة أهميّة. وهذا يعني أننا لا نرى أيّ استخدام مُحتمَل للمقدّمتين الثامنة والعاشرة، كما لا نرى السبب الذي وُضِعتا من أجله في موضعيهما. لنتناول مثالَ المقدّمة السابعة.



الشكل ٥

[11] انظر: أبلونيوس، *Les Coniques d'Apollonius de Perge, trad. Ver Eecke*، ص. ٥٩٤.

لنفرض أنَّ: $\frac{\Delta E}{EZ}=\frac{AB}{B\Gamma}$ وَ $\frac{\Delta E}{E\Theta}=\frac{AB}{BH}$ ؛

يكون معنا:

(١) $k=\frac{E\Theta}{BH}=\frac{EZ}{B\Gamma}=\frac{\Delta E}{AB}$ ؛

فتكون (A, H, B, Γ) وَ (Δ, Θ, E, Z) قسمتين متشابهتين. نستخرِج من (١):

(٢) $k=\frac{\Theta Z}{H\Gamma}=\frac{\Delta\Theta}{AH}$.

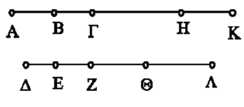
ولكن (١) ⇐ $k^2=\frac{\Delta E.E\Theta}{AB.BH}$ وَ (٢) ⇐ $k^2=\frac{\Delta\Theta.\Theta Z}{AH.H\Gamma}$، فنستنتج أنَّ: $\frac{\Delta E.E\Theta}{AB.BH}=\frac{\Delta\Theta.\Theta Z}{AH.H\Gamma}$.

النقطة B هي منتصف الخطّ $A\Gamma$، في المقدّمة التاسعة، والنقطة E هي منتصف $Z\Delta$، أيْ أنَّ $BA=B\Gamma$ وَ $EZ=\Delta E$؛ ويكون معنا بالإضافة إلى ذلك $\frac{EZ}{E\Theta}=\frac{B\Gamma}{BH}$. ونُبيِّن أنَّ: $\frac{\Theta\Delta.\Theta E}{ZE.Z\Theta}=\frac{HA.HB}{\Gamma B.\Gamma H}$.

وهكذا يتعلّق الأمر بحالة خاصّة من المقدّمة السابعة.

المقدّمة الحادية عشرة هي المقدمة العكسية للمقدّمة التاسعة؛ وهي تُكتَب على الشكل التالي: ($BA=B\Gamma$ وَ $EZ=\Delta E$ وَ $\frac{\Theta\Delta.\Theta E}{ZE.Z\Theta}=\frac{HA.HB}{\Gamma B.\Gamma H}$) ⇐ $\frac{EZ}{E\Theta}=\frac{B\Gamma}{BH}$

⇐ $k=\frac{E\Theta}{BH}=\frac{EZ}{B\Gamma}=\frac{\Delta E}{AB}$



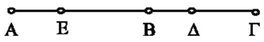
الشكل ٦

يُمكن، في المقدّمة التاسعة أن نكتب المعادلة (١) الواردة في المقدّمة السابعة، فيكون البرهان مباشراً. يتمُّ، في المقدّمة ١١، إدخال نقطة K على الخطّ AB ونقطة L على الخطّ DE، بحيث تكون (A, B, Γ, K) وَ $(\Delta, Z, \Theta, \Lambda)$ قسمتين متشابهتين.

ونستنتج من ذلك أنَّ القسمتين (A, B, Γ, H) وَ (Δ, E, Z, Θ) متشابهتان أيضاً.

المقدّمة الثامنة المُدخَلَة بين المقدّمتين السابعة والتاسعة، تعني أنَّ $AB^2 + B\Gamma^2$ وَ $AB^2 - B\Gamma^2$ معلومتان، فيكون الخطّان AB وَ $B\Gamma$ معلومين.

المقدّمة العاشرة، المُدخَلَة بين المقدّمتين التاسعة والحادية عشرة، تُكتب كما يلي:
إذا كان $B\Gamma = AB$ وَ $BE > B\Delta$، يكون عندئذ $\frac{\Gamma E.EB}{BA.AE} < \frac{A\Delta.\Delta B}{B\Gamma.\Gamma\Delta}$.



الشكل ٧

ونحن لا نرى لماذا أدخِلَت المقدّمتان الثامنة والعاشرة، اللتان تؤدّيان إلى نتائج بديهية، بين مقدّمتين خاصّتين بالقِسَم المتشابهة. فلنضع جانباً هاتين المقدّمتين ولنتناول كلّ المقدّمات ذات الأرقام: ٩، ١١، ١٢، ١٣وَ ١٤. نُلاحظ أنـه يُستخدَم فيها كلّها خطّان ووسطاهما – $A\Gamma$ ذو الوسط B وَ ΔZ ذو الوسط E – ونقطة H، على الخطّ $A\Gamma$، ونقطة Θ على الخطّ ΔZ. وتُدرَس في المقدّمتين التاسعة والحادية عشرة قِسَم متشابهة أي مجموعة من النسَب المتساوية. وتُعالِج المقدّمات ١٢، ١٣ وَ ١٤، في الفرضيّات والنتائج، نسباً غيرَ متساوية. وهكذا نجد استناداً إلى فرضيّات المقدّمة التاسعة:

$ZE = E\Delta$ وَ $B\Gamma = AB$، $k = \frac{\Delta\Theta}{AH} = \frac{Z\Theta}{\Gamma H} = \frac{E\Theta}{BH} = \frac{EZ}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{AB}$.

(٥) (٤) (٣) (٢) (١)

١٢) إذا كان $ZE = E\Delta$ وَ $B\Gamma = AB$ وَ $\frac{Z\Theta}{\Gamma H} > \frac{EZ}{B\Gamma}$، يكون $\frac{\Delta\Theta}{AH} < \frac{EZ}{B\Gamma}$ عندما تكون H بين B وَ Γ وَ Θ بين E وَ Z، أو $\frac{\Delta\Theta}{AH} > \frac{EZ}{B\Gamma}$ عندما تكون H ما بعد Γ وَ Θ ما بعد Z.

وهذا يعني، مع فرضيّات المقدّمة التاسعة ومع الفرضيّة (٢) < (٤)، أنّ (٥) < (٢) أو (٥) > (٢)، وفقاً لموضع H.

١٣) إذا كان $ZE = E\Delta$ وَ $AB = B\Gamma$ وَ $\frac{\Theta E}{HB} < \frac{\Delta\Theta}{AH}$، يكون $\frac{EZ}{B\Gamma} < \frac{Z\Theta}{\Gamma H}$ عندما تكون H ما بعد Γ وَ Θ ما بعد Z، أو $\frac{EZ}{B\Gamma} > \frac{\Delta\Theta}{AH}$ عندما تكون H بعد Γ وَ Θ بعد Z.

وهذا يعني، مع فرضيّات المقدّمة التاسعة ومع الفرضيّة (٥) < (٣)، أنّ (٢) < (٤).

١٤) إذا كانت معنا هذه الفرضيّات نفسها، يكون $\frac{E\Theta}{BH} < \frac{Z\Theta}{\Gamma H}$ عندما تكون H بين B وَ Γ وَ Θ بين E وَ Z.

وهكذا انتهينا من تلخيص المقدّمات الثماني التي من بينها ثلاث مقدّمات تُـعالِج القِسَم المتشابهة، ومقدّمتان بديهيّتان، وثلاث مقدّمات تعالج القِسَم مع نسب غير متساوية. وتستخدِم خمس من هذه المقدّمات خطّين مع وسطيهما. ونحن نعرف أنّ هذين الخطّين يخصّان قطري قطع مخروطيّ عندما يكون لهما وسط مشترَك. ولكن لا يوجَد في المقالة السابعة من كتاب "المخروطات" ، على ما يبدو – إذا لم نُخطئ في حُكمنا – أيّة قضيّة يُمكن أن نطبّق فيها إحدى هذه المقدّمات. يُمكن أن نجِد لهذه المقدّمات تطبيقاً، إذا أخذنا مثلاً، خطوطَ التماس ونقاطَ تقاطعها مع أقطار لا تمرُّ بنقطة التماس مع القطع المخروطي. ولكنّ هذا لا يذهب بنا بعيداً في حلّ المسألة.

لنـلُخـِّص ما تقدّم: يُبيِّن لنا تفحُّص المقدّمات الستّ الأولى أنـّه إذا أمكن رؤية توافق – بين السطور على أكثر تقدير – لها مع بعض قضايا المقالة السابعة من كتاب "المخروطات"، فإنّ هذا التوافق ضعيف وهشّ : إنّ حالة القضية الخامسة من المقالة السابعة، نفسها، لم ترد في المقدّمتين الأولَيَيْن؛ وحتّى إذا استغنينا عنها، فإنّ تطبيق المقدّمة الأولى كما رأينا يُعطي مبرهنة فيثاغوروس! والمقدّمة الثالثة لا تُـساعِد في برهنة القضيّة ٢٥ من المقالة السابعة إلا باستخدام القضية ١٣، وهذا ما لم تتمّ الإشارة إليه؛ أمّا المقدّمة الخامسة فهي ملائمة لبرهنة القضيّة ٢٧ من المقالة السابعة، مع العلم بأنّ أبلونيوس لم يُعطِ هذا البرهان؛ والمقدّمة السادسة لا تكفي لبرهنة القضيّة ٣١ من المقالة السابعة لأنـّها لا تـُعالِج حالة متوازي الأضلاع. لا يبدو، حسب ما رأينا أعلاه، أنّ

هناك، ابتداء من المقدّمة السابعة، أيّ توافق حتــّى بين السطور مع قضايا المقالة السابعة. لا يُمكن لهذه المقدّمات أن تكون قد ابتــُكرت كمراحل في برهان أبلونيوس، ولكنها تبدو كشروح أو كإضافات مستَخرَجة من نظرية المخروطات بحيث لا تحتفظ إلا بالعلاقات المترية. ولا يُمكن لنا، استناداً إلى هذه الدلائل، أن نستنتج شيئاً حول معرفة بابوس المُمكنة بالمقالة الثامنة من "المخروطات".

قد يكون من المغامرة على أقلّ تقدير، في ظلّ هذا الغموض الذي يصل إلى حدّ الشكّ، أن نــُصدر حكماً حاسماً حول التوافق بين المقدّمات والقضايا. لا شيء يُبرِّر، والحالة هذه، أن نرسم خطّاً فاصلاً بين المقدّمات يمرُّ بين المقدّمتين السادسة والسابعة، للتمييز بين ما هو مُخصَّص لكل من المقالتين الأخيرتين لكتاب " المخروطات". إنّ إعادة إنشاء المقالة المفقودة من قِبَل هالي أ. (*Halley E.*) سنة ١٧١٠ لا يُمكِن إلا أنّ تكون تخميناً خالصاً ومجرّدة من أيّ اعتبار تاريخيّ. وتــُضاف إلى الحجج السابقة حججٌ أخرى تدفعنا إلى مضاعفة الحذر.

الحجّة الأولى تخصُّ نسخة "المخروطات" التي عرفها بابوس. يكتب هذا الأخير:

"تتضمَّن المقالات الثماني لكتاب "المخروطات" لأبلونيوس، أربع مئة وسبعة وثمانين مبرهنة وشكلاً وسبعين مقدّمة"[١٢].

وإذا حسبنا عدد قضايا المقالات السبع الموجودة لدينا وفقاً لنسخة أوطوقيوس المتمّمة بالترجمة العربية، نجد فرقاً يُقَدَّر بمائة قضيّة. فلو كان بابوس مطلعاً على المقالة الثامنة من "المخروطات" ولو كان هذا الحساب صحيحاً، مع بقاء الشروط الأخرى بدون تغيير، لتضمَّنت المقالة الثامنة مائة قضيَّة. وهذا ما قد يُثير الدهشة، إذ إنّ أبلونيوس لم يتجاوز في المقالات الأخرى – بما فيها المقالة الخامسة التي هي الأكبر حجماً إلى حدٍّ بعيد – ٧٨ قضيّة. كان يُمكن لبابوس أو لشارح آخر أن يُلاحظ على الأقلّ هذه الغَرابة؛ ولكنّ هذا لم

[١٢] انظر: بابوس، المجموعة الرياضية، المقالة السابعة، نشرة هولتش (*Hultsch*)، المجلد الثاني، ص. ٦٨٢، س. ٢١-٢٣(ترجمة ب. فير إيك (*P. Ver Eecke*)، المجلد الثاني، ص. ٥١٢):

Ἔχει δὲ τὰ η΄ βιβλία τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν θεωρήματα, ἤτοι διαγράμματα υπζ΄,
λήμματα δὲ ἤτοι λαμβανόμενά ἐστιν εἰς αὐτὰ ο΄.

يحدث. يُمكِن أن نعطي عدة تفسيرات لورود هذا العدد: خطأ من النسّاخ، نصّ مدسوس على قضايا أبلونيوس ليصبح عددها مساوياً للعدد المذكور، نسخة مُختلفة عن النسخة التي وصلت إلينا... أمّا المقدّمات السبعون فيمكن أن تكون المقدّمات الواردة في نسخة "المخروطات" التي كانت بين يدي بابوس أو المقدّمات الاثنتين والسبعين الموجودة في "المجموعة الرياضية" التي ألّفها بابوس.

والحجَّة الثانية تــُرجعنا إلى طبيعة هذه المقدّمات. لم نفهم بما فيه الكفاية المغزى الخاصّ لمقدّمات بابوس المكرَّسة لمقالات كتاب "المخروطات". إنــّها ليست مقدّمات مُبتــكَرة كمراحل مُهمَلة من قِبَل أبلونيوس، بل كنوع من الشروح المضافة على النصّ. يُقدِّم بابوس في أغلَب المُقدّمات شروحاً مُستخرَجة من نظرية المخروطات بحيث لا تحتفظ إلا بالعلاقات المترية. يتعلّق الأمر إذاً بشروح لعلاقات واردة ضمن براهين أبلونيوس وبشروح لخواصّ معزولة مكرَّسة في أغلب الأحيان لتأكيد خاصة مترية. وهكذا لم يبق شيء تقريباً من خواصّ القطوع المخروطية. وقد يكون هذا السببَ الرئيسيَّ للصعوبة التي نلقاها عندما نريد أن نُثبت بعض التوافق بين مقدّمات بابوس وقضايا أبلونيوس.

والحجَّة الثالثة تــُرجِعنا إلى مُحتوى المقدّمتين، السابعة والرابعة عشرة. ليس للمقدّمتين الثامنة والعاشرة أية أهمِّيَّة فحسب، بل إنــّهما لا تقدّمان أيَّة وسيلة لفهم دورهما أو سبب وضعهما من هذه الجهة من الخطّ الفاصل المزعوم. فالمقدِّمة الثامنة، على سبيل المثال، تــُخبرنا أنــّه إذا كان معنا مقداران a وَ b وإذا كان $a^2 + b^2$ وَ $a^2 - b^2$ معلومين، يكون عندئذ a وَ b معلومين. والمقدِّمة العاشرة، هي أيضاً، ليست ذات قيمة. لماذا وُضعت المقدّمة الثامنة بين المقدِّمة السابعة والمقدّمة التاسعة التي هي حالة خاصَّة من المقدّمة السابعة؟ كما لا نرى لماذا وُضِعت المقدّمة العاشرة، التي ليست ذات قيمة، بين المقدّمة التاسعة والمقدّمة الحادية عشرة التي هي المقدّمة العكسية للمقدّمة التاسعة.

ويجب أن نؤكدّ، بالإضافة إلى ذلك، أنَّ المقدّمات السابعة والتاسعة والحادية عشرة تتوافق، بدون أدنى شكّ، مع القضايا التي تعالج قِسَماً متشابهة وأنَّ مجموعة المقدّمات

ذات الأرقام ٧، ٩، ١١، ١٢، ١٣، وَ ١٤ يُمكن أن تُستَخدَم في بعض الحالات التي يُدرَس فيها قطران لقطع مخروطيّ.

مهما كانت الطريقة التي نتفحَّص بها شهادة بابوس، لا يُمكننا بشكل معقول، أي باحتمال كافٍ، أن نستخرِج منها معلومة مفيدة حول حالة كتاب "المخروطات" أو حول معرفة بابوس بالمقالة الثامنة؛ حتّى أنّه ليس هناك ما يجعلنا نؤكِّد أنَّ بابوس كان مطَّلِعاً على هذه المقالة بكاملها. فهل كان حقّاً على علم بها؟ أم كان مطَّلِعاً فقط على القضايا التي تُعالِج القِسَم المتشابهة؟ نحن نحتفظ، في أحسن الحالات، بهذا التخمين الأخير، بانتظار معلومات أوسع حول الموضوع. ونحن لا نأمل بالحصول على هذه المعلومات من شرح هيباثيا (*Hypatie*) المفقود ولا من كتاب سيرينوس أنطينوي (*Sérénus d'Antinoë*) ولا من أوطوقيوس نفسه. كلُّ شيء يوحي، مع الأسف، بأنَّ أهمَّ قسم من المقالة الثامنة من كتاب "المخروطات" قد فُقِد خلال القرون التي تفصل بين مؤلّفها وبين بابوس. ويأتي التقليد العربي لكتاب "المخروطات" ليؤكِّد مرّة أخرى هذه النتيجة.

إنَّ دور بني موسى، الإخوان الثلاثة، في البحث عن المخطوطات اليونانية وفي ترجمتها، معروفٌ جيِّداً. ولقد أوضِحَ هذا الدور بالإسهام الرياضيّ للحسن، الأخ الأصغر، هذا الإسهام الذي أصبح اليوم معروفاً أكثر مما كان في الماضي[13]. لقد كان لدى بني موسى، بالإضافة إلى نسخة أوطوقيوس للمقالات الأربع الأولى، نسخة أخرى تتضمَّن المقالات السبع الأولى من كتاب "المخروطات". كانوا إذاً على اطلاع على نسخة، منقولة قبل القرن التاسع الميلاديّ، من المقالات السبع الأولى من كتاب "المخروطات". وهذا، فيما يلي، ما كتبوه في رسالة على شكل مقدّمة لقراءة "المخروطات":

"وكان قد وقع إلينا سبع مقالات من الثماني المقالات التي وضعها أبلونيوس"[14].

ولقد أكَّد غياب المقالة الثامنة من كتاب "المخروطات" النديم، كاتب السِّيَر في القرن العاشر؛ فهو يكتب:

---

[13] انظر: المجلد الأوّل من هذه الموسوعة (بيروت ٢٠١١).
[14] انظر: مخطوطة إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، ورقة ٢٢٣ظ.

وقال بنو موسى: إنّ الكتاب ثمان مقالات والموجود منه سبع وبعض الثامنة. وترجم الأربع المقالات الأولى بين يدي أحمد بن موسى، هلال بن أبي هلال الحمصي، والثلاث الأواخر ثابت بن قرّة الحرّاني والذي يصاب من المقالة الثامنة أربعة أشكال[١٥].

لا يورِد النديم، بالطبع، كلام بني موسى حرفيّاً. وهؤلاء لا يُشيرون، ضمن نصوصهم الموجودة اليوم، إلى القضايا الأربع من المقالة الثامنة. ولكنّ هذا العدد دقيق بشكل كافٍ، وهذه الشهادة تحوي، من العناصر القابلة للتحقيق، ما يكفي لعدم إهمالها. لا يتحدَّث بنو موسى، بالفعل، إلا عن المقالات السبع. وهكذا تمكّـن أحمد بن موسى من الحصول على نسخة أوطوقيوس للمقالات الأربع الأولى، وكما كتبوا ذلك بأنفسهم[١٦]،

"فأمكنه بذلك فهم الثلاث المقالات الباقية من السبع المقالات"،

أو أيضاً:

"وكان المتولّي لترجمة الثلاث المقالات الباقية ثابت بن قرة الحرّاني المهندس".

وهكذا لم يتكلّم بنو موسى إلا عن المقالات السبع الأولى وليس هناك أثر عندهم لهذه الأشكال الأربعة من المقالة الثامنة. فمن أيّ مصدر استقى النديم هذا الخبر حول هذه القضايا الأربع من المقالة الثامنة؟ إنــّه لم يكن مطّلعاً مباشرة على التقليد اليوناني، فلذلك كان مستنداً إلى نصّ عربي؛ وقد يكون هذا النصّ مترجَماً من اليونانية. ولكن ليس لنا أيَّة فكرة عن هذا المصدر الذي لا شيء يؤكــِّد وجوده.

إنَّ كتــَّاب السِّيَر، وكذلك الرياضيين الذين خلفوا النديم، لم يضيفوا شيئاً مُهمّاً على ما قاله، باستثناء بعض الأصداء التي تُعبِّر عن الاهتمام الذي أثارته المقالة المفقودة. فالقفطي ينقل ما قاله النديم؛ ولكن يظهر من روايته أنَّ العلماء في نهاية القرن الثاني عشر وبداية القرن الثالث عشر، كانوا لا يزالون يبحثون عن هذه المقالة الثامنة:

"ولما أخرِجت الكتب من بلاد الروم إلى المأمون، أخرِج من هذا الكتاب الجزء الأوّل لا غير يشتمل على سبع مقالات. ولمّا ترجِمَ الكتاب، دلّت مقدّمته على أنــّه ثماني مقالات، وأنَّ المقالة الثامنة تشتمل على معاني المقالات السبع وزيادة واشترط فيها<أبلونيوس> شروطاً مفيدة وفوائد يُرْغَب فيها. وإلى يومنا هذا يبحث أهل هذا الشأن عن هذه المقالة فلا يطّلعون لها على خبر "[١٧]

---

[١٥] انظر: النديم، كتاب الفهرست، نشرة رضا تجدُد(طهران ١٩٧١)، ص. ٣٢٦.
[١٦] انظر : مخطوطة إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، ورقة ٢٢٤و.
[١٧] انظر: القفطي، تاريخ الحكماء، نشرة ج. ليبِّرت (ليبزغ، ١٩٠٣)، ص. ٦١.

لا يُضيف كتـــَّاب السِّيَر القدامى الآخرون شيئاً مهمَّاً على هذه الروايات. فهم يُعيدون أقوال بني موسى، وهي أنَّ المقالات السبع قد نـــُقِلَت وتــُـرجِمت إلى العربية.

لم يكن بين أيدي شُرَّاح كتاب "المخروطات" سوى المقالات السبع، وهم لا يُقدِّمون أيَّة معلومة عن المقالة الثامنة. وهذه هي حال نصير الدين الطوسي[18] والأصفهاني[19] والشيرازي[20] واليزدي[21]. أمَّا المغربي، فهو الوحيد الذي يقول بخصوص المقالة الثامنة:

أقول: أمَّا هذه المقالة فغير موجودة، بل وُجِد أشكالها بلا مصادرات، ولم تعلم التراجمة على ماذا تدلُّ من المسائل، فأهملوها، وبقي من الكتاب سبع مقالات[22].

إنـــَّـه من الواضح أنَّ المغربي لا يُقدِّم أيَّة معلومة قابلة للتحقيق باستثناء تلك القائلة بأنَّ المقالة الثامنة لم تترجَم إلى العربية. إنـــَّـه يكتفي بتقديم تخمين لتبرير غياب هذه المقالة.

يُمكننا إذاً أن نؤكـــِّد، بدون خشية من زلل، أنَّ أحداً من الرياضيِّين منذ القرن التاسع للميلاد لم يذكـــُر أيَّة قضيَّة من المقالة الثامنة، سواء أكان من شُرَّاح أو من قـــُـرّاء كتاب "المخروطات"، مثل ابن الهيثم أو ابن أبي جرادة. لم يُشر إلى هذه "الأشكال الأربعة" سوى النديم فقط. فهل روى ذلك عن مصدر منقول إلى العربية؟ يبدو، إذا أخذنا بعين الاعتبار كلَّ ما لدينا بالإضافة إلى التقليدين اليوناني والعربي، أنـــَّـه قد بقيت عدَّة قضايا(أشكال)، من المقالة الثامنة المفقودة، كان بابوس مطَّلِعاً عليها بوجه الاحتمال، كما كان صداها قد وصل بطريقة أو بأخرى إلى العربية. إنَّ العدد الصغير لهذه القضايا – الأربع وفقاً لابن النديم – يُفسِّر وجود الاختلافات التي تـــُميِّز أهم قسم من تاريخ هذه المقالة. والشيء الوحيد المؤكـــَّد، كما قلنا سابقاً، هو أنَّ المقالة الثامنة قد فـــُقدت، بكاملها أو بأكبر قسم منها، خلال القرون التي تفصل بابوس عن أبلونيوس.

---

[18] انظر : تحرير كتاب المخروطات، في المخطوطتين:
MS Dublin, Chester Beatty 3076; Londres, India Office 924.

[19] انظر: تلخيص المخروطات، مخطوطة أيا صوفيا ٢٧٢٤.

[20] انظر: أبو الحُسين عبد الملك بن محمّد الشيرازي، كتاب تصفُّح المخروطات، مخطوطة إسطنبول، أحمد ٣، ٣٤٦٣؛ جار الله ١٥٠٧؛ ينى جمي (*Yeni Cami 803*) ٨٠٣.

[21] انظر المخطوطة: *MS Edinburgh, Or. 28.*

[22] انظر: ابن أبي الشكر المغربي، شرح كتاب أبلونيوس في المخروطات، مخطوطة طهران، سبهسلر (*Sepahsalar*) ٥٥٦، ورقة ٢ظ.

ولكن يجب أيضاً أن نستوضح الأمور حول المحتوى المحتمَل لهذه المقالة الثامنة. نحن نقتصر، مرّة أخرى، على عدّة تخمينات. والتخمين الذي لقي قبولاً من أكثر المؤرِّخين هو الذي قدَّمه ت. هيث (*Th. Heath*) :

إنّ من المحتمَل بشكلٍ كافٍ أن تكون هذه المقالة حاوية على عدد من المسائل التي تهدف إلى إيجاد أقطار مزدوجة لقطع مخروطيّ على الشكل الذي حاول به هالّي أ.(*Halley E.*) إعادة كتابة هذه المقالة[٢٣].

لقد دعم هذا التخمينَ، نفسَه، مؤرِّخون بارزون، مثل ج. لوريا (*G. Loria*) وَ هـــ. ج. زويتن (*H.G. Zeuthen*)؛ غير أنـــّه لا يُشكِّل التخمين الوحيد الذي يُمكن تصوُّره. ويحُقُّ لنا أن ندافع عن رأي آخر مُختَلِف. لِنـــُذكـــِّر أوّلاً أنّ بابوس، في المقالة الرابعة من "المجموعة الرياضية" يُشير، كما يبدو، إلى أنّ مسألة تثليث الزاوية التي طُرِحت في القرن الرابع قبل الميلاد لم تجد حلاً في أوّل الأمر. فهو يكتب:

إنّ الهندسيّين الأوَل لم يكونوا قادرين على حلٍّ المسألة، الخاصَّة بالزاوية، والمشار إليها من قبل، بواسطة المستويات مع أن طبيعتها تتعلّق بالمجسَّمات؛ وذلك لأنّ القطوع المخروطية لم تكن بعدُ مألوفة لديهم؛ ولهذا السبب توقـــَّفوا ولم يتقدّموا. ولكنـــَّهم قاموا بتثليث الزاوية لاحقاً بعد أن استخدموا لأجل ذلك الميل (*neusis*) الذي عرضناه أعلاه[٢٤].

يُمكن، من وجهة النظر هذه، أن نتصوَّر أنّ هدف المقالة الثامنة هو حلّ لمسائل مجسَّمة كانت تُحلُّ بالميل (*neusis*) بواسطة القطوع المخروطية، كما فعل بابوس، بالتحديد، في المقالة الرابعة من "المجموعة الرياضية". فتكون عندئذ مقالة "الميول" (*les neuseis*)، المنسوبة إلى أبلونيوس، تكملة لكتاب "المخروطات" لا يُحتفـــَظ فيها إلا بمسائل الهندسة المستوية. يُمكِن، وفقاً لهذا التأويل، أن نفهم إعادة كتابة ابن الهيثم للمقالة الثامنة.

ليس لدينا ، في الوضع الحالي لمعارفنا، أيَّة حجّة لدعم أحد هذين التخمينين على حساب الآخر. إنّ نُدرة المعلومات حول الموضوع لا يُمكن إلا أن تفسح المجال لكل المعتقَدات. ولقد تصوَّر ابن الهيثم، على كلّ حال وفقاً لهذه الأوضاع واستناداً إلى هذه الفرضية، مشروع "تمام المخروطات". ولكن ماذا يجب أن نفهم من كلمة "تمام"؟

---

[٢٣] انظر: Th. Heath, *A History of Greek Mathematics* ، الجزء الثاني، ص. ١٧٥

[٢٤] انظر: Pappus d’Alexandrie, *La Collection mathématique*, trad. Ver Eecke ، المجلد الأول، ص. ٢٠٩

٣- "في تمام كتاب المخروطات": هدف المشروع

يجب أن نـــُذكِّر بأنَّ "في تمام كتاب المخروطات" لا يُشكِّل شرحاً لكتاب "المخروطات" لأبلونيوس، مهما كان المعنى الذي نريد إعطاءه لكلمة شرح. يكفي، لكي نقتنع بذلك، أن نُقارن كتاب ابن الهيثم هذا بالشروح اليونانية والعربية لكتاب "المخروطات" – أو ببعض مقالات هذا الكتاب – أي شروح أوطوقيوس والطوسي والمغربي والشيرازي والأصفهاني، الخ. وهل يُمكن، من جهة أخرى، أن يكون غير ذلك؟ يُعالج ابن الهيثم في كتاب "في تمام كتاب المخروطات" ، خلافاً للشروح، موضوع كتاب لم يقرأه قطّ، أي أنـــّه لم يكن هناك شيء للشرح، بسبب فقدان النصّ. يندرِج كتاب "في تمام كتاب المخروطات" إذاً ضمن نوع من الكتابة لا علاقة له بالشرح، وهو إعادة كتابة نصّ مفقود. ونحن، أخيراً، لسنا على علم بأيَّة محاولة يونانية أو عربية قبل القرن الحادي عشر لإعادة كتابة هذا الكتاب المفقود. وهكذا نرى إذاً بروز نوع من الكتابة، وهو صنف جديد من التحرير الرياضي يجب علينا وصفه.

كان ابن الهيثم يجهل كلَّ شيء تقريباً ، عن الكتاب الذي أراد إعادة كتابته، ما عدا بعض الإشارات المختصرة التي أوردها أبلونيوس. فنحن نقرأ باليونانية، بالفعل في صدر كتاب "المخروطات"، أن المقالة الثامنة تعالج

" τὸ δὲ προβλημάτων χωνιχων διωρισμένων" (نشرة هايبرغ ص.٤)،

وهذا ما تــُرجِم إلى العربية بعبارة "المسائل التي تقع في المخروطات".

إنـــّه من الواضح أنَّ المُترجِم قد فسَّر الفعل اليوناني: διορίζειν بالفعل "وقع". وأقلُّ ما يقال هو أنَّ هذا التفسير مدهِشٌ، لأنـــّه صدر عن شخص مثل هلال بن أبي هلال الحمصي أو مثل إسحاق بن حُنَين؛ إذ إنَّ معرفتهما الجيِّدة بالعربية وباليونانية تؤهِّلهما لتفسير أدقّ لهذا الفعل. يجب أن نُذكــِّر بأنَّ من معاني الفعل "وَقَعَ" نجد "حدث بشكل

أكيد"[٢٥]. والمعنى الثاني لفعل "وقع" هو "حدَّد وأثبت"، كما هي الحال في العبارة "وقع الحُكم"[٢٦]. وهكذا نلقى، في كلتا الحالتين، معنى الحدوث الأكيد والتحديد والإثبات. أما المعنى الأوّل للفعل اليوناني:διορίζειν ، في استعمالاته المادية والمجرَّدة، فهو "حدَّد" أو "وضَعَ الحدود". أمّا معناه الجدليّ المنطقي فهو "عَرَّف" أو "حدَّد"؛ ولقد انتشر هذا المعنى كثيراً بدءاً من أرسطو ولم يُغيِّب استعماله بالمعنى الآخر الرياضي المعروف وهو "بَحَثَ ووَصَفَ بمختلف الطرق كيف يُمكن حل مسألة ما"[٢٧]. وهكذا نجد أن المترجِم العربي قد اختار المعنى الجدلي المنطقي.

ونجد الإشارة الثانية إلى المقالة الثامنة في صدر المقالة السابعة. يُشير فيها أبلونيوس، أوّلاً، إلى بحوثه ويكتب:

"وفي هذه المقالة أشياء كثيرة غريبة حسنة في أمر الأقطار والأشكال التي تعمل عليها مفصّلة".

ثمَّ يُتابع قائلاً:

"وجميع ذلك عظيم المنفعة في أجناس كثيرة من المسائل، والحاجة إليها شديدة فيما يقع من المسائل في قطوع المخروطات التي ذكرنا مما يجري ذكره وبيانه في المقالة ح من هذا الكتاب"[٢٨].

يكون لدينا، هنا أيضاً، إمكانيتان حسب مطابقة معنى الفعل "وقع"، أو عدم مطابقته، لمعنى الفعل اليوناني، كما حصل سابقاً. ولكنَّ الفرضية الثانية هي أكثر واقعيَّة، وفقاً لطريقة الترجمة.

لنعترف بأنَّ هذه المعلومات قليلة إلى درجة لا تسمح بأيَّة إعادة كتابة للمقالة المفقودة. لم يكن لدى ابن الهيثم أيّ أثر أو بقيّة للقيام بعمل مؤرِّخ أو عالم آثار. ويبدو من جهة أخرى أنَّ ابن الهيثم كان يجهل كل شيء عن القضايا الأربع التي أشار إليها النديم. فلا يُمكننا إذاً تجاهل السؤال التالي: ما معنى، والحالة هذه، إعادة كتابة نصٍّ ريّاضيٍّ مع أنَّ كلَّ شيء منه مجهول، بالإضافة إلى أنَّـه قد حُرِّر قبل اثني عشر قرناً؟ يبدو هذا

---

[٢٥] هذا المعنى وارد في الآية القرآنية: ﴿إنَّ عذاب ربِّك لواقع﴾، الطور: ٧.

[٢٦] هذا المعنى وارد في الآية القرآنية: ﴿فوقعَ الحقُّ وبَطَلَ ما كانوا يعملون﴾، الأعراف: ١١٨.

[٢٧] انظر: ش. مغلر ص. ١٤١:

Ch. Mugler, Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs, Études et commentaires, XXVIII (Paris, 1958).

[٢٨] انظر مخطوطة أيا صوفيا ٢٧٦٢، ورقة ٢٦٨ و.

المشروعُ، لأوّل وهلة على الأقلّ، غيرَ مُجدٍ في البحث التاريخي خاصّة. ولكنَّ ابن الهيثم، بالرغم من ذلك، حاول القيام به. ولم يكفَّ هذا المشروع عن إغراء خلفاء ابن الهيثم الرياضيين وعن حفز تخيُّلهم ونشاطهم الخلاق أحياناً. فلنتذكَّر موروليكو (*Maurolico*) وكتاب "المخروطات"، وكذلك فرما (*Fermat*) وَ"الأمكنة المستوية" لأبلونيوس، وألبير جيرارد (*Albert Girard*) وَ و"لازمات" (*Porismes*) أقليدس، الخ. إنَّ إعادة الكتابة بالنسبة إليهم جميعاً، منذ عهد ابن الهيثم، ليست عملاً تصحيحياً. فليس الريّاضيُّ عالِمَ آثار ولا مؤرِّخاً. إنَّ السمة المشتركة لكلٍّ هذه المحاولات هي أنَّ إعادة الكتابة هذه تجري وفقاً لمعايير يقينيّة. وهي لا تتطابق أبداً مع إعادة بناء نظرية فلسفية من أيّ طبيعة كانت. يُعِدُّ الفيلسوف، في هذه الحالة، ما ينقص في النظريّة لكي تظهر بطريقة متماسكة؛ يتعلّق الأمر، في الأساس، بشرح مباشر أو غير مباشر. أمَّا الريّاضي، فيجب عليه أن يبتكِر ويُبَرهِن بدقّـة القضايا التي تُقوّي الإسهام القديم عن طريق تجاوزه. وهذا ما فعله ابن الهيثم وَفرما وألبير جيرارد، وكذلك موروليكو نوعاً ما. وهكذا نفهم أنَّ كلمة "تمام" التي استخدمها ابن الهيثم لها معنيان مترابطان بعمق: "إتمام" لسدّ النواقص العائدة لأبلونيوس، و"إنجاز" لإثبات تماسك نظرية المخروطات[٢٩]. يتعلّق الأمر، بالنسبة إلى ابن الهيثم، باستخدام نَهْج كشفي ونهجٍ بنـاء في آن واحد. لا يُمكِن بالفعل أن نفهم معنى إسهامه أو تطوُّرَ هذا الإسهام، إذا لم نَتنبَّه إلى هذا البعد المزدَوِج لفعل "التمام". وهكذا قام ابن الهيثم، بعد أن تحقـّق من نقص بعض "المعاني"، أيْ القضايا والمبرهنات، بتخمين سبب نقصها، بدون تقديم أيِّ إثبات لذلك بالطبع:

"فاعتقدنا أنَّ المعاني التي أخلّت بها المقالات السبع، هي المعاني التي في المقالة الثامنة، وإنـّما أخـّرَها لأنـّه لم يَحتـَج إلى استعمالها في المعاني التي ضمَّنها المقالات السبع. وهذه المعاني، التي أشرنا إليها، هي معانٍ تقتضيها معانٍ قد تضمَّنتها المقالات السبع"[٣٠].

---

[٢٩] نقرأ في "كتاب العين": تتمّة كلِّ شيء ما يكون تماماً لغايته. ونقرأ في القرآن، سورة المائدة ٣: ﴿اليوم أكملت لكم دينكم وأتممت عليكم نعمتي﴾. كما نجد العديد من الآيات القرآنية والألفاظ الشعريّة التي تؤكّد معنى إنجاز وإتمام الشيء حتّى لا يبقى فيه نقص أو عيب. وهكذا يكون من غير المنطق أن نفهم كلمة "تتمّة" كمجرَّد "إضافة".

[٣٠] انظر ص ٢٠١.

لم يُفهَم قول ابن الهيثم هذا بما فيه الكفاية؛ فهو لا يُشير فقط إلى المقالة السابعة، بل يُشير بوضوح إلى مجموع المقالات السبع؛ وفضلاً عن ذلك، إنَّ الأمثلة القليلة التي اختارها مأخوذة من المقالة الثانية من "المخروطات".

وهكذا نقرأ في هذه العبارات الواضحة كيف يفهم ابن الهيثم إعادة كتابة المقالة الثامنة، فهو يريد اكتشاف القضايا، التي تتطلّبها قضايا أبلونيوس المُثـبَتَة ضمن المقالات السبع، وبرهنة هذه القضايا لتقوية بنية "المخروطات". ونرى كيف يرتسم البرنامج الذي يُوَجِّه مشروع "تمام المخروطات" والذي يُوضِّح اختيار العنوان، كما يُوَضِّح الطريقة التي استخدمها ابن الهيثم؛ وهي تقوم على البدء ببحث جديد في الرياضيّات استناداً إلى النتائج التي حُصِل عليها في المقالات السبع، بهدف إكمال البنية المنطقية لعرْض أبلونيوس. وهكذا تـُصبِح إعادة الكتابة ، وفقاً لهذا المعنى، بحثاً ناشطاً. ولكن أين يَكمُن التجديد، لو كان موجوداً بالفعل؟ كلُّ ما نعلمه الآن هو أنَّ لا شيء في هذا المشروع يكفل أن يكون هذا البحث، قد جرى بالضبط وفقاً لأفكار أبلونيوس أو وفقاً لأسلوبه، حتـّى لو كانت لغته ملائمة للغة أبلونيوس. إنَّ خيار ابن الهيثم، فيما يخصُّ الأسلوب، واضح بدون التباس. نحن نعلم أنَّ أسلوب أبلونيوس تركيبيّ محض في كل المقالات السبع. وإذا استثنينا المسائل الواردة في نهاية المقالة الثانية التي هي مسائل في العمل الهندسي (من ٤٤ إلى ٥٣) حيث يستخدم أبلونيوس التحليل والتركيب، فإنـّنا نبحث بدون جدوى في المقالات الأخرى فلا نجد أثراً لأيّ تحليل سابق للتركيب. ولا تبتعد المقالة الخامسة نفسها – التي تتميَّز بالتحليل أكثر من المقالات الأخرى –عن المقالات الأخرى في أسلوبها التركيبي. وهذا الخيار المقصود في التركيب يمنعنا من التنبُّؤ بأسلوب المقالة الثامنة. فهل كانت هذه المقالة مُكرَّسة لمسائل العمل الهندسيّ التي قد يكون أبلونيوس قد حلّها بالتحليل والتركيب؟ لا شيء يؤكـِّد ذلك، إذ إنَّ كلَّ مسائل العمل الهندسيّ، باستثناء المجموعة المذكورة آنفاً، قد قـُدِّمت بطريقة تركيبية. هل استخدَم في المقالة الثامنة التحليلَ والتركيبَ ، لسبب غير معروف، خلافاً للطريقة التي اتبعها في باقي الكتاب؟ لا توجَد حجَّة جدِّية لدعم مثل هذا التخمين. ولو كان ذلك صحيحاً لاستحقـَّت المقالة الخامسة، قبل المقالات الأخرى، أن تـُستَخدَم فيها تلك الطريقة. نقول، باختصار، إنـّه لا يوجَد دليل يدعم مثل هذه الفرضية

حول محتوى المقالة الثامنة وأسلوبها. والشيء الوحيد المؤكَّد لدينا هو أنّ المقالات السبع الأولى من "المخروطات" كانت لدى ابن الهيثم بالشكل الذي نعرفه الآن، أي بالأسلوب التركيبي الذي يُميِّزها. وهذه هي الحالة، بالتحديد، التي تُعطي لخيار ابن الهيثم كلَّ مغزاه. يُقدِّم ابن الهيثم على الشكل التالي هذا الخيار:

ونجعل استخراجنا لهذه المعاني بالتحليل والتركيب والتحديد لتكون أكمل المقالات بياناً.[٣١]

فما الذي حثَّ ابن الهيثم على اختيار نهج مختلف، في تحريره لمقالة المفروض منها أن تكون امتداداً للمقالات السبع الأولى؟ إنّ اهتمامه بصيغة الأسلوب الريّاضيّ يتجاوب، كما يبدو، مع التزام جديد.

وهذا الالتزام، الذي نُذكِّر به هنا بشكل إجمالي قبل أن نقوم بتحليله، هو وليد اهتمام رياضيّ بقي يتزايد حتّى فرض نفسه في نهاية القرن العاشر الميلاديّ، وخاصّة في أعمال ابن الهيثم؛ وهو أن يُبَرهَن وجود نقاط التقاطع بين القطوع المخروطية إلى أبعد مدى ممكن من الدقّة. وهذا الاهتمام كان بعدُ موجوداً، بلا شكٍّ، بين السطور في بعض أعمال الهندسة اليونانية – ربَّما كان ذلك في شرح أوطوقيوس للقضيّة الرابعة من المقالة الثانية من كتاب أرشميدس "الكرة والأسطوانة" –؛ ولكن، لقد توجَّب انتظار القرن العاشر الميلاديّ، وخاصّة ابن الهيثم، حتّى يُصبح هذا البرهان منهجيّاً إلى الحدّ الذي وصل إليه معه، وحتّى يتّخذ كلَّ مظاهر القاعدة المُلزِمة[٣٢]. يهتمّ ابن الهيثم، بالفعل، ببرهان وجود التقاطع بين قَطعين مخروطيّين، مستعيناً بخواصّ خطوط التقارب وبالخواصّ المحلّيّة للقطوع المخروطية ولنقاط التماسّ بشكل خاصّ. إنّ هذا الالتزام البرهانيّ الجديد يمنع بنفسه من إهمال التحليل والتركيب، حتّى خلال عرض المسألة. إنّ بروزَ هذا البحث حول وجود الحلول وحول عددها، وفقاً لنظرية التحليل والتركيب، مرتبِطٌ، بعمق، بالبحث المنهجي للأعمال الهندسية بواسطة التقاطع بين القطوع المخروطية. كانت دوافع هذا البحث هندسية وجبرية في آن واحد؛ وهو لم يَجرِ من وقت إلى آخر عند إثارة بعض الأسئلة أو ملاقاة بعض المسائل، كما

---

[٣١] انظر ص ٢٠٢ وما بعدها.

[٣٢] لقد أكّدنا أكثر من مرّة هذا الالتزام الجديد الذي بدا لنا مُهمّاً والذي لم يلفت نظر أحد :

١) *«La construction de l'heptagone régulier par Ibn al-Haytham», Journal for the History of Arabic Science,* 3 (1979)، ص. ٣٠٩-٣٨٧.

٢) انظر: *«La philosophie mathématique d'Ibn al-Haytham. I: L'analyse et la synthèse», MIDEO, 20 (1991)*، ص. ٣١-٢٣١.

كان يحصل خلال العصر الهلينيستي، بل أصبح القيام به من بعدُ منهجيّاً بهدف اكتشاف ميدان المسائل الهندسية المُجسَّمة في أغلبها، والمستوية أيضاً. وهكذا يهتمُّ ابن الهيثم، في هذا المؤلّف المكرَّس لكتاب "المخروطات"، على الأخصّ بالأبنية الهندسية المتعلّقة بالقطوع المخروطية: خطوط التماسّ والأقطار والأضلـُـع القائمة...، مع الافتراض أنَّ النسَب والمضروبات والمجموعات والفروق معلومة ثنائيّاً بين هذه القِطَع. ولم يستخدم ابن الهيثم، خلال هذا البحث، القطوع المخروطية لعمل حلول المسائل الهندسية المُجسَّمة فحسب، بل للمسائل الهندسية المستوية أيضاً؛ وهكذا نلقى، على التوالي، حلول المسائل المجسَّمة المبنية بواسطة القطوع المخروطية، كما نلقى حلول المسائل المستوية المبنية بواسطة المسطرة والبركار. ولم يؤكـّـد بما فيه الكفاية على هذا الحدث المهمّ، مع أنـّـه يوحي بأنَّ عمل الحلول بواسطة القطوع المخروطية كان قد أصبح طريقة ممكنة القبول في الهندسة، لأنـّـها أصبحت مشروعة في المسائل المجسَّمة وفي المسائل المستوية أيضاً.

ينتمي "في تمام كتاب المخروطات"، بفضل المسائل المُعالجة فيه والطرائق المتـّـبَعة والأسلوب المستخدَم، إلى هذا الفصل من العمل الهندسيّ الذي زرع بذورَه الرياضيون اليونان، واعتنى به رياضيّو القرن العاشر الميلادي، قبل أن يُصبح فصلاً كاملاً مع ابن الهيثم على الأخصّ.

٤- تاريخ النصّ

يوجَد هذا الكتاب لابن الهيثم في مخطوطة وحيدة ضمن مجموعة مهمَّة، ذات الرقم ١٧٠٦، في مكتبة منيسا (*Manisa*) في تركيا. والمجموعة نفسُها تتضمَّن سبعة عشر مؤلّفاً، منها خمسة عشر مؤلّفاً في الرياضيات والفلك. نجد في أوّلها شرح ابن أبي جرادة، وهو رياضي من القرن الثالث عشر، لكتاب "الأكر" لمنالاوس. يتبع هذا الشرح بعض الإضافات، في نفس الموضوع. ثمَّ نجد رسالة قصيرة (منقوصة) حول القضية الأولى للمقالة العاشرة من "الأصول" وشرحاً منقوصاً من أوّله ومن آخره، لكتاب "المخروطات" لأبلونيوس. نُسِخت هذه النصوص في أغلبيتها بنفس اليد؛ والأوراق مُرقـّـمة بشكل مُتـّـصل مما يؤكـّـد انتماءها لنفس الزمرة. وتلي هذه الزمرة الأولى، مباشرة، زمرة ثانية منسوخة بيد أخرى، والأوراق

مرقـــمة بطريقة مُختلفة. المؤلّف الأوّل، من هذه الزمرة الثانية، هو كتاب ابن الهيثم الذي يحتلّ الأوراق ١ظ-٢٥و. ثـــمّ يلي ذلك كتابٌ أملاه ابن ميمون(ولكنـــه لم يُحرِّره) "حواشٍ على بعض أشكال من كتاب المخروطات". وهذان المؤلّفان منسوخان بنفس اليد التي تبدو أحدث من تلك التي نـــسخت الزمرة الأولى. يبدو، إذاً، أنّ "في تمام كتاب المخروطات" و"حواشٍ على بعض أشكال كتاب المخروطات" لابن ميمون ينتميان إلى مجموعة أخرى. ثمّ نجد بعد ذلك "تعليقات على المخروطات" محرَّرة من مجهول لأجل استخدامه الشخصي وفقاً لكلامه. ونجد بعد ذلك في المجموعة نصوصاً منسوخة بأيدٍ مختلفة. نـــسِخ أحد هذه المؤلّفات، على سبيل المثال، في تبريز(إيران) حوالي ٦٩٩/١٣٠٠. كل شيء يوحي بأنّ هذه المجموعة مركـــبة من عدد من المجموعات الأخرى من قِبَل شخص مطّلِع على العلوم الرياضية ومهتمٍّ خاصّة بالقطوع المخروطية.

تنتهي هنا معرفتنا وفقاً للوضع الحالي للبحث في النصوص والمراجع العربية. وهكذا لا يكون لدينا سوى القليل من المعلومات حول تاريخ نصّ "في تمام كتاب المخروطات". لقد نُسخ هذا النصّ، كما يبدو، في زمن متأخِّر بيد شخص مهتمٍّ بالقطوع المخروطية، ولكنّ أصحاب هذا النصّ لا يُخبرونا بما يستحقّ الاهتمام.

هذا إذاً نصٌ وصل إلينا في مخطوطة وحيدة نُسخَت في زمن متأخـــر. لسنا طبعاً أمام حالة فريدة؛ وهي لا تثير أيّة مسألة، لو كان عنوان الكتاب موجوداً على إحدى قوائم مؤلّفات ابن الهيثم التي أوردها كُتـــاب السِّيَر القدامى، أو لو كان المؤلّف نفسه قد أشار إليه في أحد مؤلّفاته التي وصلت إلينا. ولكنّ شيئاً من هذا لم يحدث. وهذا الوضع ملائم بالطبع لإثارة الشكوك. والكتاب منسوب بوضوح إلى ابن الهيثم في عنوانه وفي جملته الختامية، وهذا، بالتأكيد، على قدر كبير من الأهميّة، ولكنـــه لا يكفي لحلّ مسألة نسبة الكتاب بشكل نهائيّ. ويجب بالمقابل أن نُقيِّم، بشكل صحيح، سكوت كتـــاب السِّيَر وسكوت ابن الهيثم نفسه. إنّ نظرة سريعة على القوائم[٣٣]، للمقارنة فيما بينها، تـــبيِّن أنـــه لا توجَد قائمة كاملة بين القوائم الثلاث الرئيسية – القفطي وابن أبي أصيبعة ومخطوطة لاهور – وهي بالإضافة إلى ذلك مُختلفة فيما بينها. إنّ غياب عنوان الكتاب عن هذه

[٣٣] انظر: المُجلد الثاني من هذه الموسوعة، ص. ٤٧٨-٥٠١.

القوائم لا يكفي للحكم عليه مُسبّقاً بأنه منسوب خطأ إلى ابن الهيثم. وتــُبيِّن هذه القوائم نفسها أنَّ سكوت ابن الهيثم لا يُشكــِّل أيضاً حُجَّة جدِّية للتشكيك بصحَّة نسبة الكتاب إليه؛ كما نــُشير من ناحية أخرى إلى أنَّ الكتابين، اللذيْن قد أمكن على وجه الاحتمال لابن الهيثم أن يُشير فيهما إلى "في تمام كتاب المخروطات"، مفقودان؛ وهما "في خواصّ القطوع" وَ "في عمل القطوع المخروطية".

تــُصبح مسألتنا واضحة إذاً: لدينا نصّ منسوب بوضوح إلى الحسن بن الهيثم، بدون أن يوجَد أيٌّ عنصر خارجي لتأكيد أو لِنَفــْي هذه النسبة. فالوسيلة الوحيدة التي تبقى لدينا هي الرجوع إلى النصّ نفسه.

إنَّ بنية النصّ وتنظيمه موافقان لأسلوب يُمكن أن نستدِلَّ عليه في أعمال أخرى لابن الهيثم. فقد كان من عادة ابن الهيثم بالفعل أن يبدأ بالإشارة إلى الهدف الذي يسعى إليه في الكتاب وإلى المسألة التي يُريد معالجتها، ثمّ يتكلّم على إسهامات أسلافه عندما تكون موجودة.

ليس ابن الهيثم المؤلّف الوحيد الذي يبدأ عرضه بهذا الشكل، ولكنَّ المصطلحات التي يستخدمها لا تدع لدينا مكاناً للشكّ؛ إنــَّها مصطلحات ابن الهيثم. لنأخذ بعض الأمثلة:

استقرينا ... وتصفَّحنا	استقراء... وتصفُّح ("في المناظر" ص. ٦٢)
تطلع النفوس	تسمو النفوس (المجلـّد الرابع من هذه الموسوعة، "في التحليل والتركيب"، ص. ٣٠١، ٣)
المعاني التي ذكرها	المعاني التي لم يذكرها (المجلـّد الرابع من هذه الموسوعة، "المعلومات"، ٥٣٦، ١٣)
[تمكن هذا المعنى في اعتقادنا وَقَويَ في نفوسنا]	[هذا المعنى هو أحد ما قَوّى رأيَ المتفلسفين في اعتقادهم (المجلّد الثاني، "في تربيع الدائرة" ص. ١٥٥، ٧-٨).]

يُمكن أن نواصِل سرد الأمثال التي لا يُمكن أن تناقض هويَّة المؤلّف. يكفي أن نلاحظ كثرة استخدام "معنى"، "معاني" الذي يُميِّز أسلوب ابن الهيثم. أمّا لغة الرياضيين البسيطة فهي

تلك التي يستخدمها في كلّ كتاباته، باستثناء عبارة "قطع صنوبري" التي يستخدمها، أربع مرّات في "في تمام المخروطات"، ليدلّ على القطع المخروطيّ . ولكنّ ابن الهيثم لا يستخدم أبداً هذه العبارة، في كتاباته الأخرى، للدلالة على القطع المخروطيّ؛ وذلك بخلاف ما فعله سلفُــه الخازن على سبيل المثال. ولنلاحظ أوّلاً أنّ كلمة "صنوبري" توجَد في ترجمة "المخروطات" التي نسخها ابن الهيثم بيده، ضمن القضايا ذات الأرقام ١٧ وَ ١٩ وَ ٢٠ من المقالة الأولى، وفي مواضع أخرى من هذه الترجمة[٣٤]. فليس من المُستبَعَد أن يكون ابن الهيثم قد تأثـــّر بالمصطلحات المُستخدَمة في هذه الترجمة، خلال تحريره مقالة "في تمام المخروطات" التي تصوّرها بعد مقالة أبلونيوس السابعة لتتمّم "المخروطات". وهكذا فإنّ استخدام ابن الهيثم لعبارة "قطع صنوبري"، بدلاً من أن يُشكّل حُجَّة ضدّ نسبة "في تمام المخروطات"، يوحي لنا بتخمين لتاريخ تحريره. إنّ تواجد عبارة "صنوبري" في مقالة "في تمام المخروطات"، وفي هذه المقالة فقط، تـــُظهِر بالفعل تقارباً في المفردات مترابطاً بعمق مع تقارب في المسائل والموضوع. وهذا ما يوحي بأنّ ابن الهيثم النسّاخ أثـــّر في ابن الهيثم الرياضي في اختيار مصطلحاته. ولكن لدينا ما نـــُضيفه على كلّ هذا.

نلاحظ ، عند تفحُّصنا لمخطوطة "المخروطات" المنسوخة بيد ابن الهيثم، كما وصلت إلينا، أنـــّها منقوصة في آخر القضية الثامنة والأربعين من المقالة السابعة؛ إذ إنّ نهاية هذه القضيَّة والقضايا الأربع التالية غير موجودة. إنّ هذا الضياع لا يعود إلى زمن قريب، بل إنـــّه سابق للقرن الثالث عشر الميلاديّ. لقد كانت هذه النسخة، بالفعل، في حوزة الرياضي ابن أبي جرادة الذي زاد عليها الكثير من الحواشي؛ لقد كتب بيده على هامش الصفحة الأخيرة (الورقة ٣٠٦ظ): " بقي من هذا الكتاب المقالة الثامنة". ولكنّ ابن أبي جرادة كان على معرفة جيِّدة جدّاً بكتاب "المخروطات" – كما تشهد على ذلك شروحه لأعمال ثابت بن قرّة[٣٥] – فلا يُمكن أن يكون جاهلاً بأنّ المقالة الثامنة لم تـــُترجم إلى العربية. ولكنّ جملته، بالرغم من ذلك، توحي بأنّ النسخة التي كانت في حوزته كانت تتضمّن ثماني مقالات. وإذا كان تخميننا صحيحاً، لا تكون المقالة الثامنة سوى كتاب ابن الهيثم "في تمام كتاب المخروطات". يأتينا إثبات هذا التخمين من ابن ميمون الذي هو فيلسوف وعالِم في القرن الثاني عشر، عاش هو

---

[٣٤] انظر مخطوطة أيا صوفيا ٢٧٦٢.
[٣٥] انظر: المُجلد الأوّل من هذه الموسوعة.

أيضاً في القاهرة، كما اطّلع على "في تمام كتاب المخروطات" وكتب بعض الحواشي لبعض القضايا منه. ولكنَّ ابن ميمون اعتبر أنَّ كتاب "في تمام كتاب المخروطات" هو المقالة الثامنة من كتاب "المخروطات". يتبع ابن ميمون في حواشيه، بالفعل، مقالات "المخروطات" بالترتيب، حتــّـى يكمل بعض البراهين التي ترك أبلونيوس إتمامها للقارئ، حيث يتعلّق الأمر بمراحل وسيطة سهلة في هذه البراهين[٣٦]. يُسجّل ابن ميمون الحواشي للمقالة الثامنة التي ليست سوى "في تمام كتاب المخروطات"؛ وتشرح هذه الحواشي عبارات من هذا الكتاب. وهكذا نرى أنَّ "في تمام كتاب المخروطات" كان مُتداوَلاً بين القرنين الحادي عشر والثالث عشر الميلاديين كأنــّـه – في نظر بعض المؤلّفين على الأقلّ – المقالة الثامنة من كتاب "المخروطات". ولكن، ليس من الممكن أن نضع مسؤولية هذا الالتباس على عاتق ابن الهيثم، إذ إنَّ مقدّمة "في تمام كتاب المخروطات" لا تدع، بالفعل، مجالاً لأيّ التباس. فمن أين أتى هذا الخطأ؟ التخمين الذي نُقدّمه يأخذ، كما يبدو، بعين الاعتبار مجموع هذه الوقائع: مسألة الاستعمال الاستثنائي لعبارة "قطع صنوبري"، ملاحظة ابن أبي جرادة، التباس ابن ميمون وسكوت كـــُتـّـاب السِّيَر القدامى.

يُمكِن أن يكون ابن الهيثم قد حرَّر كتاب "في تمام كتاب المخروطات"، مباشرة بعد أن أنهى نسخة من كتاب "المخروطات"، ثمَّ وضعه في نهاية هذا الأخير. فيكون، في هذه الحالة، قد كتب "في تمام كتاب المخروطات" حوالى سنة ٤١٥/١٠٢٤، أي في وسط فترة النضوج، وهذا ما يعطي فكرة جيِّدة عن مُحتوى هذا الكتاب المهمّ في هندسة المخروطات.

نترك للبحوث المستقبليّة مسألة تأكيد أو تصحيح أو نفي هذا التخمين. وإذا أخذنا الآن بعين الاعتبار هذه الحُجج التي عرضناها والتي يجب أن يُضاف إليها، كما سنرى، المُحتوى الرياضي للكتاب، نجد أنــّـها كافية للتحقــّـق من أنَّ "في تمام كتاب المخروطات" هو كتاب حرَّره ابن الهيثم عندما كان ينسخ كتاب "المخروطات".

لنرجع الآن إلى نسخة "في تمام كتاب المخروطات"، فنتحقــّـق أنها قد نُسِخت بخطٍّ نسخيّ جميل واضح ومُتقن. الأشكال مرسومة بنفس العناية. والإضافات النادرة في الهامش كـــُتِبَت

[٣٦] انظر : حواشٍ على بعض أشكال كتاب المخروطات، مخطوطة منيسا (*Manisa*) ١٧٠٦، ورقة ٢٦ظ ؛ انظر أيضاً: رشدي راشد: «*Philosophie et mathématiques : Maïmonide et le modèle andalou de rencontre philosophique*»، ضمن :
Roshdi Rashed et Tony Levy :Maïmonide Philosophe et savant,1138-1204,(Peters, 2004).

بيد النسّاخ الذي زادها في مواضعها، مع إضافة كلمة "صحّ"، خلال مراجعته للنسخة مقارنة بالنسخة الأصلية. لا يتضمَّن النصّ أية كلمة مشطوبة ولا حاشية مضافة.

ربَّما كانت هذه النوعية الممتازة للنسخة التي حثَّـت ن. ترزيوغلو (*N. Terzioğlu*)، الذي كان أوّل من لفت الأنظار إلى هذه المخطوطة، على نشر صورة فوتوغرافية عن النصّ مع تمهيد ومقدِّمة مختصرة. وكان لهذه النشرة التي صدرت سنة ١٩٧٤[٣٧] فضل كبير في الإعلام عن نصّ ابن الهيثم وفي انتشاره. ولقد أعطى م. عبدلكبيروف[٣٨] سنة ١٩٨١ أوّل دراسة للمحتوى الرياضي لهذا الكتاب لابن الهيثم، فأخبر بذلك مؤرّخي الرياضيات بأهمّيته الكبرى. ثمَّ نشر ج. ب. هوجنديجك (*J. P. Hogendijk*)، بعد ثلاث سنوات أطروحة لنيل الدكتوراه قام فيها بتحقيق نقدي وبترجمة إلى الانكليزية وبشرح تاريخيّ ورياضيّ ضخم. لقد كان لهذه النشرة فائدة كبرى للتعريف في الغرب بكتاب ابن الهيثم هذا، وبالنتائج التي توصّل إليها هذا الأخير. لقد أشرنا قبل قليل إلى أنَّ ن. ترزيوغلو اكتفى بتصوير المخطوطة، نظراً إلى النوعية الممتازة للنسخة. أمّا ج. ب. هوجنديجك فلقد ارتأى أن ينشر تحقيقاً نقدياً[٣٩] (نشير إليه بالحرف ح في التعليقات والحواشي). هذا التحقيق، مع أنّـه مغلوط، يبقى تحقيقاً قبل كلّ شيء. إنَّ أكبر عدد من الأخطاء الموجودة فيه عائدة إلى إرادة حميدة لدى المؤلّف، مع أنَّ نتيجتها مؤسِفة، في تصحيح نصٍّ عربيّ، مع أنّـه صحيح تماماً. سنكتفي هنا بإيراد الأخطاء التي أدخِلت في النصّ العربيّ المنقول، تاركين للقارئ مهمة تصحيح الأخطاء الإملائية العائدة للكتابة القديمة (المكافي، احديهما، الخ) وتصحيح أخطاء قراءة الأحرف في الاستدلالات والأشكال الهندسية. أمّا التفسيرات الغير منطقيّة الواردة للأسف في الترجمة الإنكليزية وفي الشروح، فإنني أفضّل أن لا أشير إليها هنا. إنَّ رقم الصفحة ورقم السطر المشار إليهما بين قوسين، في القائمة التالية، يخصّان النشرة المذكورة.

---

[٣٧] انظر: *Das Achte Buch zu den Conica des Apollonius von Perge/ Rekonstruiert von Ibn al-Haytham. Herausgegeben und eingeleiter von N. Terzioğlu*، (إسطنبول، ١٩٧٤)

[٣٨] انظر: *Matematika i astronomiya v trudakh Ibn Sina, yego sovrenrennikov i posledovatelei* (طشقند ١٩٨١)، ص ٨٠-٩٤.

[٣٩] انظر: *J. P. HogendijkK Ibn al-Haytham's Completion of the Conics, Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences 7(New-York / Berlin / Heidelberg / Tokyo, 1985).*

نشرة ج. ب. هوجنديجك	التصحيح
(١٣٥، ١١) تضمنتها	ضمّنها
(١٣٥، ١٨) هي	هن
(١٣٧، ٧) يقول... أن	يقول... إنّ
(١٣٧، ٩) تضمنت	تتضمن
(١٣٧، ١٣) في	من
(١٣٧، ١٨) نقل	تقدم
(١٣٧، ١٨) درية	دُرّية
(١٣٧، ١٩) هي	هن
(١٣٧، ١٩) تضمتها	ضمنتها
(١٣٧، ١٠-٢١) نقل [بها]	تقدمها
(١٣٩، ١) لم يمكن	[لم] تمكن
(١٣٩، ١) حسن	بحسن
(١٣٩، ٣) هي	هن
(١٤١، ١) معلوم	معلوماً
(١٤١، ٣) القطع نسبة	القطع مثل نسبة
(١٤١، ٤) <وليكن>	–
(١٤١، ٨) <فنفرض ... ب هـ >	–
(١٤١، ١٤) كما	لما
(١٤٣، ٦) في	من
(١٤٣، ٩) برهانه إنا	برهانه أنا (وفي مواضع مختلفة)
(١٤٥، ٨) كما	لما
(١٤٥، ٨) من	في
(١٤٥، ١١) كما	لما
(١٤٥، ١٢) في نسبة	ونسبة
(١٤٥، ١٢) <ونسبة ا هـ إلى هـ كـ >	–
(١٤٧، ٥) [مر د ب و حـ مر ر ب]	< الخط ... كنسبة>
(١٤٩، ١٠) فأما	فإما

(١٤٩، ١٥) للقطع	لقطع
(١٥١، ١٠) مربع ا ف ، فنسبة	مربع ا ف. ونسبة ضرب م ط في ط ا إلى مربع ا س كنسبة م ه إلى هـ ا، فنسبة
(١٥٣، ٤) نسبة	<فإن> نسبة
(١٥٣، ١٣) أيضاً. والقطع الزائد	أيضاً. والقطع المكافئ يمرّ بنقطة ا، والقطع الزائد
(١٥٣، ١٤) رأسه	<و>رأسه
(١٥٣، ١٤) وتقعّره	ومقعّره
(١٥٣، ١٥) لتقعّر	لمقعّر
(١٥٥، ١٤) يفصله	فصله
(١٥٧، ٥) فمجموع	<و>مجموع
(١٥٩، ١٠) فنسبة	ونسبة
(١٥٩، ١٠) فنسبة	ونسبة
(١٦٣، ١٤) سلك	سيق
(١٦٣، ١٥) قدمنا	قد بيناه
(١٦٣، ١٨) سواء	سوى
(١٦٥، ٨) <إذا امتد>	—
(١٦٥، ١١-١٤) جهة <ص ... > ويصير	جهة و يصير
(١٦٥، ٢٢) [لا] يرسم	قد رسم
(١٦٧، ٧-٨) <وعمود ث ظ>إذا	فإذا
(١٧٣، ٥) وصفنا	نصف
(١٧٣، ١) فكان	وكان
(١٧٥، ٦) تمم	تمّ
(١٧٥، ٧) وتقعراهما متقابلان	ومقعراهما متقابلان
(١٧٧، ٢٣) فنسبة	ونسبة
(١٧٩، ٩) فكذلك	ولذلك
(١٨١، ٥) تقعريهما	مقعريهما
(١٨١، ٦) وإنه	فإنّه
(١٨١، ٨) كما	لما

(١٨١، ١٠) <على نقطتين>	–
(١٨١، ١٢) التي من	التي <مما يلي> القطع من
(١٨١، ١٨) يحيط	تحيط
(١٨١، ٢٣) سنبين كيفية وجوده	<أنه> سيتبين من وجوه
(١٨٣، ٣) إلى القطر	إلى <نصف> القطر
(١٨٥، ١٦) فيكونان	فيكونا
(١٨٥، ١٨-١٩) متشابهين ... مربع ف ط	متشابهين، فتكون نسبة هـ ف إلى ف ط كنسبة ط ف إلى ف ا <وكنسبة هـ ط إلى ط ا >، فتكون نسبة هـ ف إلى ف ا كنسبة مربع هـ ف إلى مربع ف ط
(١٨٩، ١) فزاوية	وزاوية
(١٩٣، ٨) كما	لما
(١٩٩، ٦) <ونسبة ... د ن>	–
(١٩٩، ٧) <إلى ... ح ن>	–
(١٩٩، ١٦) فكان	وكان
(١٩٩، ١٧) وكان	[و]كان
(١٩٩، ١٧) فكانت	وكانت
(١٩٩، ١٨) فتكون نقطة معلومة	فتكون نقطة ا معلومة
(١٩٩، ١٨) فيكون	ويكون
(١٩٩، ١٩) (٢) فتكون	وتكون
(٢٠٣، ١٦) فيتبين	فنبين
(٢١١، ٩) القطر	<قطر> القطع
(٢١١، ١٦) عن القطعة	عن القطع
(٢١١، ١٧) ويتبين	وتبين
(٢١٣، ٦) الأخير	الآخر
(٢١٣، ١٧) الأخير	الآخر
(٢١٣، ١٨) يقطع	تقطع
(٢١٥، ٩) المماسين	المتماسين
(٢١٥، ١٣) المماسان	المتماسان

(٢١٧، ١)	معلوم	معلوماً
(٢١٧، ١٤)	كما	لما
(٢٢٣، ٤)	فضرب	وضرب
(٢٢٣، ١٥)	وضلعه القائم الذي	وضلعه القائم <هو> الذي
(٢٢٣، ١٦)	أما	إما
(٢٢٥، ١٤)	أما	إما
(٢٢٩، ٩)	تقعريهما	مقعريهما
(٢٢٩، ١١)	<و>الذي	الذي
(٢٢٩، ١٤)	<لا> يقع عليه	يقع عليه < قطع هـ ن >
(٢٣١، ١)	معلوم	معلوماً
(٢٣١، ١٣)	فضرب	وضرب
(٢٣١، ١٤)	(٢) معلوم	معلومة
(٢٣١، ١٧)	<و> هي	هي
(٢٣٥، ٨)	أعظم	أعظم <من كـ >
(٢٣٧، ١٧)	هو أن	هو <إما> أن
(٢٣٧، ١٨)	خارج	داخل
(٢٣٧، ٢٠)	داخل	خارج
(٢٣٩، ١)	معلوم	معلوماً
(٢٣٩، ١٢)	فقطع	وقطع
(٢٤١، ٢)	ولتكونا ح ط	وليكونا هـ ح د ط
(٢٤١، ٦)	فأما	فإما
(٢٤٥، ٢٠)	خط	لخط
(٢٤٧، ٥)	نسبة ح ع إلى ع ف	نسبة ضرب ح ع في ع ط < إلى ضرب ع ف في ع ط >
(٢٤٧، ١٤)	خط الترتيب القطع	خط ترتيب القطع
(٢٥٣، ١٦)	< كنسبة ح كـ >	< هي كنسبة ح ع إلى ع ف، التي هي كنسبة ح ط >
(٢٥٥، ٦)	< إلى محيط القطع الناقص>	—
(٢٥٥، ٨)	إلى خطّ الترتيب الذي يخرج	إلى خطّ الترتيب مثل خطّ الترتيب الذي يخرج
(٢٦١، ١)	<وسهمه ا د >	—

(٢٦٥، ٣)	القطر	القطر <القائم>
(٢٦٧، ٩)	فمربع... معلوم	أو مربع... معلوماً
(٢٦٧، ١٠)	معلوم	معلومان
(٢٦٩، ٨)	مقالة	المقالة
(٢٧٣، ١١)	في	من
(٢٧٧، ١٥)	مربعي	< مجموع > مربعي
(٢٧٧، ١٨-١٩)	<كانت نسبة ... معلومة>	—
(٢٧٧، ١٩)	وكان ضربه فيه معلوماً	وكان ضربه فيه < مع مربع القطر المجانب > معلوماً
(٢٧٧، ١٩)	فكان	كان
(٢٧٩، ٨)	قطر القطع	قطراً للقطع
(٢٨٣، ١٧)	فضرب	وضرب
(٢٨٧، ٤)	التي	التي <هي>
(٢٩١، ١١)	المقالة	المقالة
(٢٩٥، ١٨)	التي	التي <هي>
(٢٩٩، ٧)	كلما	كل ما
(٢٩٩، ٨)	وكلما	وكل ما

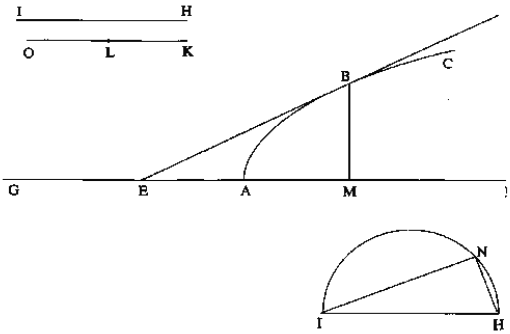
الشرح الريّاضيّ

إنَّ بنية "تمام كتاب المخروطات" بسيطة. يبدأ ابن الهيثم بمقدّمة قصيرة جدّاً يُشير فيها إلى حالة البحوث ويعرض باختصار هدفه. يلي مباشرة هذه المقدّمة، التي شرحناها آنفاً، عددٌ من المسائل الهندسية التي لا يُظهِر عرضها أيَّ اهتمام تعليمي. وذلك أنـــّـه قد يحدث، بالفعل، أن تأتي بعد مسألة صعبة، مسألة أخرى أبسطُ منها، كما سنرى لاحقاً. فالخاصّة المطلوبة هي التي تــُـرتِّب، في الواقع، مجموعة المسائل. وهكذا يسعى ابن الهيثم في المسألة الأولى إلى تحديد نقطة B من قطع مكافئ ذي رأس A، بحيث يقطع الخطُّ المماس في B المحورَ على النقطة E على أن تكون النسبة $k = BE/EA$ معلومة. وتــُـعالج المسائل ذات الأرقام ٢، ٣، ٤ وَ ٥ نفسَ الخاصّة، ولكن للقطوع المخروطية التي لها مركز. تُحدِّد الخواصُ المطلوبة، بهذه الطريقة، ترتيبَ القضايا. إنَّ عرض ابن الهيثم، لكلّ مسألة من المسائل التي يُعالِجُها منتظمٌ: تحليل وتركيب ومناقشة (تحديد). ولكن، قد يحدث أكثر من مرّة أن يترك ابن الهيثم المناقشة بدون أن يُتِمَّها. إنّ هذه النواقصَ مُدهشة عند رياضي من مستوى ابن الهيثم؛ وخاصّة أنــّـها تتواجد في كتابات أخرى له، مثل "المعلومات" على سبيل المثال. يوحي تفحُّصٌ حذِرٌ للنصّ بعدّة أسباب تــُـرجِع إلى عدّة أنواع من النواقص التي يكون من المؤسف الخلطُ فيما بينها. يبدو أنَّ أحد هذه الأسباب هو الصعوبة الموضوعية للقيام بمناقشة وجود الحلول وعددها عن طريق الهندسة. والسبب الآخر، الذي هو ذاتي بشكل واضح يَرجِع إلى خطأ ابن الهيثم الذي أخذ على نفسه أن لا يستخدِم إلا القطوع المخروطية، بينما كانت توجَد طرائق أكثر سهولة لمعالجة الموضوع وكان على علم بها. ولنشِر أيضاً إلى ميل ابن الهيثم إلى الإسراع بإنهاء دراسته للمسألة عندما تكون سهلة. سنرى لاحقاً هذه الأسباب المختلفة. ولكن، لكي نستطيع التمييز بين كلّ هذه الحالات ولكي نعطي الشروط الصحيحة للحلّ، قد نلجأ إلى القيام بالشرح مرّتين. الشرح الأوّل، وهو هندسيّ، يضعنا مباشرة في الوضع الرياضي لابن الهيثم؛ أمّا الآخر، وهو الشرح التحليليّ، فهو بالمقابل غريب عن ابن الهيثم، ولكنــّـه يساعدنا على إقامة المناقشة بدِقــّـة عندما يجب تكملة مناقشة ابن الهيثم. ليس من الضروري أن نــُـذكــِّـر هنا أنــّـنا لا ننسِب هذا المنهج إلى رياضيّي القرنين العاشر والحادي عشر الميلاديين.

لنبدأ الآن بتحليل كتاب ابن الهيثم ولنشرح، مع التفاصيل الضرورية، تطوُّرَ الأفكار الرياضية المُستَخدَمة. سوف نتبع بدورنا ترتيب العرض الذي قام به ابن الهيثم.

١- ليكن معنا قطع مُكافئ ABC ذو مِحور AD وخطّان HI وKLَ بحيث تكون النسبة $\frac{HI}{KL}=k$ معلومة.

المطلوب هو تحديد النقطة B على القطع المكافئ بحيث يقطع خطُّ التماسُّ في B المحورَ على النقطة E مع $\frac{BE}{EA}=k$.



الشكلان ١ و ٢

التحليل: إذا كان BE خطَّ التماسّ وكانت النقطة M المسقط العمودي للنقطة B على المحور، تكون القطعة BM إحداثيّة الترتيب للنقطة B، ويكون معنا: $AE = MA$ ("المخروطات"، المقالة الأولى، القضية ٣٥).

يكون معنا: $\frac{BE}{EM}=\frac{BE}{2EA}=\frac{k}{2}$ وَ $EM \perp BM$ ، فتكون الزاوية E معلومة. وهذا يفرض المتباينة $k > 2$، فتكون المتباينة $HI > 2KL$ شرطاً ضرورياً.

٢- **التركيب:** نحن نعرف، وفقاً للقضية ٥٠ من المقالة الثانية من كتاب "المخروطات"[1]، كيف نرسم خطّاً مماساً بحيث يُشكــِّل مع المحور زاوية معلومة.

[1] انظر القضية ٥٠ في نشرة هايبرغ (Heiberg)، شتوتغارت (Stuttgart) ١٩٧٤:
Les Coniques d'Apollonius de Perge, Œuvres traduites pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke (Paris, 1959)

ليكن $KO = 2LK$ ، $HI > KO$ ؛ إذا رسمنا في الدائرة ذات القطر HI وتراً IN بحيث يكون $IN = KO$ ، يكون معنا : $\frac{IH}{IN} = \frac{k}{2} = \frac{EB}{EM}$، فتكون الزاوية $\widehat{HIN}$ زاوية خطّ التماسّ المطلوبة، فنعرف بذلك كيف نرسم خطّ التماسّ هذا وهو BE. وهكذا نكون قد رسمنا المثلّث القائم الزاوية MEB المُشابه للمثلّث HIN، فيكون معنا إذاً: $\frac{BE}{EM} = \frac{HI}{IN}$، فنستنتج أنَّ: $\frac{BE}{EA} = \frac{HI}{KL} = k$.

٣- ليكن Γ قطعاً مخروطيّاً ناقصاً أو زائداً، ذا محور AD، ولتكن g/h نسبة معلومة مع $g > h$.

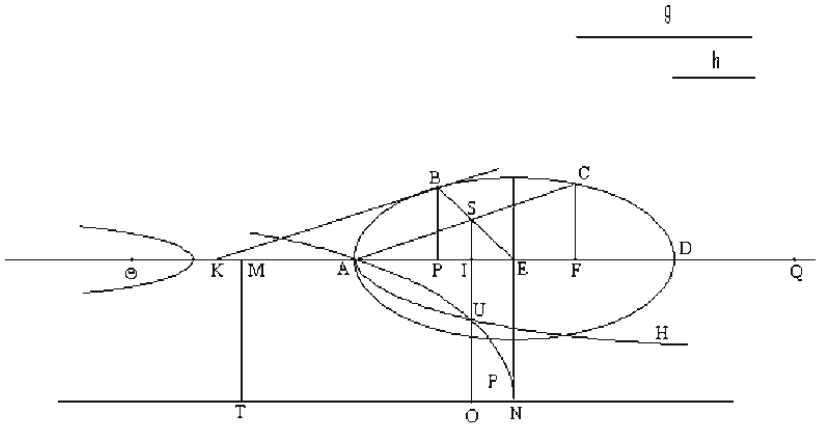
المطلوب هو تحديد نقطة B على القطع Γ، بحيث يقطع خطّ التماس في B المحورَ على النقطة مع: $\frac{g}{h} = \frac{BK}{KA}$.

إنـــّه من الواضح أنَّ $BK > AK$، لكلّ نقطة B من القطع المخروطيّ؛ فإذاً، يتطلّب تحديد B مع $\frac{g}{h} = \frac{BK}{KA}$، أنْ يكون $g > h$.

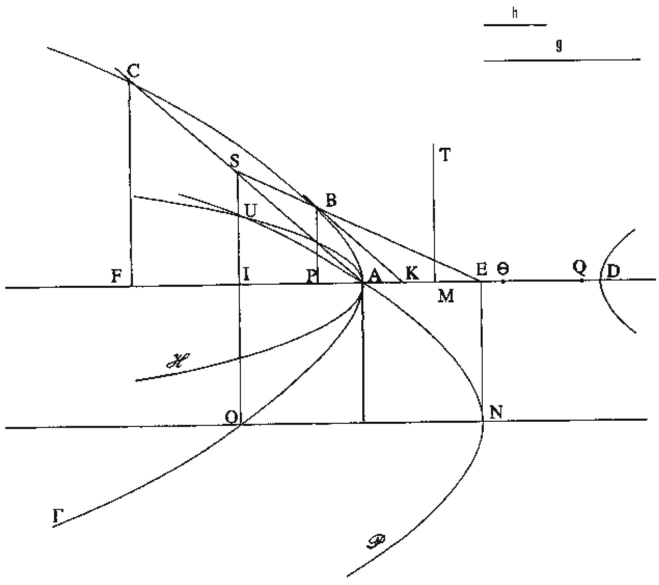
فإذا كانت Γ قطعاً ناقصاً، يكون خطّ التماسّ في النقطة B، التي هي طرف المحور العموديّ على AD، موازياً لـِ AD وتكون النقطة K في اللانهاية. يُمكن أن نعتبِر أنَّ هذه حالة حدّيّة حيث يكون $AK = BK$، فتكون هذه النقطة B حلاً للمسألة عندما يكون $g = h$.

ملاحظة: سنرمز بالحرف d إلى طول القطر، وبالحرف a إلى الضلع القائم الذي يتوافق معه.

تحليل: ليكن AD المحور (المُجانِب في حالة القطع الزائد)، وليكن E مركز القطع المخروطي Γ، KB الخطّ المطلوب في المسألة وَ AC الوتر، الموازي لـِ KB، الذي يقطع EB على النقطة S؛ ويكون معنا $SC = SA$.



الشكل ٣-١



الشكل ٣-٢

لتكن P، I وَ F المساقط العمودية للنقاط B، S وَ C على المحور DA. يكون معنا، وَفقاً للقضية ٣٧ من المقالة الأولى: $KE \cdot PE = EA^2$، فنستنتج أنَّ :

$$\frac{PE}{EA} = \frac{EA}{EK} = \frac{PA}{AK} \text{،} \qquad (1)$$

ولكن $\frac{AE}{EK}=\frac{SA}{BK}$، لأنّ $SA // BK$. يكون معنا إذاً: $\frac{SA}{BK}=\frac{PA}{AK}$، فنستنتج أنّ : $\frac{SA}{AP}=\frac{BK}{AK}=\frac{G}{H}$. ونستنتج أيضاً من توازي SA وَ BK أنّ: $\frac{EA}{EK}=\frac{ES}{EB}=\frac{EI}{EP}$، فيكون إذاً: $\frac{EI}{EP}=\frac{EP}{EA}$، وفقاً للعلاقة (١)، فنستنتج أنّ : $EI . EA = EP^2$.

إذا كانت النقطة M على الخطّ DA بحيث يكون $\frac{ME}{MA}=\frac{d}{a}$، تكون النسبة $\frac{ME}{EA}$، عندئذ، معلومة. ونحن نعلم، وَفقاً للقضيتين الثانية والثالثة من المقالة السابعة، أنّــه إذا كانت Θ نقطة على الخطّ DA بحيث يكون: $\frac{\Theta A}{\Theta D}=\frac{a}{d}$، يكون عندئذ: $\frac{\Theta F . AF}{AC^2}=\frac{\Theta D}{AD}$.[٢]

ولكنّ S هي وسط AC وَ I هي وسط AF، ومن جهة أخرى M هي وسط ΘA، لأنّ :

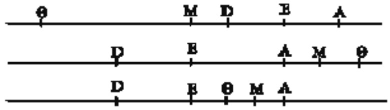
$$\frac{1}{2}\Theta A = AM \Leftarrow \frac{2AE}{\Theta A}=\frac{AD}{\Theta A}=\frac{AE}{AM} \Leftarrow \frac{\Theta D}{\Theta A}=\frac{ME}{MA}=\frac{d}{a}.$$

فنستنتج من ذلك أنّ: $\frac{ME}{AE}=\frac{\Theta D}{AD}=\frac{MI.IA}{AS^2}=\frac{\Theta F.AF}{AC^2}$، فنحصل على:

$\frac{g^2}{h^2}.\frac{ME}{EA}=\frac{ME}{AE}.\frac{AS^2}{AP^2}=\frac{MI.IA}{AP^2}$، فتكون هذه النسبة معلومة.

ليكن EN بحيث يكون $EA \perp EN$ ؛ و $EA = EN$، وليكن NO موازياً لـ EA. القطع المكافئ $\mathcal{P}$، ذو المحور NO والضلع القائم EN والرأس N، يمرُّ بالنقطة A. ويقطع الخطّ SI القطع المكافئ على النقطة U. ويكون معنا: $EA . EI = EA . ON = EN . ON = OU^2$

[٢] تُسمّى ΘA الخط الشبيه للنسبة (أبلونيوس، المقالة السابعة، القضيتان ٢ و٣)؛ أمّا $D\Theta$ فليس لها اسم. تكون Θ خارج الخط $[DA]$، في حالة القطع الناقص، ويكون معنا: إذا كان $a < d$ (انظر الخط الأوّل في الشكل، أدناه)، يكون $d = \Theta D - \Theta A$ ؛ إذا كان $a > d$ (انظر الخط الثاني في الشكل، أدناه) ، يكون $d = \Theta A - \Theta D$. وتكون Θ بين A وَ D، في حالة القطع الزائد (انظر الخط الثالث في الشكل، أدناه)، ويكون $d = \Theta D + \Theta A$.



وتكون M، في جميع الحالات، في وسط ΘA، ويكون $ME = \Theta D / 2$.

$EP^2 =$، فيكون معنا إذاً $EP = UO$، فنستنتج أنَّ: $AP = UI$ [٣]. يكون معنا إذاً: $\frac{MI.IA}{UI^2} = \frac{ME}{EA}.\frac{g^2}{h^2}$؛ وهذه النسبة معلومة، فنستنتج أنّ U هي على قطع زائد $\mathcal{H}$ ذي محور AM وذي ضلع قائم معلوم. تكون النقطة U إذاً نقطة تقاطع بين القطع الزائد $\mathcal{H}$ والقطع المكافئ $\mathcal{P}$، فهي معلومة. ونستنتج من النقطة U بالتتابع النقاط I، F، C، S وَ B والخطّ KB الموازي للخطّ CS.

وإذا تناولنا الحالة التي يكون فيها الخطّ AD المحورَ الأصغر ("السهم الأقصر" كما يقول ابن الهيثم) للقطع الناقص، يكون العمل هو نفسه بالضبط، ولكن مع $\frac{ME}{MA} = \frac{d}{a} > 1$، فتكون النقطة M (التي هي خارج الخطّ AE) عندئذ من جهة النقطة E. النقطة I، التي هي بين A وَ E، توجَد عندئذ بين A وَ M والقطع المخروطي المساعد $\mathcal{H}$ الذي يمرُّ بالنقطة U لم يَعُد قطعاً زائداً، بل أصبح قطعاً ناقصاً.

تناول ابن الهيثم هذه الحالة، ولكنّـه لم يوَسِّعها لأنّـها مشابهة تماماً للحالة السابقة.

٤- **التركيب**: القطع المخروطي(Γ) ذو المحور AD والمركز E معلومٌ، والنقطة M التي تــُحقــِّق $\frac{ME}{MA} = \frac{d}{a}$ معلومة، فيكون الخطّ AM معلوماً (انظر الشكلين ٣-١ وَ ٣-٢).

نرسم كما فعلنا سابقاً القطع المكافئ $\mathcal{P}$.

إذا وضعنا: $\frac{AE}{EQ} = \frac{g^2}{h^2}$ وَ $\frac{ME}{EQ} = \frac{AM}{MT}$ ، يكون الخطّ TM معلوماً، وَ TM هو الضلع القائم للقطع الزائد المُحدَّد أعلاه. تــُعطي مُعادلة $\mathcal{H}$، بالفعل:

$$\frac{IM.IA}{IU^2} = \frac{ME}{AE}.\frac{g^2}{h^2} = \frac{ME}{AE}.\frac{AE}{EQ} = \frac{ME}{EQ} = \frac{AM}{MT}.$$

إذا تقاطع $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$ على النقطة U (انظر المناقشة) نُخرِج IU بحيث يكون $IU \perp EA$ ؛ لتكن F بحيث يكون $2AI = AF$؛ ولتكن C نقطة القطع المعلوم Γ التي تــُحقــِّق $CF \perp EA$ ؛ تقطع CA الخطَّ IU على النقطة S؛ يكون معنا $SC = SA$؛ الخطُّ SE هو قطر

[٣] يكون معنا $OI - OU = UI$ للقطع المكافئ ، $OU - OI = UI$ للقطع الزائد، إذا أخذنا U على نصف القطع المكافئ NA.

للقطع Γ ويلتقي بـ Γ في B؛ الخطّ الموازي للخطّ SA المارّ بالنقطة مُماسٌ للقطع Γ في النقطة B، ويقطع الخطّ EA على النقطة K. لنـُبيِّن أنّ: $\frac{BK}{KA}=\frac{g}{h}$.

ليكن $BP \perp EA$ ، فيكون معنا: $EI . EA = EP^2$ (خاصّة Γ) وَ $NO . NE = OU^2$ (معادلة $\mathcal{P}$)، فنستنتج أنّ $EP = OU$ وَ $AP = UI$.

يكون معنا: $\frac{MI.IA}{AS^2}=\frac{ME}{AE}$ (خاصّة Γ)، $\frac{IM.IA}{IU^2}=\frac{AM}{MT}$ (خاصّة $\mathcal{H}$)، فيكون إذاً:

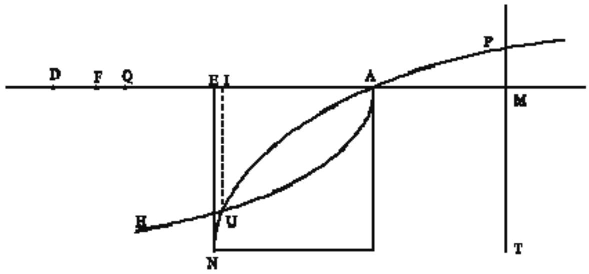
$$\frac{g^2}{h^2}=\frac{AE}{EQ}=\frac{ME}{EQ}.\frac{AE}{ME}=\frac{AM}{MT}.\frac{AE}{ME}=.\frac{AS^2}{AP^2}=\frac{AS^2}{IU^2}،$$

فنستنتج أنّ : $\frac{AS}{AP}=\frac{g}{h}$، ولكنّ $KB // AS$ تؤدّي إلى: $\frac{BK}{AK}=\frac{AS}{AP}$، فنستنتج أنّ: $\frac{BK}{KA}=\frac{g}{h}$.

لنقم بالمناقشة في الحالة التي يكون فيها Γ قطعاً ناقصاً ذا محور أعظم DA. يكون MA محور القطع الزائد $\mathcal{H}$ ويكون TM ضلعه القائم (نأخذ فرعَه ذا الرأس A). يكون معنا:

$\frac{AM}{MT}=\frac{ME}{EQ}=\frac{ME.AE}{EA.EQ}$. نحن نعلم أنّ: $\frac{g^2}{h^2}=\frac{AE}{EQ}$ وأنّ $h > g$ ، فيكون $QE < AE$.

يكون معنا إذاً: $EQ. EA > EN^2 - EA^2$، $\frac{ME.AE}{EN^2}<\frac{AM}{MT}$. يقطع Γ الخطّ EN بين E وَ N.



الشكل ٤

إنّ للقطعين $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$ محورين متوازيين وتقعّرين متخالفين، والنقطة A هي نقطة تقاطع بينهما، فيقطع $\mathcal{H}$ إذاً القوس $\widehat{AN}$ من القطع المكافئ على النقطة U، وتكون U بين A وَ N. وتكون النقطة I، مسقط U على المحور، بين A وَ E؛ فتكون النقطة F، التي تُحقّق

$IA = 2\ FA$ ، بين A وَ D؛ ويتوافق مع F نقطة، C، على القطع الناقص، فنحصل على النقطة B.

فتكون المسألة قابلة دائماً للحلّ.

٥- المناقشة في الحالة التي يكون فيها Γ قطعاً زائداً ذا محور مُجانب DA؛ نتناول فرعه Γ_A ذا الرأس A. تقَع النقطة M بين A وَ D. ولتكن B نقطة على امتداد DA المستقيم بحيث يكون: $AB^2 = 2AM \cdot AD$.

يكون لدينا الشرط التالي لإمكانية حلّ المسألة: $\frac{g^2}{h^2} \geq \frac{2AD + 2AM + 3AB}{ME}$.

لنأخذ النقطة S، على القطع المكافئ $\mathcal{P}$، بحيث يكون $AS \perp NO$، ولنأخذ U نقطة تقاطع بين SB وَ $\mathcal{P}$. ولكنّ U تسقط في I على DA، وفي O على محور $\mathcal{P}$ وفي V على الخطّ الموازي للمحور الخارج من S.

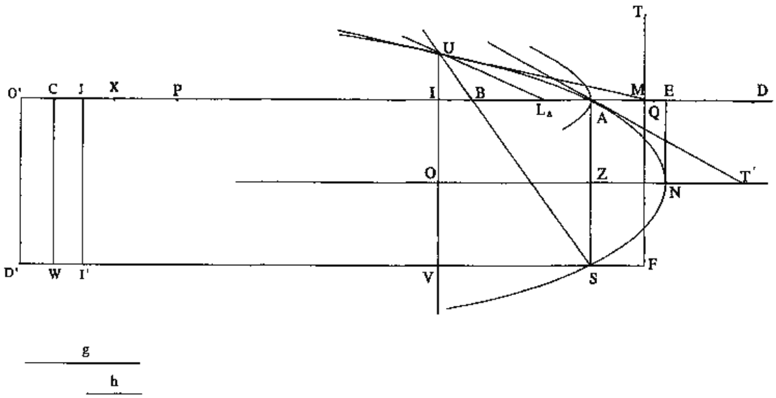
يكون معنا: $EA^2 = IO^2$ ، $IO^2 + EA \cdot AI = EA^2 + EA \cdot AI = EA \cdot NO = UO^2$،

$UV \cdot UI = (UO + OI) \cdot UI = UO^2 - IO^2 = EA \cdot AI$ وَ $\frac{UI}{BI} = \frac{UV}{VS} = \frac{UV}{AI} = \frac{EA}{UI}$.

فنحصل على: $UI^2 = EA \cdot BI$.

ويكون معنا أيضاً: $\frac{UI}{BI} = \frac{SA}{AB}$، فنحصل على: $UI \cdot AB = 2EA \cdot BI$، فيكون بالتالي: $AB = 2UI$، فنحصل على: $SA \cdot BI = \frac{1}{2} AB^2 = AM \cdot AD$ ؛ ولكنّ $SA = AD$ ، فنحصل على $BI = AM$.

لنأخذ النقطتين P وَ C اللتين تُحقــقّان $2AD = IP$ و $2AB = PC$ ، فيكون معنا عندئذ: $2AD + 2AM + 3AB = CM$. فيُصبح الشرط الذي وضعناه: $\frac{G^2}{H^2} \geq \frac{CM}{ME}$.



الشكل ٥-١

ا) لنفترض أنّ: $\frac{CM}{ME}=\frac{g^2}{h^2}$ ، فيكون: $\frac{AE}{EQ}=\frac{CM}{ME}$.

ليكن X وسط PC؛ فيكون معنا:

$$2UI = AB = PX \text{ ، } 2VI = 2AD = PI \text{ ، } 2UV = XI \text{ ، } 2VU \,.\, UI = XI \,.\, UI$$

ولكنّ: $VU \,.\, UI = UO^2 - OI^2 = EA \,.\, AI = \frac{1}{2}\, VI \,.\, AI$ ، فإذاً:

$$VI \,.\, AI = XI \,.\, UI. \qquad (*)$$

ويكون معنا، من جهة أخرى، $CX = AB = 2UI$، فنحصل على

$$CX \,.\, IU = AB \,.\, UI = 2UI^2 = 2AE \,.\, BI \text{ ، } VI \,.\, AM = CX \,.\, IU.$$

فنستنتج، باستخدام (*)، أنّ: $CI \,.\, IU = VI \,.\, MI$ ، فيكون: $\frac{VI}{IU}=\frac{CI}{IM}$ وَ $\frac{VU}{UI}=\frac{CM}{MI}$.

ولكنّ: $\frac{CM}{AE}=\frac{CM}{MI}.\frac{MI}{AE}$ ، ومعنا أيضاً: $\frac{MI.IA}{UV.UI}=\frac{MI.IA}{IA.AE}=\frac{MI}{AE}$ وَ $\frac{UV.UI}{UI^2}=\frac{UV}{UI}=\frac{CM}{MI}$ ،

فنحصل على: $\frac{MI.IA}{UI^2}=\frac{CM}{AE}$.

إنَّ لدينا، وفقاً للفرضيات: $\frac{CM}{AE}=\frac{ME}{EQ}=\frac{AM}{MT}$، فنحصل على: $\frac{MI.IA}{UI^2}=\frac{AM}{MT}$؛ تعني هذه العلاقة أنَّ U تقع على القطع الزائد $\mathcal{H}$ ذي المحور MA والضلع القائم TM. فإذا كان $\frac{CM}{ME}=\frac{g^2}{h^2}$، تكون U عندئذ نقطة مشترَكة بين $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$، فيكون للمسألة حلٌّ واحدٌ على الأقلّ.

لنبيِّن أنَّ هناك حلاً ثانياً.

ليكن AT' الخطّ المماسّ للقطع المكافئ في النقطة A، وليكن Z وسط SA، فيكون معنا: $2AZ = 2ZN = ZT'$. لنرسم UL_a بحيث يكون $UL_a \parallel AT'$، وحيث تكون L_a نقطة على الخطّ IA؛ والمثلّثان UIL_a وَ AZT' متشابهان، فيكون إذاً $IL_a = 2UI = AB$ ؛ فيكون عندئذ $IB = AL_a = AM$، وبالتالي يكون الخطّ MU مماسّاً للقطع المكافئ في النقطة U.

ولنرسم الخطَّين WC وَ FM العموديين على SV. نستنتج من المعادلة $\frac{CM}{MI}=\frac{VU}{UI}$،

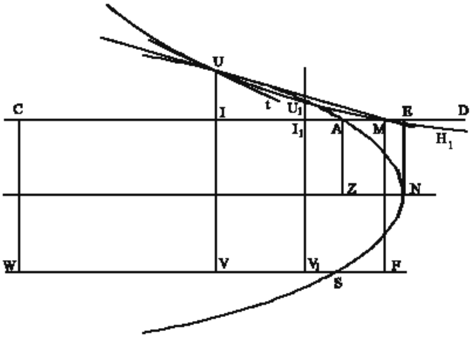
بالتتابع: $\frac{MC}{CI}=\frac{UV}{VI}$، $CI \,.\, UV = CM \,.\, IV$ وَ $VW \,.\, UV = CM \,.\, MF$ ؛

وهذه المعادلة الأخيرة تعني أنَّ القطع الزائد $\mathcal{H}_1$ ، ذا الخطَّين المقارَبين المتعامدين CW وَ FW، والذي يمرُّ بالنقطة M ، يمرُّ أيضاً بالنقطة U. يوجد الخطُّ UM داخل هذا القطع الزائد ولكنَّ الخطَّ MU مماسٌّ للقطع المكافئ؛ فكلُّ خطٍّ خارِج من U وموجود بين UM والخطّ المماسّ للقطع الزائد يمرُّ إذاً داخل القطع المكافئ، ويقطع في آن واحد القطع الزائد $\mathcal{H}_1$ والقطع المكافئ $\mathcal{P}$ ؛ فإذاً $\mathcal{H}_1$ يقطع $\mathcal{P}$ على نقطة بين A وَ U. لتكن U_1 هذه النقطة.

نـُرفِق بهذه النقطة U_1 الموجودة على $\mathcal{H}_1$، نقطتين I_1 وَ V_1؛ يكون معنا:

$CM \,.\, MF = CI_1 \,.\, U_1V_1$، ولكنَّ $I_1V_1 = MF$ ، فنستنتج أنَّ $\frac{CM}{CI_1}=\frac{U_1V_1}{I_1V_1}$.

وإذا فعلنا بالنسبة إلى النقطة U_1 ما فعلناه بالنسبة إلى النقطة U (انظر أعلاه ص ٧٩-٨٠)، نـُبيِّن أنَّ:



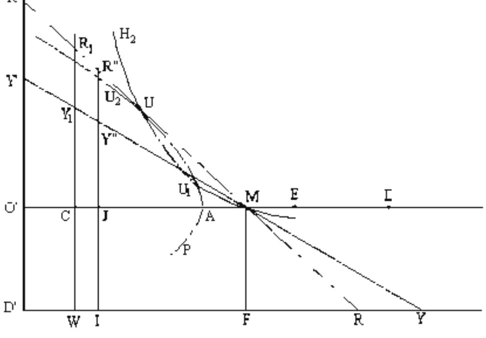
الشكل ٥ـ٢

(الخطُّ UM مماسٌ لِـ $\mathcal{P}$، الخطُّ Ut مماسٌ لِـ $\mathcal{H}_1$)

$\frac{AM}{MT} = \frac{MI_1 . AI_1}{U_1I_1^2}$، فتكون النقطة U_1 على القطع الزائد $\mathcal{H}$.

يقطع القطعُ الزائد $\mathcal{H}$ القطعَ المكافئ $\mathcal{P}$ على نقطتين U_1 وَ U مُختلفتين عن النقطة A. وهاتان النقطتان U_1 وَ U تسقطان على امتداد AD المستقيم، بعد A؛ وهما تتوافقان مع نقطتين على فرع القطع الزائد المعلوم Γ_A (ومع النقطتين المتناظرتين مع النقطتين الأخيرتين بالنسبة إلى الخطّ AD)؛ ويكون الخطّ المماس على Γ_A في كلٍ من هاتين النقطتين مُحقــقّاً للخاصة المطلوبة.

ب) لنفترض أنّ: $\frac{CM}{ME} > \frac{g^2}{h^2}$، وليكن $\frac{O'M}{ME} = \frac{g^2}{h^2}$ مع $CM < O'M$. ليكن $O'D'$ بحيث يكون $FW \perp O'D'$.



الشكل ٥ـ٣

الخطُّ المُماسّ في M للقطع الزائد $\mathcal{H}_1$، ذو الخطَّين المقارَبين المتعامدين، يقطع الخطَّين المقارَبين WF وَ WC على النقطتين Y وَ Y_1، ويقطع الخطَّ $O'D'$ على النقطة Y'؛ ويقطع الخطُّ UM، الذي يصل بين نقطتين من $\mathcal{H}_1$، هذه الخطوطَ الثلاثة بالترتيب على R وَ R_1 وَ R'؛ ويكون معنا:

$MY = MY_1$ (خاصّة خطّ التماسّ)، $MR = MR_1$ (خاصّة الخطّ القاطع UM).

يكون معنا إذاً: $MY' > MY$ وَ $UR' > MR$.

القطعُ الزائد $\mathcal{H}_2$، ذو الخطَّين المقارَبين المتعامدين $O'D'$ وَ FD' ، يقطع الخطَّ MY على نقطة من MY' ويقطع الخطّ MU على نقطة من UR'. ويقطع الخطُّ $Y'Y$ القطعَ المكافئ $\mathcal{P}$ ؛ ويقطع القطعُ الزائد $\mathcal{H}_2$ ، الذي يمرُّ بالنقطة M، القطعَ المكافئ $\mathcal{P}$ على نقطتين: الأولى U_1 بين A و U والثانية U_2 ما بعد U. ونُبيِّن أنَّ U_1 وَ U_2 تقعان على القطع الزائد $\mathcal{H}$، ونعمل كما فعلنا في الحالة السابقة مع إبدال MC بـِ MO'.

هاتان النقطتان U_1 وَ U_2 تتوافقان مع نقطتين على فرع القطع الزائد المعلوم Γ_A (ومع النقطتين المتناظرتين مع النقطتين الأخيرتين)؛ ويكون الخطّ المماسّ على Γ_A في كلٍّ من هاتين النقطتين مُحقــِّقاً للخاصّة المطلوبة.

جـ) لنفترِض أنَّ: $\frac{g^2}{h^2} < \frac{CM}{ME}$، ولتكن النقطة J بحيث تتحقــَّق المعادلة $\frac{g^2}{h^2} = \frac{JM}{ME}$ ، فيكون معنا $CM > JM$.

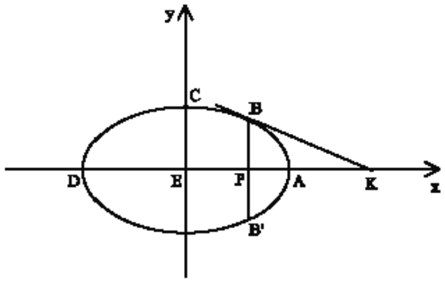
يقطع الخطُّ، الخارج من J عمودياً على CM، الخطَّ FW والخطّ المماسّ YM، وفقَ الترتيب، على النقطتين I' وَ Y''؛ ويكون معنا: $MY'' < MY$.

القطع الزائد $\mathcal{H}_3$ الذي يمرُّ بالنقطة M والذي يكون $I'J$ وَ $I'F$ خطّيه المقارَبين، يقطع من جديد الخطّ MY على نقطة بين M وَ Y؛ فهو لا يقطع إذاً القطع المكافئ $\mathcal{P}$.

دراسة تحليلية كاملة، مستقلة عن الطريقة التي اتبعها ابن الهيثم، للقضايا ٣ وَ ٤ وَ ٥

١- حالة القطع الناقص ذي المحور DA. لنضع $d = DA$، $a =$ الضلع القائم المُرفق بـ DA وَ $k = \frac{d}{a}$.

المطلوب هو إيجاد نقطة B بحيث يُحقق خطّ التماسّ KB المعادلة $\frac{BK}{KA} = \frac{g}{h}$ مع $\frac{g}{h} > 1$.



الشكل ٥-٤

تُكتب معادلة القطع الناقص المنسوبة إلى محوريه:

$$x^2 + k.y^2 = \frac{d^2}{4} \qquad (1)$$

ليكن $B(x, y)$ مع $0 < x < \frac{d}{2}$ ؛ يكون معنا، وفقاً لخواصّ خطّ التماسّ، $\overline{EP}.\overline{EK} = \frac{d^2}{4}$، فيكون $\overline{EK} = \frac{d^2}{4x}$ مع $(x \neq 0)$، $\frac{\overline{EP}.\overline{PK}}{PB^2} = \frac{d}{a}$، فيكون $\overline{PK} = \frac{dy^2}{ax}$. نستنتج من ذلك أنّ:

$$\overline{AK} = \overline{EK} - \overline{EA} = \frac{d}{2x}\left(\frac{d}{2} - x\right) \text{ وَ } BK^2 = BP^2 + PK^2 = y^2 + \frac{d^2}{a^2}.\frac{y^4}{x^2} = \frac{y^2}{x^2}\left[x^2 + k^2y^2\right].$$

يكون معنا إذاً: $\frac{BK^2}{KA^2} = \frac{g^2}{h^2} = \frac{4y^2}{d^2}.\frac{x^2 + k^2y^2}{\left(\frac{d}{2} - x\right)^2}$. ولكن، وفقاً للمعادلة (١)، $y^2 = \frac{1}{k}\left(\frac{d^2}{4} - x^2\right)$،

فيكون معنا، إذاً، مع الافتراض أنّ $B \neq A$، أيْ $x \neq \frac{d}{2}$: $\frac{g^2}{h^2} = \frac{4}{kd^2}.\frac{\frac{d}{2} + x}{\frac{d}{2} - x}.[x^2(1-k) + k\frac{d^2}{4}]$.

إذا كانت النقطة B تُحقــق الشروط المطلوبة في المسألة، فإنّ إحداثيّتها الأولى تحقّق المعادلة: $4.\left(\frac{d}{2}+x\right).[x^2(1-k)+k\frac{d^2}{4}]-\frac{g^2}{h^2}.kd^2\left(\frac{d}{2}-x\right)=0$.

تُكتَب هذه المعادلة على الشكل التالي:

$$f(x)=4.x^3(1-k)+2dx^2(1-k)+kd^2x\left(1+\frac{g^2}{h^2}\right)+k\frac{d^3}{2}\left(1-\frac{g^2}{h^2}\right)=0 .$$

– إذا كان $k = 1$، يُصبح القطع الناقص دائرة. وتُصبِح المعادلة $f(x)=0$ من الدرجة الأولى؛ فيكون جذرها: $x_0=\frac{\frac{g^2}{h^2}-1}{\frac{g^2}{h^2}+1}.\frac{d}{2}$ ، $\frac{g}{h}>1 \Leftarrow$ $0<x_0<\frac{d}{2}$.

يكون عندئذ للمسألة حلٌّ. ويُمكن، إنّـه من الواضح، أن نقوم بالبناء بواسطة المسطرة والبركار. ولا يتناول ابن الهيثم هذه الحالة الخاصّة، إذ إنّـه لم يكن يُعالج إلا القطوع المخروطية . ولنذكّر أنّ الدائرة لم تُعتبَر كقطع مخروطيّ إلا بعد أن أصبحت تُعرَّف بواسطة مُعادلاتها.

- إذا كان $k \neq 1$، يكون معنا: $f(0)=\frac{kd^3}{2}\left(1-\frac{g^2}{h^2}\right)$ وَ $f(\frac{d}{2})=d^3>0$؛

وكذلك: إذا كان $x \to \pm\infty$ ، يكون: $f(x) \cong 4x^3(1-k)$.

- إذا كان $k > 1$، يكون معنا: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

فيكون للمعادلة $f(x) = 0$، ثلاثة جذور x_1، x_2، x_3، مع: $x_1<0$ ، $0<x_2<\frac{d}{2}$، $x_3>\frac{d}{2}$؛

فنستنتج أنّ الجذرَ x_2 وحده مقبولٌ.

- إذا كان $k < 1$، يكون معنا: $f'(x)=12(1-k).x^2+4d(1-k).x+kd^2\left(1+\frac{g^2}{h^2}\right)$.

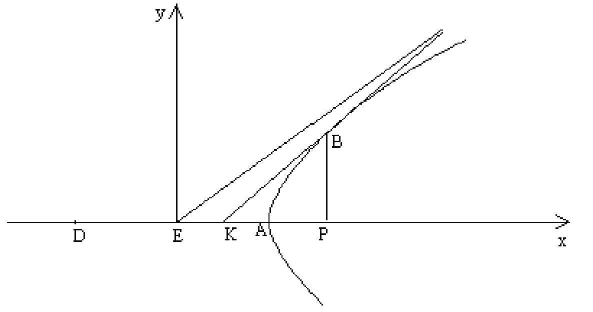
يبقى هذا المتعدِّد الحدود من الدرجة الثانية موجباً إذا كان $x \leq 0$، فتكون الدالة f تزايديّة في هذه الفسحة، ويكون للمعادلة $f(x) = 0$ جذرٌ وحيدٌ في الفسحة $]0, \frac{d}{2}[$.

وهكذا يكون للمسألة حلٌّ وحيدٌ، مهما كان القطع الناقص المعلوم، إذا كان $\frac{g}{h} > 1$. وتبقى هذه المناقشة صالحة في الحالة التي لم يتناولها ابن الهيثم، حيث يكون DA المحور الأصغر للقطع الناقص. ويكون القطعُ المخروطيّ المساعِد، الذي يُستخدَم في هذه الحالة، قطعاً ناقصاً وليس قطعاً زائداً (انظر الحاشية ٣، ص. ٧٦).

٢- حالة القطع الزائد ذي المحور المجانب DA. لنضع $d = DA$، و $k = \frac{d}{a}$.

تكتب معادلة القطع الزائد: $x^2 - ky^2 = \frac{d^2}{4}$.

ليكن معنا $B(x, y)$ مع $x > \frac{d}{2}$ ، وليكن KB خط التماسّ في B: $\overline{EP}.\overline{EK} = \frac{d^2}{4}$، فيكون



الشكل ٥-٥

$$\overline{EK} = \frac{d^2}{4x}\text{، } 0 < \overline{EK} < \frac{d}{2}\text{، } \overline{AK} = \overline{EK} - \overline{EA} = \frac{d}{2x}\left(\frac{d}{2} - x\right)\text{، } \overline{AK} < 0\text{، } \frac{\overline{PE}.\overline{PK}}{PB^2} = \frac{d}{a} = k\text{،}$$

فيكون $\overline{KP} = k\frac{y^2}{x}$، $BK^2 = PK^2 + PB^2 = \frac{y^2}{x^2}\left[x^2 + k^2y^2\right]$، $\frac{BK^2}{AK^2} = \frac{g^2}{h^2} = \frac{4y^2}{d^2}\cdot\frac{x^2 + k^2y^2}{\left(1 - \frac{d}{2}\right)^2}$ ،

ولكنّ $y^2=\frac{1}{k}\left(x^2-\frac{d^2}{4}\right)$ ، فنحصل، إذا افترضنا أنّ $A\neq B$، أيْ $x\neq\frac{d}{2}$، على $\frac{g^2}{h^2}=\frac{4}{kd^2}.\frac{x+\frac{d}{2}}{x-\frac{d}{2}}.[x^2(1+k)-k\frac{d^2}{4}]$، فيكون:

$$f(x)=4\left(x+\frac{d}{2}\right)[x^2(1+k)-k\frac{d^2}{4}]-kd^2\frac{g^2}{h^2}\left(x-\frac{d}{2}\right)=0$$ ،

$f(0)=\frac{kd^3}{2}\left(\frac{g^2}{h^2}-1\right)>0$ ، $f\left(\frac{d}{2}\right)=d^3>0$ ،

وكذلك إذا كان $x\to\pm\infty$، يكون: $f(x)\cong 4x^3(1+k)$ ، فيكون إذاً:

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

فيكون للمعادلة $f(x)=0$، جذران موجودان في الفسحة $]\frac{d}{2},+\infty[$.

وتكتب المعادلة على الشكل التالي:

$$(\alpha)=f(x)=4x^3(1+k)+2d(1+k)x^2-kd^2\left(1+\frac{g^2}{h^2}\right)x+\frac{kd^3}{2}\left(\frac{g^2}{h^2}-1\right)=0 .$$

فيكون معاً: $(\beta)=f'(x)=12x^2(1+k)+4d(1+k)x-kd^2\left(1+\frac{g^2}{h^2}\right)$.

يكون للمعادلة $f'(x)=0$ جذران، x'' و x'، متضادا الإشارة. فنحصل على لوحة التغيّرات التالية:

x	$-\infty$		x'		0		x''		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$			m	$\nearrow$	$+\infty$

الحدُّ الأقصى M موجبٌ لأنَّ $0 < f(0) < M$؛ فيكون للمعادلة $f(x) = 0$ جذرٌ x_1، مع $x_1 < x' < 0$. أمّا وجود الجذرين الآخرين، فإنّــه يتعلّق بإشارة الحدّ الأدنى m. والشرطان الضروريان والكافيان لكي يكون للمعادلة $f(x) = 0$ جذرٌ مزدوِجٌ أو جذران بسيطان في الفسحة $]\frac{d}{2},+\infty[$، هما: ١) $x'' > \frac{d}{2}$ وَ ٢) $m = f(x) \leq 0$.

يعني الشرط الأوّل، $x'' > \frac{d}{2}$، أنَّ $\frac{d}{2}$ موجود بين جذريْ $f'(x)$: x'' وَ x'، أيْ أنَّ:

$f'(\frac{d}{2})<0$. يكون معنا: $f'\left(\frac{d}{2}\right)=5d^2(1+k)-kd^2\left(1+\frac{g^2}{h^2}\right)=d^2\left(5+4k-k\frac{g^2}{h^2}\right)$.

فيُكتَب هذا الشرط على الشكل التالي:

$$k\frac{g^2}{h^2}>5+4k \Leftrightarrow \frac{g^2}{h^2}>\frac{5+4k}{k} \qquad (١)$$

لنفرض أنَّ: $\frac{5}{k}>\frac{g^2}{h^2}-4$. يُعادل الشرط الثاني المتباينة $Mm \leq 0$، لأنَّ $M > 0$؛ أمّا Mm فهو لا يختلف عن مُمَيِّز المعادلة إلا بمُعامِل عدديّ موجب. ونحن نحسبه بواسطة باقي قسمة f على f'؛ يساوي هذا الباقي: $\frac{d^2(\lambda x+\mu)}{9}=-\frac{2d^2x}{9}\left(3k\frac{g^2}{h^2}+4k+1\right)+\frac{kd^3}{9}\left(5\frac{g^2}{h^2}-4\right)$

مع $\lambda = -2\left(3k\frac{g^2}{h^2}+4k+1\right)$ وَ $\mu = kd\left(5\frac{g^2}{h^2}-4\right)$.

فيكون معنا إذاً: $M=\frac{d^2}{9}(\lambda x'+\mu)$، $m=\frac{d^2}{9}(\lambda x''+\mu)$

وَ $Mm=\frac{d^4}{81}\left(\lambda^2x'x''+\lambda\mu(x'+x'')+\mu^2\right)$، حيث يكون: $x'x''=-\frac{kd^2}{12(1+k)}\left(\frac{g^2}{h^2}+1\right)$ وَ

$x'+x''=-\frac{d}{3}$، وفقاً للمعادلة (β). وهكذا نحصل على:

$$(\gamma) = \lambda^2x'x''+\lambda\mu(x'+x'')+\mu^2=$$

$$\frac{3kd^2}{1+k}\left(-k^2\frac{g^6}{h^6}+8k^2\frac{g^4}{h^4}-16k^2\frac{g^2}{h^2}+11k\frac{g^4}{h^4}-12k\frac{g^2}{h^2}+\frac{g^2}{h^2}-1\right)$$

$$\frac{3kd^2}{1+k}\left(-k^2\frac{g^2}{h^2}\left(\frac{g^2}{h^2}-4\right)^2+k\frac{g^2}{h^2}\left(11\frac{g^2}{h^2}-12\right)+\frac{g^2}{h^2}-1\right)=.$$

لقد رسمنا الشكل بعد أن تبنّينا الإحداثيتين: $x=\frac{k}{10}$ وَ $y=\frac{g^2}{h^2}-4$ ؛ وإذا استخدمنا هاتين الإحداثيتين، تُكتَب المتباينة التالية التي تُعبِّر عن الشرط الثاني، على الشكل التالي:

$$(\gamma')\quad =-100x^2y^2(y+4)+10x(y+4)(11y+32)+y+3\leq 0،$$

بينما يُكتَب الشرط الأوّل $y>\frac{1}{2x}$. وهذا ما يُعادِل $x>\frac{1}{2y}$ ، إذا كان $y>0$. ولكن ، إذا جعلنا x مساوياً لِـ $\frac{1}{2y}$ في متباينة (γ') ، نحصل على: $0<y+3+\left(3+\frac{16}{y}\right)10(y+4)$، وهذا يعني أنّ $\frac{1}{2y}$ توجَد بين جذري المعادلة (γ')، بينما تعني المتباينة (γ') أنّ x خارجٌ عن الفسحة التي بين هذين الجذرين. وهكذا نرى أنّ الشرطين مُعادلان لِـ :

١) $\frac{g}{h}>2$، ٢) $1+\frac{g^2}{h^2}-\left(11\frac{g^2}{h^2}-12\right)k\frac{g^2}{h^2}-\left(\frac{g^2}{h^2}-4\right)^2 k^2\frac{g^2}{h^2}\leq 0$

يُكتَب الشرط الذي قدَّمه ابن الهيثم على الشكل التالي: $\frac{g^2}{h^2}\geq 4+\frac{6}{k}\left(1+\sqrt{1+k}\right)$، لأنّ

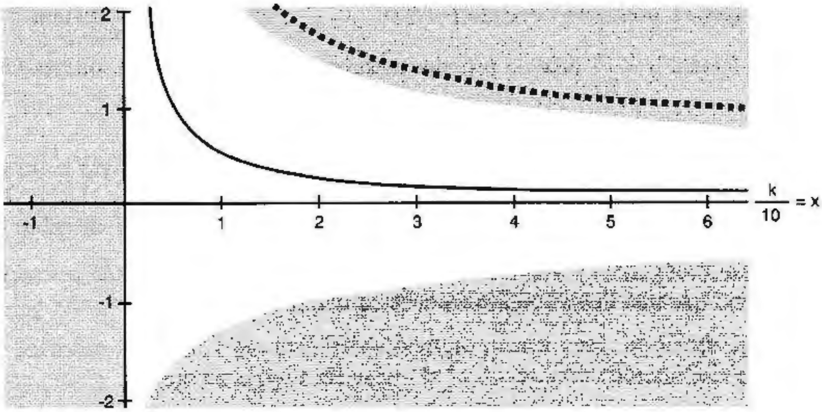
$$ME=\frac{kd}{2(1+k)} ، AM=\frac{d}{2(1+k)} \text{ وَ } AB=\frac{d}{\sqrt{1+k}}.$$

وإذا استخدمنا الإحداثيتين x و y ، يُكتَب هذا الشرط كما يلي:

$$y\geq\frac{3}{5x}\left(1+\sqrt{1+10x}\right)\text{، أيْ: } x\geq\frac{6}{5y}\left(1+\frac{3}{y}\right).$$

وإذا جعلنا في (γ') : $x=\frac{6}{5y}\left(1+\frac{3}{y}\right)$ ، نحصل على: $0>\left(11y^2+8\times 12y+16\times 12\right)\frac{y+3}{y^2}-$.

وهذا يُبيِّن أنّ الشرطين الضروريَيْن والكافيَيْن ١ وَ ٢ يتضمَّنان شرط ابن الهيثم الذي يكون إذاً كافياً فقط.



الشكل ٥-٦

$y=\frac{g^2}{h^2}-4$ ؛ المناطق الرمادية في الشكل هي المناطق المقبولة المُحدّدة بالمتباينة (γ)؛

الخط المنحني المتواصل محدّد بالمعادلة $\frac{g^2}{h^2}-4=\frac{5}{k}$ أو $1 = 2yx$؛

الخط المنحني المتقطع محدّد بالمعادلة $\frac{g^2}{h^2}-4=\frac{6}{k}\left(1+\sqrt{1+k}\right)$ ؛

والمنطقة المقبولة وفقاً لشرط ابن الهيثم هي التي فوق هذا الخط المنحني.

يُمكننا أن نرى ببساطة أنّ شرط إمكان حلّ المسألة يُعبَّر عنه بكون النسبة $\frac{g}{h}$ أكبر من حدٍّ أدنى متعلّق بـ k، أو مساوية لهذا الحدّ. تساوي النسبة $\frac{BK^2}{AK^2}$ بالفعل: $\frac{4}{kd^2}\frac{x+\frac{d}{2}}{x-\frac{d}{2}}\left(x^2(1+k)-\frac{kd^2}{4}\right)$. فلندرس تغيُّر هذه العبارة عندما يتغيَّر x من $\frac{d}{2}$ إلى $+\infty$.

تُكتَب مُشتقّتها كما يلي:

$$\frac{4}{kd^2}\cdot\frac{1}{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}\left(-dx^2(1+k)+\frac{kd^2}{4}+2x(1+k)\left(x^2-\frac{d^2}{4}\right)\right)$$

$$=\frac{4}{kd^2}\cdot\frac{1}{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}\left(2x^3(1+k)-dx^2(1+k)-\frac{d^2x}{2}(1+k)+\frac{kd^3}{4}\right)$$

فتكون إشارة هذه المشتقّة مطابقة لإشارة متعدّد الحدود من الدرجة الثالثة الموجود بين قوسين؛ مشتقّة متعدّد الحدود هذا هي:

$$6x^2(1+k)-2dx(1+k)-\frac{d^2}{2}(1+k)=6(1+k)\left(x-\frac{d}{2}\right)\left(x+\frac{d}{6}\right)$$ ،

وهي موجبة عندما يكون $x \geq \frac{d}{2}$، فيكون متعدّد الحدود تزايديّاً في الفسحة $]-\frac{d^3}{4},+\infty[$ ولا تتغيّر إشارته إلا مرّة واحدة عندما يكون x مساوياً لـِ x_0 التي هي القيمة الموافقة لحدّ $\frac{BK^2}{AK^2}$ الأدنى.

x	$\frac{d}{2}$	x_0	$+\infty$
$\frac{BK^2}{AK^2}$	$+\infty$ ↘	الحدّ الأدنى	↗ $+\infty$

وهكذا يكون شرط إمكانية الحلّ:

$$\frac{4}{kd^2}\cdot\frac{x_0+\frac{d}{2}}{x_0-\frac{d}{2}}\left(x_0^2(1+k)-\frac{kd^2}{4}\right)\leq\frac{g^2}{h^2} \qquad (*)$$ ،

حيث تكون x_0 مُحدَّدة بالشرطين:

ا) $\frac{d}{2}<x_0$ ، ب) $0=2(1+k)x_0^3-d(1+k)x_0^2-\frac{d^2(1+k)}{2}x_0+\frac{kd^3}{4}$.

إذا أخذنا بعين الاعتبار هذه المعادلة الأخيرة، يُمكن أيضاً أن نكتب الحدّ الأدنى لِـ $\frac{g^2}{h^2}$ كما يلي: $\frac{8(1+k)}{kd^3}x_0\left(x_0+\frac{d}{2}\right)^2$.

لنلاحظ أنّ لدينا، بفضل $\frac{d}{2}<x_0$: $4+\frac{4}{k}=4\frac{1+k}{k}<\frac{8(1+k)}{kd^3}x_0\left(x_0+\frac{d}{2}\right)^2$ ؛

فنحصل خاصّة على $\frac{g}{h}>2$. وإذا استخدمنا (*) وَ ب) يُمكن أن نحصل على (γ).

تستند المناقشة التي يقترحها ابن الهيثم على فكرة إبدال القطع الزائد $\mathcal{H}$ بالقطع الزائد $\mathcal{H}_1$، ذي الخطّين المقارَبين المتعامدين، والذي ينتمي إلى حزمة القطوع المخروطية المولّدة من $\mathcal{P}$ وَ $\mathcal{H}$. وقد تُصبح هذه المناقشة كاملة إذا حدّدنا شرط التماسّ بين $\mathcal{P}$ وَ $\mathcal{H}_1$ ولكنَّ الحصولَ على هذا الشرط صعبٌ، كما تُظهِر ذلك المناقشة التحليلية، إذ تدخُل فيها معادلة من الدرجة الثالثة للمتغيّر $\frac{g^2}{h^2}$، وهذا ما يجعلها إذاً على تخوم رياضيّات ذلك العصر. وهكذا يُمكن أن يكون ابن الهيثم قد اكتفى بمناقشة غير كاملة بسبب هذه الصعوبة. ولنلاحظ أنَّ ابن الهيثم قد لمَّح، كما يبدو، إلى هذه الصعوبة: فهو يكتب: "أمّا في القطع الناقص، فإنَّ المسألة تتمُّ على جميع الأحوال"، بينما يقول "فأمّا القطع الزائد فإنَّ المسألة ليس تتمُّ فيه إلا بشرط وبتخصيص". وهو يشرح الشرط بدون أن يشرح التخصيص.

إنَّ تَمَيُّز المناقشة بهذا النقص، الذي يُمكِن أن يُذكِّر بخطأ من النوع نفسه ارتكبه أبو الجود وكشفه الخيّام، يبقى مدهِشاً لدى مؤلف من هذا المستوى. يجب، على كلِّ حال، أن نستبعِد تعليل النسبة كأنّها قيمة عددية تقريبية للحدّ الحقيقيّ؛ وذلك أنَّ السياق الرياضي لهذا البحث هندسيٌّ محض، ولا يُمكنه أن يأخذ بعين الاعتبار إلا القِيَم الصحيحة.

ويَدخل خطّ التماسّ CM للقطع المكافئ (الذي لا يتعلّق بالنسبة $\frac{g}{h}$) بشكل طبيعيّ؛ ولا يُمكِن أن نتصوَّر أنَّ ابن الهيثم قد خلط بينه وبين خطّ تماس للقطع الزائد.

إنَّ التحديدات، بشكل عامّ، ترتكز في هذه المسائل على إثبات وجود التقاطع بين قطعيْن مخروطييْن؛ والحالة الحدِّية، التي تفصل بين وجود التقاطع وعدم وجوده، هي التي يكون فيها القطعان المخروطيان في وضع التماسّ؛ وهذا ما نراه بوضوح في كتاب ابن الهيثم هذا وفي أعمال أخرى له (كتاب "المعلومات") وكذلك عند أسلافه العرب واليونان (شرح أوطوقيوس لكتاب "الكرة والأسطوانة" لأرشميدس، والمقالة الخامسة لأبلونيوس). إنَّ القيام بالمناقشة الكاملة يتطلّب معرفة تحديد نقطة تماسّ القطعيْن المخروطيّيْن. ويبدو أنَّ هذا التحديد صعب المنال هندسياً في هذه الحالة. ولنلاحظ ما يُمَيِّز ابن الهيثم ، على ما يبدو، عن أسلافه بخصوص هذا الأمر:

- أصبح البحث المنهجي لحلول مسائل الأعمال الهندسية، باستخدام تقاطع القطوع

المخروطية، فصلاً كاملاً مستقِلاً في الهندسة. لم يَعُد يتعلّق الأمر بمسائل معزولة تظهر بشكل متقطّع فيتمّ حلّها بتقاطع القطوع المخروطية، بل بطريقة لاستكشاف ميدان المسائل الخاصّة في أغلبها بالمجسّمات، وفي بعضها بالتربيعات.

- يدرس ابن الهيثم، في إطار هذا الفصل الجديد، بعناية بشكل عامّ، وجود الحلول وعددها، وفقاً لنظريته في التحليل والتركيب.

ترتكز هذه الدراسة على خواصّ الخطوط المقارِبة والخواصّ الموضعية للقطوع المخروطية، المتعلقة بشكل خاصّ بنقاط تماسّها.

ترتكز النظرية الجبرية التي بسطها شرف الدين الطوسي بالتأكيد على هذا النوع من الأعمال، ولكنّها تتميَّز عنها تحديداً بأنّ المناقشة أصبحت جبرية بشكل كامل. عالج شرف الدين الطوسي، أوّلاً، حالة المعادلة $x^3 + c = ax^2$ ، حيث يكون التحديد مطابقاً لتحديد أوطوقيوس؛ ثمّ أخذ بعين الاعتبار أنّ الحلّين متناظران تقريباً، في جوار الحالة الحدّية، بالنسبة إلى الحلّ في الحالة الحدّية، واستخدم طريقته الخاصّة بانسحاب المتغيِّر المجهول" ليجد المعادلة المشتقّة من الدرجة الثانية التي تسمح له بتحديد الحالة الحدّية لكلّ المعادلات الأخرى التي تجِب دراستها.

خلاصة المناقشة السابقة

لقد لاحظنا في أوّل الأمر أنّ ابن الهيثم يُميِّز حالة القطع الناقص، التي يكون للمسألة المطروحة فيها حلّ بشكل دائم، من حالة القطع الزائد التي تتطلّب شرطاً. ثمّ يُدخل، في هذه الحالة، فكرة جديدة ترتكز على إبدال القطع الزائد $\mathcal{H}$ بقطع زائد آخر $\mathcal{H}_1$ تابع للزمرة المولّدة بـ $\mathcal{P}$ وَ $\mathcal{H}$. يُمكِن أن نستخدِم هذه الفكرة بطريقة مُختلفة بإبدال $\mathcal{H}$ بقطع مكافئ آخر $\mathcal{P}'$ من الزمرة نفسها. لنلخِّص إذاً مسار ابن الهيثم في استخدام هذه الفكرة.

المطلوب هو إيجاد نقطة B على قطع مخروطي Γ (قطع ناقص أو زائد) ذي مركز E ومحور DA بحيث يقطع خطُّ التماسّ المحور على النقطة K وبحيث تـُحقـّق المعادلة $\frac{g}{h}=\frac{BK}{KA}$، حيث تكون النسبة $\frac{g}{h}$ معلومة وأعظم من 1.

لنلاحظ أنّــه، إذا كانت النقطة B حلاً للمسألة، فإنّ النقطة B' المتناظرة معها بالنسبة إلى الخطّ DA هي أيضاً حلٌ للمسألة. سنبحث إذاً عن B في نصف قطع مخروطيّ.

– يقوم ابن الهيثم في القضية الثالثة بتحليل هذه المسألة. ولا يتغيَّر الاستدلال مهما كان القطع المخروطيّ المعلوم (ناقصاً أم زائداً)، أي أنّ النقطة M المحدَّدة بالمعادلة $\frac{d}{a}=\frac{ME}{MA}$ (حيث يكون d القطر AD، ويكون a الضلع القائم) هي إمّا خارج الخطّ $[AD]$ في حالة القطع الناقص، أو بين A وَ D في حالة القطع الزائد.

وإذا وُجِد خطّ تماسّ KB يُحقــِّق شروط المسألة، توجَد عندئذ في كلتا الحالتين نقطة U على القطع الزائد $\mathcal{H}$ وعلى نصف القطع المكافئ $\mathcal{P}$ المحدَّدين استناداً إلى المعطيات.

– يُبيِّن ابن الهيثم، في القضية الرابعة، أنّــه إذا كانت U نقطة مُشترَكة لـِ $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$ فإنّــها تتوافق مع نقطة B على Γ وخطّ تماسّ KB يُحقــِّق المعادلة $\frac{g}{h}=\frac{KB}{KA}$.

ولكنّ دراسة التقاطع بين $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$ تتطلّب مناقشة تؤدِّي إلى التمييز بين حالتين:

– حالة القطع الناقص في القضية الرابعة – حالة القطع الزائد في القضية الخامسة.

دراسة تحليلية للمناقشة: حيث يكون d المحور AD، ويكون a الضلع القائم المُرفق به.

حالة القطع الناقص. سنفرض $d > a$ فيكون $k = \frac{d}{a} > 1$، وذلك لنتبع ابن الهيثم في دراسته.

لنأخذ A كنقطة أصل مع $A(0, 0)$ ، $D(0, d)$ ، $E\,(0,\frac{d}{2})$ ، $N\,(\frac{d}{2},-\frac{d}{2})$ ؛ تُحدَّد النقطة M بالمعادلة: $\frac{\overline{ME}}{\overline{MA}}=\frac{d}{a}=k$. فيكون $\frac{\overline{ME}}{d}=\frac{\overline{MA}}{a}=\frac{\overline{ME}-\overline{MA}}{d-a}=\frac{\overline{AE}}{d-a}$،

فنحصل على: $\frac{\overline{ME}}{\overline{AE}}=\frac{d}{d-a}=\lambda$ وَ $\overline{MA}=\frac{a.\overline{AE}}{d-a}=\frac{a.d}{2(d-a)}=\lambda.\frac{a}{2}=b$، مع $\lambda=\frac{k}{k-1}$.

معادلة $\mathcal{P}$: $\left(y+\frac{d}{2}\right)^2=-\frac{d}{2}\left(x-\frac{d}{2}\right)$ وَ $\frac{d}{2}+y>0$،

أو $y^2+dy=-\frac{d}{2}.x$ وَ $\frac{d}{2}+y>0$.

معادلة $\mathcal{H}$: الرأسان $A(0, 0)$، $M\left(-b=-\frac{a\lambda}{2}, 0\right)$، $\frac{x(x+b)}{y^2}=\frac{g^2}{h^2}\lambda$ أو $y^2=\frac{h^2}{\lambda g^2}x(x+b)$.

الإحداثية الأولى x، لأيّ نقطة تقاطع بين $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$، هي جذر المعادلة التي نحصل عليها بعد حذف y^2 بين المعادلتين.

ويُمكِن أن نستخدِم، لدراسة التقاطع بين $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$، أيَّ مزدوجة من قطعيْن مخروطيّيْن غير متطابقين من الزمرة $(\lambda.\ \mathcal{P}+\mu.\ \mathcal{H})$ المولّدة من $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$. أمّا القطع المكافئ $\mathcal{P}'$، ذو المعادلة: $y=-\frac{x}{2}-\frac{h^2}{\lambda d g^2}x(x+b)$، التي نحصل عليها بعد حذف y^2، فهو يمرُّ بكلّ نقطة تقاطع U بين $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$.

ويمكن أن نقوم بدراسة $\mathcal{H} \cap \mathcal{P}$عن طريق دراسة $\mathcal{P}' \cap \mathcal{P}$ ، حيث يكون:

محور $\mathcal{P}$ موازياً للخطّ xA، محور $\mathcal{P}'$ موازياً للخطّ yA، نقطة A مشتركة بين $\mathcal{P}$ وَ $\mathcal{P}'$.

وإذا حسبنا ظلَّ زاوية الانحدار لخطّ التماسّ في النقطة A على القطع المكافئ $\mathcal{P}$، نجد أنّــه يُساوي $(-\frac{1}{2})$: $\left[2yy'+dy'=-\frac{d}{2},\ y=0\Rightarrow y'=-\frac{1}{2}\right]$.

يقطع القطع المكافئ $\mathcal{P}'$ الخطّ Ox على النقطة A وعلى النقطة ذات الإحداثية الأولى:

$x=-b-\frac{\lambda d}{2}.\frac{g^2}{h^2}>-b$، فتكون الإحداثية الأولى لرأسه سالبة، بينما تكون إحداثيته الثانية موجبة. يكون معنا: $y'=-\frac{1}{2}-\frac{h^2}{d\lambda g^2}(2x+b)$، وإذا جعلنا $x = 0$، نحصل على $y'=-\frac{1}{2}-\frac{bh^2}{d\lambda g^2}=-\frac{1}{2}-\frac{ah^2}{2dg^2}>-\frac{1}{2}$.

يقطع القطع المكافئ $\mathcal{P}'$ القطع $\mathcal{P}$ على النقطة A، ويكون معنا في جوار A:

$\mathcal{P}'$ داخل $\mathcal{P}$ عندما يكون $x<0$، $\mathcal{P}'$ خارج $\mathcal{P}$ عندما يكون $x>0$.

يقطع $\mathcal{P}'$ إذاً بالضرورة $\mathcal{P}$ على نقطة U تكون إحداثيتها الأولى بين 0 وَ $\frac{d}{2}$، وعلى نقطة أخرى تكون إحداثيتها الأولى سالبة. ولكنَّ النقطة U هي وحدها التي نأخذها بعين الاعتبار.

لنلاحظ أنَّ النقطة الموجودة على القطع $\mathcal{P}$ والتي تساوي إحداثيتها الأولى $\frac{d}{2}$، لها إحداثية ثانية مساوية لِـ: $y=-\frac{d}{4}-\frac{h^2}{2\lambda g^2}(b+\frac{d}{2})$، ولكنَّ $b+\frac{d}{2}=\frac{d}{d-a}.\frac{a}{2}+\frac{d}{2}=\frac{d}{2}\left(1+\frac{a}{d-a}\right)=\frac{d}{2}\lambda$، فيكون $y=-\frac{d}{4}-\frac{dh^2}{4g^2}=-\frac{d}{4}\left(1+\frac{h^2}{g^2}\right)$، وهذا ما يُعطي $y<-\frac{d}{2}$، لأنَّ $\frac{g}{h}<1$.

الإحداثية الثانية للنقطة U أعظم، إذاً، من الإحداثية الثانية للنقطة N؛ فتكون النقطة U على قوس القطع المكافئ $\widehat{AN}$ $\mathcal{P}$، وتكون نقطة مقبولة لحلّ المسألة.

وتتوافق هذه النقطة U مع نقطة، B، موجودة على نصف القطع الناقص المعني بالأمر، والخطّ المماسّ في النقطة B يُشكِّل حلاً للمسألة.

حالة القطع الزائد Γ: لا يتناول ابن الهيثم سوى الفرع Γ_A.

توجَد النقطة M بين A وَ E.

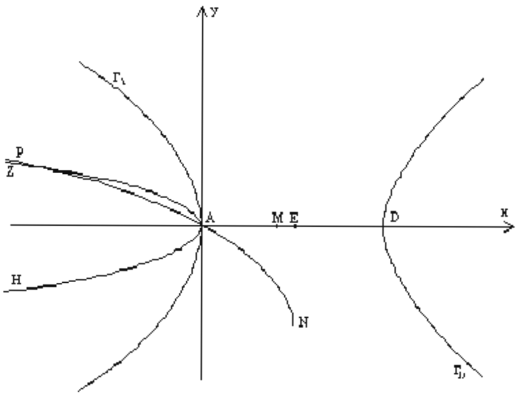
يكون معنا: $\frac{\overline{ME}}{\overline{MA}}=-\frac{d}{a}=-k$. فيكون $\frac{\overline{ME}}{d}=\frac{\overline{MA}}{-a}=\frac{\overline{ME}-\overline{MA}}{d+a}=\frac{\overline{AE}}{d+a}$،

فنحصل على: $\frac{\overline{ME}}{\overline{AE}}=\frac{d}{d+a}=\lambda'<1$ وَ $\overline{MA}=\frac{a.\overline{AE}}{d+a}=\frac{a.d}{2(d-a)}=\frac{a}{2}.\lambda'-=b-$، مع $\lambda'=\frac{k}{k+1}$.

يكون معنا، إذا استخدمنا نفس محوري الإحداثيات السابقين:

معادلة $\mathcal{P}$: $y^2+yd=-\frac{d}{2}x$، مع $[x<0، y>0]$ للقوس $\widehat{AZ}$ ؛

معادلة $\mathcal{H}$: الرأسان: $A(0, 0)$، $M(0, b)$ ؛ $\frac{x(x+b)}{y^2}=\lambda'\frac{g^2}{h^2}$ أو $y^2=\frac{h^2}{\lambda' g^2}x(x+b)$.



الشكل ٥-٧

التقاطع: تُحقّق كلُّ نقطة من نقاط التقاطع المعادلتين:

$\frac{h^2x(x-b)}{\lambda' g^2} = \frac{d.x}{2} - d.y$ وَ $y = \frac{h^2x(x-b)}{d.\lambda' g^2} - \frac{x}{2}$ ، وهذه الأخيرة هي معادلة قطع مكافئ $\mathcal{P}'$.

ترجع دراسة $\mathcal{H} \cap \mathcal{P}$ إلى دراسة $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$. يقطع الخطّ Ox على النقطة $A(x=0)$ وعلى النقطة A' ذات الإحداثية الأولى: $\alpha = b - \frac{d\lambda' g^2}{2h^2} = b\left(1-\frac{d.g^2}{a.h^2}\right) = b\left(1-k\frac{g^2}{h^2}\right) > b$.

تساوي الإحداثية الأولى لرأس $\mathcal{P}'$، $\frac{\alpha}{2}$، بينما تكون إحداثيته الثانية موجبة.

ظِلّ زاوية التماسّ في A للقطع المكافئ $\mathcal{P}$: $y' = -\frac{1}{2}$؛

ظِلّ زاوية التماسّ في A للقطع المكافئ $\mathcal{P}'$: $y' = \frac{h^2(2x-b)}{d\lambda' g^2} - \frac{1}{2}$؛

فنستنتج، إذا جعلنا $x=0$: $y'(0) = \frac{b.h^2}{d.\lambda' g^2} - \frac{1}{2} = \frac{a.h^2}{2d.g^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{k.g^2} - 1\right) < -\frac{1}{2}$ ،

$y'(0) = \frac{1}{2}\frac{h^2}{k.g^2}\left(1-\frac{kg^2}{h^2}\right)$. فيكون لـ α و $y'(0)$ نفس إشارة $\left(1-\frac{kg^2}{h^2}\right)$.

إنّه من الضروري، لكي تؤدّي نقطة من $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ إلى حلّ، أن تكون هذه النقطة على القوس $\widehat{AZ}$ من $\mathcal{P}$ ؛ وهذا ما يتطلب $\alpha > 0$ أو $y'(0) > 0$ ، أي $\frac{g^2}{h^2} < \frac{1}{k}$.

يكون معنا عندئذ: $0 > y'(0) > -\frac{1}{2}$ ؛ فينفذ $\widehat{AA'}$ ، قوس القطع المكافئ $\mathcal{P}'$، من النقطة A إلى داخل القطع المكافئ $\mathcal{P}$.

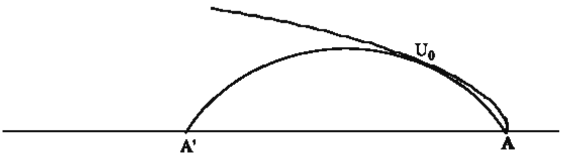
يكون لدينا عندئذ ثلاث حالات:

أ) القوس $\widehat{AA'}$ بكاملها داخل $\mathcal{P}$، فلا يوجَد حلّ للمسألة.



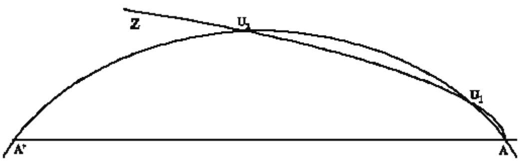
الشكل ٥ـ٨

ب) القوس $\widehat{AA'}$ مماسّة للقطع $\mathcal{P}$ في نقطة U_0 ، فيكون لدينا حلّ.



الشكل ٥ـ٩

جـ) القوس $\widehat{AA'}$ تقطع $\mathcal{P}$ في نقطتين U_1 وَ U_2، فيكون لدينا حَلان.



الشكل ٥ـ٩

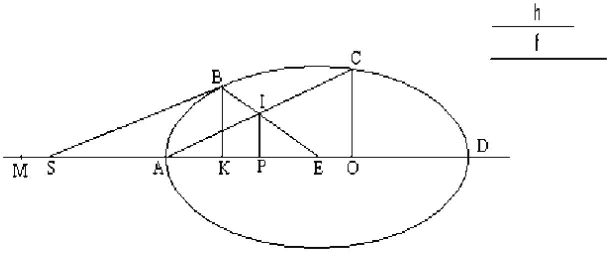
٦- ليكن Γ قطعاً ناقصاً أو زائداً ذا محور مُجانِب DA ومركز E. المطلوب هو تحديد نقطة B على القطع، بحيث يقطع خطّ التماسّ في هذه النقطة المحورَ، من جهة A، على نقطة S وتكون $\frac{BS}{DS}=\frac{h}{f}$ نسبة معلومة (انظر الشكلين ٦-١ وَ ٦-٢). تـشُبه هذه المسألة المسألةَ السابقة، ولكنَّ الرأسَ A يُبدَل فيها بالرأس D الأكثر بعداً.

تحليل: ليكن AI خطّاً من خطوط الترتيب بالنسبة إلى القطر BE، فيكون معنا $AI // BS$ وتكون I وسط CA، حيث تكون C نقطة التقاطع بين AI وَ Γ. لنُخرج الخطوط KB، PI وَ OC العمودية على DA.

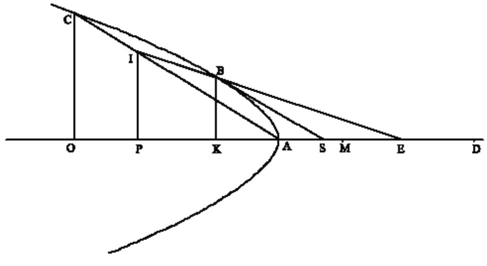
إذا وضعنا $DA = d$ وَ $a =$ الضلع القائم، يكون معنا: $\frac{OD.OA}{CO^2}=\frac{d}{a}$ وَ $\frac{KD.KA}{BK^2}=\frac{d}{a}$.

ويكون معنا: I هي وسط CA، E هي وسط DA وَ $PI // OC$. فنستنتج من ذلك أنَّ:

$AP = \frac{1}{2}AO$ ، $EP = \frac{1}{2}OD$ ، $IP = \frac{1}{2}CO$ ، ويكون معنا أيضاً: $\frac{PE.PA}{PI^2}=\frac{d}{a}$.



الشكل ٦-١، Γ قطع ناقص



الشكل ٦-١، Γ قطع زائد

إذا وضعنا $\frac{d}{a}=\frac{EM}{MA}$، تكون النسبة $\frac{EM}{EA}$ معلومة ويكون معنا: $\frac{ME}{EA}=\frac{MP.PA}{AI^2}$ [٤]. يكون معنا $\frac{AS}{SE}=\frac{KA}{AE}$ وَ $\frac{PK}{KE}=\frac{IB}{BE}=\frac{AS}{SE}$ (لأنَّ $AI \parallel BS$ وَ $BK \parallel IP$)، فيكون $\frac{KA}{AE}=\frac{PK}{KE}$.

فنستخرج من ذلك، بالتركيب في حالة وبالفصل في الحالة الأخرى، أنَّ $\frac{EK}{EA}=\frac{EP}{EK}$، فيكون:

$$(\alpha) \qquad EK^2 = EP.\,EA.$$

ونستخرج من $\frac{AS}{SE}=\frac{KA}{AE}$ [٥]، أنَّ: $\frac{IA}{BS}=\frac{AE}{SE}=\frac{KA}{AS}$ وَ $\frac{BS}{AS}=\frac{IA}{AK}$. ولكنَّ $\frac{BS}{DS}=\frac{h}{f}$، فنحصل على : $\frac{DS}{AS}=\frac{IA}{AK}.\frac{f}{h}$. ولكنَّ $\frac{KD}{KA}=\frac{DS}{SA}$، لأنَّ $\frac{KE}{AE}=\frac{AE}{ES}$، وهذا ما يعطي إذا جمَّعنا هذه النتائج وأخذنا بعين الاعتبار أنَّ $AE = DE$: $\frac{DK}{AE}=\frac{DS}{ES}$، فيكون إذاً : $\frac{KD}{KA}=\frac{IA}{AK}.\frac{f}{h}$، فنحصل على: $\frac{KD}{IA}=\frac{f}{h}$. ونستخرِج من $\frac{KD^2}{IA^2}=\frac{f^2}{h^2}$ وَ $\frac{ME}{EA}=\frac{MP.PA}{IA^2}$،

$$(\beta) \qquad \frac{h^2}{f^2}\frac{ME}{EA}=\frac{MP.PA}{DK^2}.$$

إذا استندنا إلى المعادلتين (α) وَ (β)، يُمكن أن نواصل الاستدلال، كما فعلنا في القضية السابقة، بفضل استخدام القطع المكافئ $\mathcal{P}$ والقطع الزائد $\mathcal{H}$ اللذين لا يُظهرُهما ابن الهيثم إلا في التركيب[٦]. يبدو أنَّ ابن الهيثم قد أراد تجنُّب إعادة الاستدلال؛ كان بإمكانه أن يؤكِّد أنَّ النقطة P معلومة، بعد أن أثبت المعادلتين (α) وَ (β).

نستخرج من النقطة P بالتتابع النقاط O، C وَ I ثمَّ B وخطَّ التماسِّ SB.

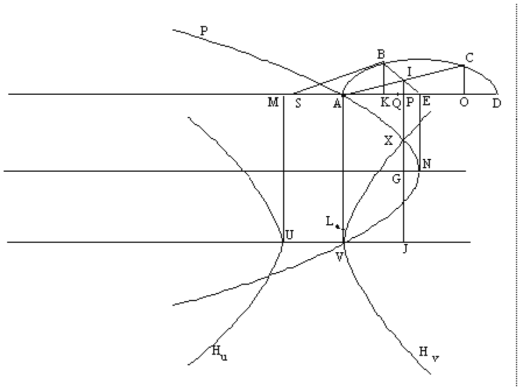
ويُبيِّن التركيب وجود النقطة P.

[٤] نستخرج هذه النتيجة من القضية الثانية من المقالة السابعة من "كتاب المخروطات" (كما فعلنا ص. ٧٥ أعلاه).

[٥] نستخرج هذه النتيجة من القضية ٣٧ من المقالة الأولى من "كتاب المخروطات".

[٦] توصلنا المعادلة (β) إلى القطع الزائد $\mathcal{H}$ بدون أن يكون استخدام التناظرات ضرورياً لإظهاره؛ يكون معنا، بالفعل، $DK = AK + AD$ ، وهذا ما يوجب نقل محور القطع الزائد المساعِد $\mathcal{H}$ نحو الأسفل بمقدار VA مساو لِـ DA. نرى بوضوح الترابط بين هذه المسألة والمسألة السابقة: يتمُّ المرور من بناء إلى بناء آخر بنقل محور القطع الزائد المساعِد، وليس بالتناظرات كما أمكن تأكيد ذلك بشكل مغلوط .

٧- تركيب المسألة: لنتناول من جديد الشكلين (الشكل ٧-١ للقطع الناقص والشكل ٧-٢ للقطع الزائد).

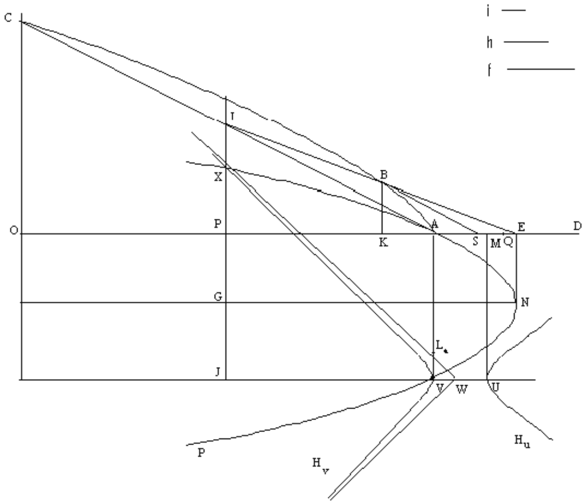


الشكل ٧-١

لنخرج الخطوط NE، VA وَ UM العمودية على الخط DA، مع $EN = EA$ وَ $AV = MU = AD$. وليكن GN وَ JV بحيث يكون $NG \parallel DA$ وَ $VJ \parallel DA$. يكون معنا $UV = MA$. لنضع: $\frac{h^2}{f^2} = \frac{AE}{EQ}$ وَ $\frac{UV}{VL_a} = \frac{ME}{EQ}$، ولنرسم القطعَ الزائد $\mathcal{H}$ ذا المحور المستعرِض (أي "السهم المجانب" كما يقول ابن الهيثم) UV والضلع القائم VL_a، ولنرسم القطع المكافئ $\mathcal{P}$ ذا المحور GN والضلع القائم AE. يمرُّ القطع المكافئ $\mathcal{P}$ بالنقطتين A وَ V.

يكون للقطع المكافئ $\mathcal{P}$ وللفرع $\mathcal{H}_V$، في حالة القطع الناقص، نقطة مُشتركة وتقعُّران متضادّان؛ وتقطع $\mathcal{H}_V$ من جديد القطع المكافئ $\mathcal{P}$ على النقطة X التي تسقط في النقطة P بين A وَ E. لنلاحظ أنَّ الفرع $\mathcal{H}_U$ يقطع أيضاً $\mathcal{P}$ ، ولكن في نقاط تكون مساقطها على امتداد AD المستقيم ولا تعطي أيَّ حلّ.

لنتناول، في حالة القطع الزائد، فرعَ القطع الزائد $\mathcal{H}_V$ ذا المحور UV، وخطّاً مقارِباً يقطع نصف الخطّ المستقيم VN الذي هو محور القطع المكافئ، فيقطع إذاً القطع المكافئ؛ فينفذ الفرع $\mathcal{H}_V$ من النقطة V داخل القطع المكافئ ويقترِب إلى ما لا نهاية من خطّه المقارَب ويقطع القطع المكافئ من جديد على النقطة X.



الشكل ٢-٧

لنلاحظ أنّ الفرع $\mathcal{H}_U$ والقطع المكافئ $\mathcal{P}$ يُمكن أن لا يتقاطعا أو أن يكون لهما نقطة أو نقطتان مُشتركتان؛ وإذا وُجِدَت نقطة تقاطع بينهما فإنّـها تسقط على الخطّ EA بين A وَ E ولا تعطي حلاً للمسألة.

يقطع الخطُّ الخارجُ من X إلى الخطّ DA، الخطوطَ DA، GN وَ UV بالترتيب على النقاط P، G وَ J.

لتكن O نقطة بحيث يكون $AP = PO$؛ يقطع الخطُّ العموديُّ على DA في النقطة O القطعَ Γ على النقطة C؛ ويتقاطع الخطّان CA وَ PG على النقطة I وسط CA؛ ويقطع EI القطعَ Γ على النقطة B. والخطُّ SB الموازي للخطّ IA مماسٌ للقطع Γ.

لنبيّن أنّ: $\frac{BS}{SD}=\frac{h}{f}$. يكون معنا: $EP \cdot EA = EK^2$ (كما كان في التحليل)، $PE = NG$ وَ $NG \cdot EA = GX^2$ (لأنّ $X \in \mathcal{P}$).

فيكون إذاً $EK = GX$. يكون معنا: $GJ = EN = ED$، فنحصل على $JX = KD$.

ويكون معنا من جهة أخرى: $\frac{JU.JV}{JX^2}=\frac{UV}{VL_a}=\frac{ME}{EA}\cdot\frac{EA}{EQ}$ (لأنّ $X \in \mathcal{H}$)، فنستنتج أنّ:

$\frac{JU.JV}{JX^2} = \frac{h^2}{f^2}\frac{MP.PA}{AI^2}$؛ ولكن $JU\,.\,JV = MP\,.\,PA$، فيكون إذاً $\frac{AI^2}{DK^2} = \frac{h^2}{f^2} = \frac{AI^2}{JX^2}$،

فنحصل على: $\frac{AI}{KD} = \frac{h}{f}$. ونستنتج من ذلك أنّ $\frac{IA}{KA\frac{h}{f}} = \frac{KD}{KA}$.

ولكن: $\frac{BS}{SA} = \frac{IA}{KA}$. فليكن i بحيث يكون: $\frac{SA}{i} = \frac{f}{h}$، فيكون معنا: $\frac{BS.AK}{I'.AI} = \frac{F}{H} = \frac{SA.AI}{I'.AI}$؛

فنستخرج من ذلك: $\frac{AI}{KA\frac{h}{f}} = \frac{BS}{i}$، فإذاً: $\frac{BS}{i} = \frac{KD}{KA}$.

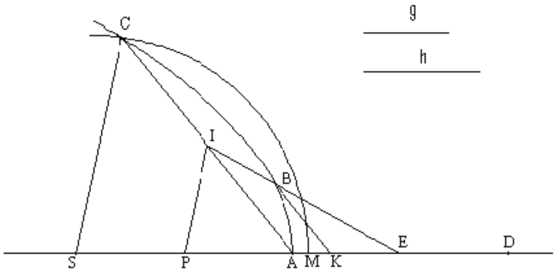
ويكون من جهة أخرى: $\frac{DS}{SA} = \frac{KD}{KA}$، فيكون إذاً: $\frac{BS}{i} = \frac{DS}{SA}$، ويكون بالتالي: $\frac{h}{f} = \frac{i}{SA} = \frac{BS}{SD}$.

٨- ليكن Γ قطعاً زائداً ذا محور مستعرِض DA وذا مركز E. المطلوب هو إيجاد خطّ مماسّ للقطع الزائد Γ في النقطة B، يقطع المحور المستعرِض على النقطة K بحيث تتحقّق المعادلة: $\frac{BK}{BE} = \frac{g}{h}$ $(g < h)$. المسألة هي أيضاً من النوع نفسه، ولكنّ الخطّين KA أو KD قد استُبدِلا هذه المرّة بالمتّجِه نصف القطري BE.

تحليل: ليكن الخطّ KB حلاً للمسألة. يقطع الخطّ الخارجُ من A على موازاة KB القطعَ الناقص والقطر BE بالترتيب على C وَ I، بحيث يكون $CI = AI$؛ يكون معنا: $\frac{h}{g} = \frac{BE}{BK} = \frac{IE}{IA}$ [٧].

لتكن P نقطة على الخطّ AE بحيث يكون $\widehat{EIP} = \widehat{IAP}$. المثلّثان PIE وَ PAI، ويكون معنا: $\frac{EI}{IA} = \frac{PI}{PA} = \frac{EP}{PI}$، فيكون: $EP\,.\,PA = PI^2$ وَ $PI > PA$.

[٧] نستخرج من هذه المعادلة أنّ I موجودة على الدائرة C_1، وأنّ C موجودة على الدائرة C'_1 التي هي صورة C_1 في التحاكي $(A,2)$.



الشكل ٨

ويكون معنا أيضاً: $\frac{h^2}{g^2}=\frac{EI^2}{IA^2}=\frac{EP^2}{PI^2}=\frac{EP}{PA}$، فيكون إذاً: $\frac{h^2}{g^2}=\frac{EA+AP}{AP}$، $\frac{EA}{AP}=\frac{h^2}{g^2}-1=\frac{h^2-g^2}{g^2}$ $(g<h)$.

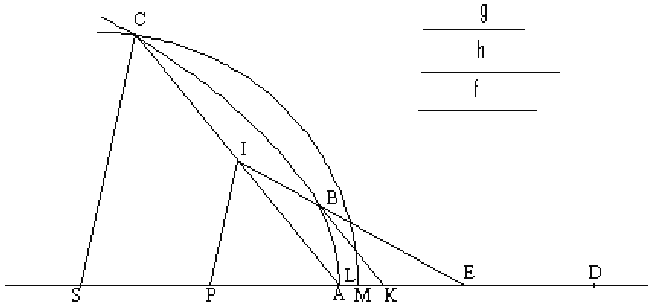
والخطّ AE هو نصف المحور، فيكون PA معلوماً. فيكون PE، بالتالي، معلوماً ويكون IP أيضاً معلوماً[٨]. ليكن SC بحيث يكون $SC \parallel PI$، فيكون $AS = 2AP$ وَ $CS = 2IP$، وهذا ما يُعطي $CS > AS$؛ وهذه الأطوال معلومة.

لنضع $SC = SM$، فيكون $SM > SA$ وتكون M على امتداد SA. تقطع الدائرة (S, SM) القطع الناقص على النقطة C؛ ونحصل من النقطة C على النقطة I وسط AC، ثمَّ نحصل على B وعلى الخطّ KB.

٩- التركيب: نتناول من جديد القطع الزائد Γ والنسبة $\frac{g}{h}$. لتكن f بحيث يكون: $\frac{h}{g}=\frac{g}{f}$، فيكون عندئذ $\frac{h^2}{g^2}=\frac{h}{f}$.

لنضع $\frac{PE}{PA}=\frac{h^2}{g^2}=\frac{h}{f}$؛ هذا ما يُحدِّد نقطة P على امتداد AE. لتكن S بحيث يكون $AP = SP$، ولتكن L بحيث يكون $AP.EP = LP^2$، (فيكون إذاً $EP > LP > AP$). لنرسم الدائرة $(S, 2PL)$

[٨] يكون معنا: $AP=\frac{g^2}{h^2-g^2}EA$، $EP=\frac{h^2}{h^2-g^2}EA$، $PI=\frac{gh}{h^2-g^2}$؛ وهكذا يكون معنا المركز P ونصف قطر الدائرة C_1.



الشكل ٩

التي تقطع المحور على النقطة M بحيث يكون $SM = 2\ PL > AS$، فتكون M إذاً خارج القطع Γ وتكون S داخله، وتقطع الدائرة القطعَ Γ على النقطة C.

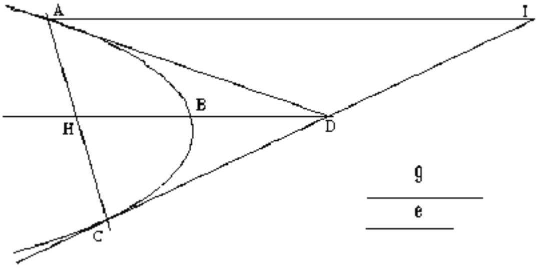
لتكن I وسط CA، فيقطع الخطُّ EI القطعَ الزائدَ على النقطة B. لنرسم خطَّ التماسّ KB الذي يوازي CA ولنبيِّن أنّ: $\frac{BK}{BE} = \frac{g}{h}$.

ويكون معنا $SC \,//\, PI$ وَ $2PI = SC$ ، بما أنَّ P هي وسط SA و I هي وسط CA، فيكون إذاً $PI = PL$ وَ $PE.\ PA = PI^2$. ونستخرج من ذلك: $\frac{PI}{PA} = \frac{PE}{PI}$، فنستنتج عندئذ التشابهَ بين المثلّثين PEI وَ PIA. ويكون معنا عندئذ كما كان في التركيب: $\frac{EI^2}{IA^2} = \frac{PE}{PI}$، فيكون معنا إذاً: $\frac{EI^2}{IA^2} = \frac{h^2}{g^2}$. ويكون معنا من جهة أخرى: $\frac{EB}{BK} = \frac{EI}{IA}$، فيكون إذاً: $\frac{BK}{BE} = \frac{g}{h}$.

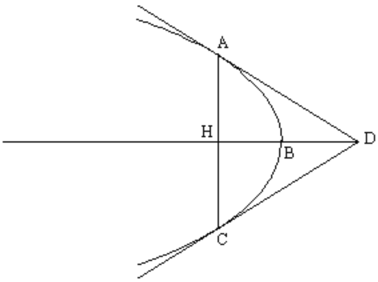
١٠ – ليكن معنا للقطعَ المكافئ Γ وخطُّ التماسّ CD في النقطة C من هذا القطع المكافئ. المطلوب هو إيجاد خطّ آخر مماسٍّ للقطع المكافئ بحيث، إذا كانت A نقطة تماسّه وكانت D نقطة تقاطعه مع CD، تكون النسبة $\frac{DA}{DC} = \frac{e}{g}$ معلومة.

تحليل: لتكن النقطة H وسط الخطّ CA؛ يكون الخطُّ HD قطراً، ويكون HD وَ AC اتجاهين مترافقين، ويقطع HD القطعَ Γ على النقطة B وسط HD (انظر الشكلين ١٠–١ أو ١٠–٢).

إذا كان $E = G$، يكون حينئذ $DA=DC$ (انظر الشكل ١٠-٢). تكون الزاوية $\widehat{AHD}$ قائمة، لأنّ $HA=HC$، فيكون HD عندئذ محورَ Γ، وهو معلوم؛ فتكون النقطة D معلومة. وخطُّ التماسّ المطلوب هو خطّ التماسّ الثاني الخارج من D وهو مساوٍ للخطّ DC؛ فتكون النقطتان A وَ C متناظرتين بالنسبة إلى المحور HD.



الشكل ١٠-١



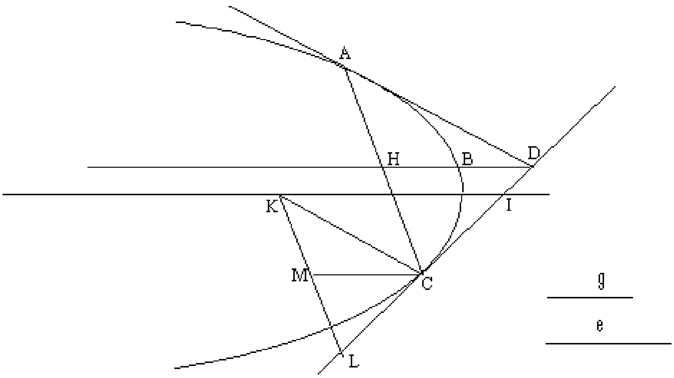
الشكل ١٠-٢

إذا كان $E \neq G$، يكون $AD \neq DC$ وتكون الزاوية $\widehat{H}$ قائمة. الخطّ DC معلومٌ، واتجاه DH معلوم، لأنّ DH موازٍ لمحور Γ، فتكون الزاوية $\widehat{CDH}$ معلومة.

لنخرِج من A الخطَّ الموازي لمحور Γ، فيقطع الخطَّ CD على النقطة I، ويكون $DI=DC$، فيكون $\frac{DA}{DI}=\frac{e}{g}$ وَ $\widehat{CDH}=\widehat{DIA}$. إنّ شكل المثلّث DIA معلومٌ، فتكون الزاوية $\widehat{IDA}$ معلومة، وتكون الزاوية $\widehat{CDA}$، بالتالي، معلومة أيضاً. ولكنّ النسبة $\frac{DA}{DC}=\frac{e}{g}$

معلومة، فيكون شكلُ المثلّث CDA معلوماً، ويكون الخطُّ CA عندئذ معلوماً. وتكون A، نقطة تقاطع CA مع Γ، هي النقطة المطلوبة.

١١ – تركيب: يلتقي محور Γ بالخطّ المعلوم CD في النقطة I. لتكن K نقطة على محور Γ بحيث يكون: $\frac{CI}{CK}=\frac{g}{e}$(انظر المناقشة) ولتكن L نقطة على الخطّ CD بحيث يكون CI =CL. لنخرِج من C الخطَّ الموازي للخطّ KL، وهو يقطع المحورَ فيقطع إذاً Γ على النقطة A. لتكن النقطة H وسط الخطّ CA. ويقطع الخطُّ، الخارج من H على موازاة المحور، القطع Γ على النقطة B، ويقطع الخطَّ CD على النقطة D؛ فيكون HB قطراً ويكون HA خطّ الترتيب؛ فيكون DA خطّ التماسّ الثاني الخارج من D.



الشكل ١١-١

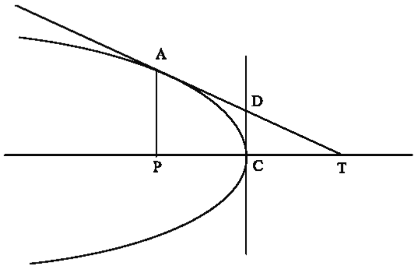
لنبيّن أنّ $\frac{DA}{DC}=\frac{e}{g}$. لتكن النقطة M وسط KL، فيكون معنا $CM \parallel IK$، فإذاً $CM \parallel DH$، ولكنّ $CH \parallel KL$ فيكون المثلّثان DCH و CML متشابهين، فنحصل على: $\frac{DC}{CH}=\frac{CL}{LM}$.

نستنتج من ذلك أنّ $\frac{DC}{CA}=\frac{CL}{LK}$، فيكون المثلّثان DCA و CLK متشابهين ويكون معنا:

$$\frac{DA}{DC}=\frac{CK}{CL}=\frac{e}{g}.$$

مناقشة: يكون للمسألة حلٌّ وحيدٌ إذا وجِدت النقطة K.

إذا رمزنا بـِ h إلى المسافة بين C والمِحوَر، فإنَّ الشرط الضروري والكافي لوجود K هو $h \leq CK$ ؛ ولكنَّ $\frac{CK}{CI} = \frac{e}{g}$ ، فيكون هذا الشرط معادلاً لـِ $\frac{h}{CI} \leq \frac{e}{g}$، أو أيضاً لـِ $\sin\Theta \leq \frac{e}{g}$، حيث تكون Θ الزاوية الحادة المشكـَّلة بين خطّ التماسّ DC ومحور القطع المكافئ. يؤمِّن هذا الشرط وجود نقطتين K وَ K' تتطابقان عندما يكون $\sin\Theta = \frac{e}{g}$؛ وتتوافق كلٌّ نقطة من هاتين النقطتين مع حلٍّ واحد للمسألة. لا يُشير ابن الهيثم إلى إمكانية وجود حلّين. عندما تكون النقطة C في رأس القطع المكافئ، تكون النقطة I متطابقة مع هذا الرأس، فلا يُمكِن القيام بالعمل بالطريقة نفسها. إذا كانت T نقطة التقاطع بين خطّ التماسّ المطلوب DA وبين المحور، وإذا كانت P مسقط A على المحور، يكون معنا $CP = CT$، فتكون إذاً النسبة $\frac{e}{g} = \frac{AD}{DC} = \frac{AT}{AP}$ معلومة وتكون الزاوية $\widehat{ATP}$ معلومة؛ فترجع المسألة إذاً إلى المسألة ٥٠ من المقالة الثانية لأبلونيوس. لا يتحدَّث ابن الهيثم عن هذه الحالة؛ ولو تصوَّر هذه الحالة لأمكنه أن يجدها بدون فائدة لأنـَّها سهلة.



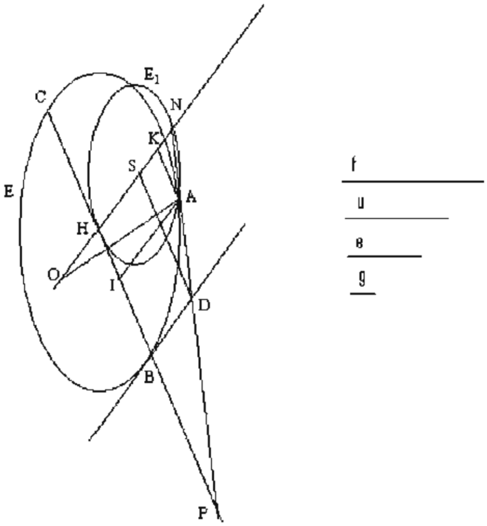
الشكل ١١-٢

١٢- المعطيات هي: القطع المخروطي Γ (القطع الناقص أو القطع الزائد) ذو المركز H، خطّ التماسّ DB في نقطة B من Γ، ونسبة $\frac{e}{g}$.

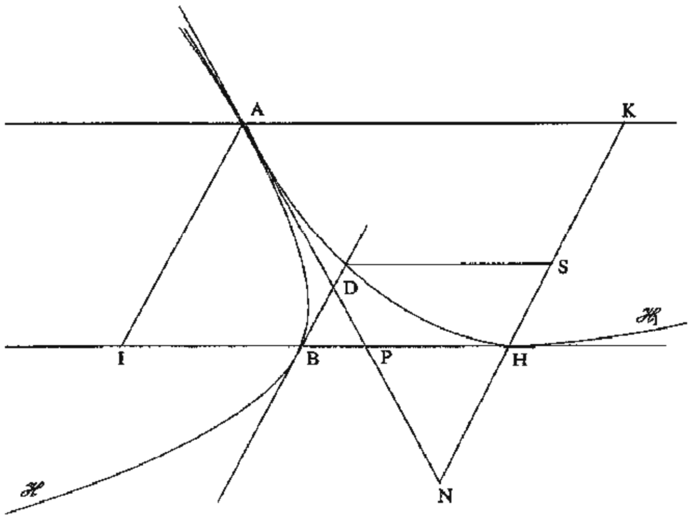
مسألة: أخرِج خطّاً مماساً للقطع المخروطيّ Γ، يقطع DB على النقطة D، بحيث يكون $\frac{e}{g} = \frac{DA}{DG}$ (تكون A نقطة التماسّ).

تحليل: إذا كان a الضلع القائم المُرفق بالقطر d المارّ بالنقطة B، يكون معنا: $k=\frac{HB}{\frac{1}{2}a}=\frac{d}{a}$،

وهذه النسبة معلومة.



الشكل ١٢-١



الشكل ١٢-٢

نفترض أنّ خطّ التماسّ DA معلومٌ؛ لتكن P نقطة التقاطع بين DA وَ BH، وليكن IA بحيث يكون $BD // IA$. يكون معنا: $IH \,.\, HP = HB^2$ وَ $k = \frac{HI.IP}{AI^2}$ (القضية ٣٧ من المقالة الأولى، "المخروطات"). فنستنتج من ذلك أنّ : $\frac{HP}{IP} = \frac{HB^2}{kAI^2}$.

لنخرج HN بحيث يكون $HN // AI$، (وتكون N على AD)؛ ولنخرج AK بحيث يكون $AK // PH$ ، (وتكون K على HN). يكون معنا: $\frac{HP}{PI} = \frac{HN}{IA} = \frac{HB^2}{kAI^2}$، فيكون من ذلك: $HN.IA = \frac{HB^2}{k}$، وكذلك $\frac{HN.IA}{HB^2} = \frac{HN.KH}{HB^2} = \frac{1}{k}$. فنستنتج عندئذ على التوالي: $\frac{HN.KH}{HI.HP} = \frac{1}{k}$، $\frac{HP}{HN} = \frac{k.KH}{HI}$ وَ $\frac{AK}{KN} = \frac{HP}{HN} = \frac{k.KH}{AK}$، فنحصل على: $\frac{KN.KH}{AK^2} = \frac{1}{k}$.

ليكن u الطول المعرَّف بواسطة المعادلة $\frac{KH}{u} = \frac{1}{k}$، فيكون معنا:

$$u.KN = AK^2 . \qquad (١)$$

يكون معنا عندئذ: $u.HN = KA^2.\frac{HN}{NK} = HI^2.\frac{HN}{NK}$؛ ولكنّ $\frac{HB^2}{HI^2} = \frac{PH.IH}{HI^2} = \frac{PH}{IH} = \frac{PH}{AK} = \frac{HN}{NK}$.

ونستنتج من ذلك أنَّ: $u.HN = HB^2$.

إذا كان Γ القطع الزائد $\mathcal{H}$ ، نتناول القطع الزائد $\mathcal{H}_1$ ذا المحور المستعرض NH والضلع القائم a_1 ، بحيث يكون: $\frac{NH}{a_1} = \frac{KH}{u} = \frac{1}{k}$؛ وإذا كان Γ القطع الزائد ε ، نتناول القطع الزائد ε_1 ذا القطر NH والضلع القائم a_1. يمرُّ $\mathcal{H}_1$ (أو ε_1) بالنقطة A على القطع Γ المعني بالأمر[٩].

يكون معنا $HN // DB$ ونُخرج DS بحيث يكون $DS // BH$(تكون S على NH)؛ فنستنتج عندئذ، من المعادلة $HI.HP = HB^2$ ، أنَّ $AN.NP = ND^2$ وَأنَّ $KN.NH = NS^2$ ، فيكون:

[٩] إنّ القطع $\mathcal{H}_1$ (أو ε_1) المعرّف على هذا الشكل مشابه للقطع المعلوم (انظر الملاحظة ٤، ص. ١٢٢)

$\frac{AN}{ND}=\frac{ND}{NP}=\frac{AD}{DP}$ وَ $AN.DP=AD.DN$.

لنضع $f.NK=AN^2$، فيكون $\frac{f}{u}=\frac{AN^2}{AK^2}$؛ ويمكن أن نكتب: $\frac{DP}{DB}=\frac{DN}{NS}=\frac{AN}{NK}=\frac{f}{AN}$،
فنستنتج من ذلك أنّ $f.DB=AN.DP=AD.DN$، فيكون معنا من جهة: $\frac{f}{DN}=\frac{AD}{DB}$،
ويكون معنا من جهة أخرى: $\frac{f}{u}=\frac{AN^2}{AK^2}=\frac{DN^2}{DS^2}$، فنحصل على: $f.DS^2=U.DN^2$.

ولكنّ $U.HN=HB^2=DS^2$، فيكون $f.HN=DN^2$ وَ $\frac{f}{DN}=\frac{DN}{HN}$.

ونستنتج من ذلك أنّ: $\frac{AN}{NS}=\frac{AD}{HS}=\frac{AD}{DB}=\frac{DN}{HN}$، ولكنّ معنا وفقاً للفرضيات: $\frac{DA}{DB}=\frac{e}{g}$،
فنحصل على: $\frac{AN}{NS}=\frac{e}{g}$.

ونحن نعلم أنّ: $KN.NH=NS^2$، فنستنتج أنّ: $\frac{KN.NH}{NA^2}=\frac{NS^2}{NA^2}=\frac{g^2}{e^2}$؛ ولكنّ: $f.NK=NA^2$،

فنستنتج أنّ: $\frac{NH}{f}=\frac{g^2}{e^2}$.

ليكن $f=NO$، فيكون معنا $NO.NK=NA^2$، فنحصل على: $\frac{NO}{AN}=\frac{AN}{NK}$. فيكون المثلّثان KNA وَ ONA اللذان لهما الزاوية المشتركة N، متشابهين، فتكون الزاوية: $\widehat{NAO}=\widehat{AKN}=\widehat{BHN}=\widehat{PBD}$، زاوية معلومة. وهكذا يكون معنا: $\frac{NH}{NO}=\frac{g^2}{e^2}$ [١٠] وَ $\alpha=\widehat{PBD}=\widehat{NAO}$.

توجد النقطة A على القوس $\mathcal{C}$ القابلة للزاوية α والمرسومة على القطعة NO؛ وهي توجَد أيضاً على $\mathcal{H}_1$ أو $\mathcal{E}_1$ حسب الحالة المدروسة.

[١٠] تُبيّن هذه المعادلة أنّ $g<e$ وأنّ $NH<NO$ ؛ إذا كان $g=e$ تكون O في H؛ وإذا كان $g>e$ يكون $NH>NO$.

فإذا كان الخطُّ HN ذا طول وموضع معلومين، تكون النقطة A إذاً معلومة، وتكون الزاويتان $\widehat{ANH}$ وَ $\widehat{AON}$ معلومتين أيضاً، كما تكون الزاوية $\widehat{HPN}$ المساوية للزاوية $\widehat{AON}$ معلومة هي الأخرى.

إذا وُجِد خطّ تماسّ يحقــِّق شروط المسألة فإنــَّه يُشكِّل مع القطر BH زاوية $\widehat{HPN}$ = Θ محدَّدة استناداً لمعطيات المسألة؛ وهذا ما سيُحدِّده ابن الهيثم في بداية التركيب.

١٣- التركيب: خطَّة العمل هي:

ا) رسم شكل $MVLXJR$ مشابه للشكل $NKHOPA$ لنحصل على Θ = $\widehat{JLM} = \widehat{NOA}$.

ب) البرهان على أنــَّه إذا كان خطّ التماسّ PN يُحقــِّق $\widehat{HPN}$ = Θ، يكون معنا $\frac{e}{g} = \frac{DA}{DG}$.

ج) المناقشة.

ا) لنأخذ فرضيات القضية ١٢:

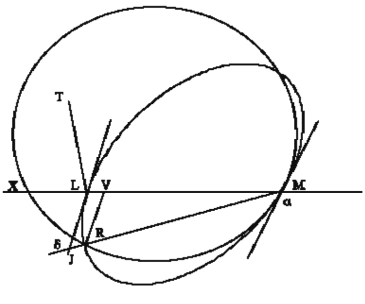
$\frac{d}{a} = \frac{HB}{\frac{1}{2}a} = k$، α = زاوية الترتيب، النسبة $\frac{e}{g}$ معلومة، ولنأخذ خطّين ML وَ TL بحيث يكون $\frac{1}{k} = \frac{LM}{LT}$، ونأخذ شكلين – القطع الناقص $\mathcal{E}_2$ وفرع القطع الزائد $\mathcal{H}_2$ المارّ بالنقطة L – يكون الخطّ ML قطراً لهما (قطراً مُجانباً في حالة $\mathcal{H}_2$)، ويكون TL ضلعاً قائماً وتكون α زاوية ترتيب. [يكون $\mathcal{H}_2$ وَ $\mathcal{E}_2$ إذاً مشابهين لـِ $\mathcal{H}_1$ وَ $\mathcal{E}_1$].

ليكن XM الخطّ المحدَّد بالمعادلة $\frac{g^2}{e^2} = \frac{LM}{MX}$، حيث تكون M نقطة على الخطّ ML؛ ونتناول الدائرة $\mathcal{C}$ التي تمرُّ بالنقطتين M وَ X بحيث تكون إحدى القوسين $\widehat{MX}$ قابلةً للزاوية α. ولنلاحظ أنَّ ابن الهيثم لا يوضِّح إذا كانت زاوية الترتيب ترمز إلى الزاوية الحادَّة أو إلى الزاوية المنفرِجة. فإحدى القوسين $\widehat{MX}$ من الدائرة $\mathcal{C}$ قابلة للزاوية α والأخرى قابلة للزاوية المكمِّلة للزاوية α. وتوجد، من جهة أخرى، دائرتان متناظرتان

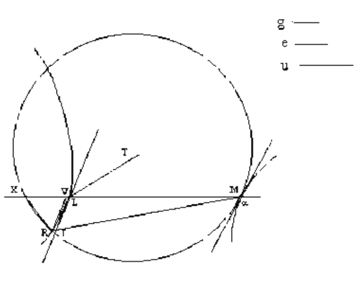
بالنسبة إلى الخطّ L؛ ويُمكن أن نأخذ تلك التي تمسُّ القطع الناقص $\mathcal{E}_2$ في النقطة M (أو الفرع الثاني من $\mathcal{H}_2$).

يقول ابن الهيثم إنّ القوس القابلة للزاوية α تقطع القطعَ المخروطيَّ ($\mathcal{E}_2$ أو $\mathcal{H}_2$) "على تصاريف الأحوال"؛ وهذا غير صحيح كما يُبيِّن ذلك ابن الهيثم نفسه عندما يتفحَّص لاحقاً الحالات الخاصَّة في الفقرة المكرَّسة للمناقشة.

لتكن R نقطة التقاطع ولتكن VR إحداثيّتها العمودية على XM. نحن نعلم أنّ $\widehat{RVM} = \alpha = \widehat{MRX}$؛ فيكون المثلّثان MVR و MRX متشابهين ويكون معنا: $\frac{MR}{MV} = \frac{MX}{MR}$، أو أيضاً: $MR^2 = MV \cdot MX$، فيكون من ذلك: $\frac{VM \cdot ML}{MR^2} = \frac{ML}{MX} = \frac{g^2}{e^2}$.

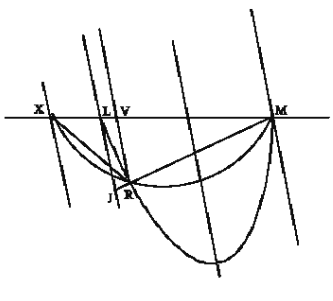


الشكل ١٣-٢

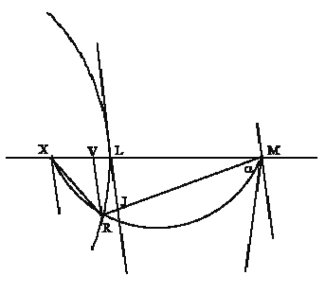


الشكل ١٣-١

وتوجَد إمكانية أخرى للقوس القابلة للزاوية α، وهي أن يكون خطّ التماسّ في النقطة X موازياً لخطّ التماسّ مع $\mathcal{E}_2$ أو مع $\mathcal{H}_2$ في النقطة L.



الشكل ١٣-٤



الشكل ١٣-٣

ويكون معنا من جهة أخرى، بما أنَّ نقطة R موجودة على $\mathcal{E}_2$ أو $\mathcal{H}_2$:

$$\frac{VM.ML}{VR^2}=\frac{ML}{LT}=\frac{1}{k}$$ (معادلة القطع المخروطي).

يقطع الخطُّ الخارجُ من L، والموازي للخط VR، MRعلى النقطة J ؛ الزاوية $\widehat{LJM}$ معلومة لأنَّ $\widehat{JLM} = \alpha$ معلومة والزاوية $\widehat{LMJ}$ معلومة (لأنـــَّها مُحدَّدة بالنقطتين المعلومتين L وَ M وبالنقطة R التي هي نقطة تقاطع القطع المعلوم $\mathcal{E}_2$ أو $\mathcal{H}_2$ مع قوس من دائرة معلومة). ليكن $\widehat{LJM}=\Theta$.

لنَعد إذاً إلى القطع ABC. لنرسم خطَّ تماسّ يُشكــِّل مع القطر HB زاوية مساوية للزاوية $\widehat{LJM}$؛ لتكن A نقطة التماسّ وَ P نقطة تقاطع خطّ التماسّ مع القطرPH، حيث يكون IA خطّ الترتيب. تــُحدَّد النقطتان N وَ K كما جرى في القضيَّة ١٢، كما تــُعرَّف النقطة A على الخطّ HN بواسطة : $\frac{ON}{NH}=\frac{XM}{ML}=\frac{e^2}{g^2}$، مع $\widehat{HPA}=\widehat{LJM}=\Theta$ وَ $\alpha=\widehat{JLM}=\widehat{PHN}=\widehat{PLA}=\widehat{AKN}$.

المثلّثات AKN، NPH، API، MRV وَ MJL متشابهة. ونحن نعلم أنَّ: $\frac{1}{k}=\frac{MV.VL}{VR^2}$، فيكون معنا إذاً: $\frac{AI}{IP}.\frac{AI}{HI}=\frac{MV}{VR}.\frac{VL}{VR}$. ولكننا نستنتج من تشابه المثلّثات: $\frac{AI}{IP}=\frac{NH}{HP}=\frac{ML}{LJ}=\frac{MV}{VR}$، فيكون بالتالي: $\frac{HK}{KA}=\frac{AI}{HI}=\frac{VL}{VR}$. يكون معنا عندئذ:

$$\frac{1}{k}=\frac{ML}{LT}=\frac{MV}{RV}.\frac{LV}{VR}=\frac{NK}{KA}.\frac{KH}{KA}=\frac{NK.KH}{KA^2}.$$

ونستنتج من $\frac{RV}{VM}=\frac{KA}{KN}$ ومن $\frac{LV}{VR}=\frac{HK}{KA}$، أنَّ $\frac{LV}{VM}=\frac{HK}{KN}$ وَ $\frac{LM}{VM}=\frac{NH}{KN}$. ولكنَّ: $\frac{ML}{MX}=\frac{HN}{NO}$، فنستنتج أنَّ: $\frac{KN}{NO}=\frac{MV}{MX}=\frac{MV^2}{MX.MV}=\frac{MV^2}{MR^2}=\frac{KN^2}{NA^2}$ ؛ فيكون من ذلك $KN.NO=NA^2$.

لنأخذ u بحيث يكون: $\frac{1}{k}=\frac{KH}{u}$ ، فيكون معنا: $\frac{1}{k}=\frac{KH.NK}{u.NK}$. ولكنَّ $\frac{1}{k}=\frac{KH.NK}{KA^2}$، فيكون $u.NK=KA^2$، وبالتالي: $\frac{NO}{u}=\frac{NA^2}{KA^2}$.

إنَّ لدينا من جهة أخرى: $\frac{KN}{NH}=\frac{AK}{PH}=\frac{IH}{HP}=\frac{IH^2}{HP.HI}=\frac{IH^2}{HB^2}=\frac{AK^2}{HB^2}$، فيكون معنا إذاً: $\frac{u.KN}{u.NH}=\frac{AK^2}{HB^2}$، ولكنَّ: $u.NK=KA^2$، فنحصل على: $u.NH=HB^2$.

لنُخرج (كما فعلنا في القضية ١٢) الخطَّ DS الموازي للخط AK؛ فنحصل من $HI.HP=HB^2$ على $NA.NP=ND^2$ وعلى $NK.NH=NS^2$.

يكون معنا، من جهة أخرى، $\frac{HN}{ON}=\frac{ML}{MX}=\frac{g^2}{e^2}=\frac{HN.NK}{ON.NK}=\frac{NS^2}{NA^2}$، فنحصل على: $\frac{NA}{NS}=\frac{e}{g}$. ونحصل من $ON.NK=NA^2$ على $\frac{ON}{NA}=\frac{AN}{NK}=\frac{PN}{NH}$، فيكون $ND^2=AN.NP=ON.NH$ وعلى $\frac{ON}{NH}=\frac{ND^2}{NH^2}=\frac{e^2}{g^2}$.

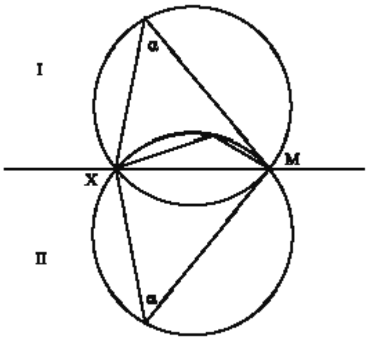
وهكذا يكون معنا: $\frac{AN}{NS}=\frac{ND}{NH}=\frac{AD}{HS}=\frac{AD}{DB}$، وبالتالي $\frac{AD}{DB}=\frac{e}{g}$؛ فتحقّق النقطة A الشروطَ المطلوبة في هذه المسألة.

مناقشة المسألة: تعود هذه المناقشة إلى دراسة وجود النقطة R، نقطة تقاطع $\mathcal{H}_2$ (أو $\mathcal{E}_2$) مع القوس $\mathcal{C}$ القابلة للزاوية α والمحدَّدة استناداً إلى الخطين ML وَ MX. لقد فرضنا $\frac{ML}{MX}=\frac{g^2}{e^2}$. يقول ابن الهيثم "ونجعل أصغرهما قطراً للقطع الزائد"، فإذاً:

إذا كان $g>e$، نأخذ ML كقطر للقطع $\mathcal{H}_2$ (أو $\mathcal{E}_2$) ونأخذ MX كوتر للقوس $\mathcal{C}$ ، وهذا ما فعلناه في كل الأشكال.

إذا كان $g<e$، يكون معنا $ML > MX$، فيجب أن نأخذ MX كقطر، وهذا ما يرجع إلى تبديل الحرفين L وَ X في الأشكال. ولكنَّ الاستدلال المُتَّبع في التركيب يُصبح غيرَ صالح.

يوضّح ابن الهيثم بعد ذلك كيفية اختيار القوس C القابلة للزاوية α؛ إذ إنّــه توجد أربع أقواس ممكنة وفقاً لكون α حادّة أو منفرجة، أو وفقاً لأخذ نصف المستوي I أو نصف المستوي II.



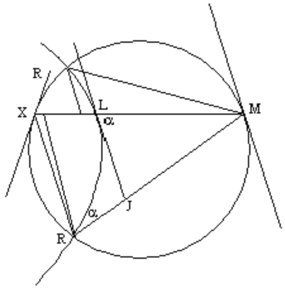
الشكل ١٣-٥

ومهما كان اختيار القوس المعنية بالأمر، في حالة القطع الزائد $\mathcal{H}_2$، فإنّــها تقطع $\mathcal{H}_2$ على نقطة لأنّ M توجَد خارج الفرع الذي يمرّ بالنقطة L، في حين أنّ X توجَد خارجه (إذا افترضنا أنّ $ML < MX$).

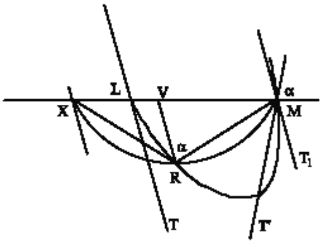
ونختار، في حالة القطع الناقص $\mathcal{E}_2$، نصفَ هذا القطع الذي يجعل فيه خطُّ التماسّ TL الزاوية $\widehat{MLT}$ حادّة. وخطُّ التماسّ مع القطع الناقص في النقطة M هو MT_1، حيث يكون $TL \parallel MT_1$.

ليكن MT' بحيث يكون $\widehat{LMT'} = \widehat{MLT}$؛ MT' هو خطُّ تماسّ مع القوس القابلة للزاوية المنفرجة α. وتكون هذه القوس داخل القطع الناقص، في جوار النقطة M، والنقطة X من هذه القوس هي خارج القطع الناقص؛ والقوس المعنية بالأمر ونصف القطع الناقص لهما نقطة مشتركة وحيدة هي R.

إذا كان ML المحور الأصغر للقطع الناقص $\mathcal{E}_2$، يكون ML عندئذ[11] قطراً لـ $\mathcal{C}$ ويكون $\mathcal{E}_2$ وَ $\mathcal{C}$ متماسَّين في النقطة M. وإذا تناولنا المحور الكبير YZ للقطع الناقص والوتر TU

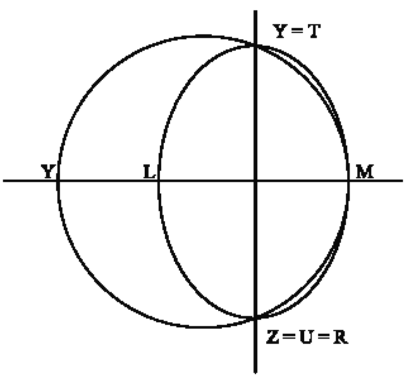


الشكل ١٣-٦

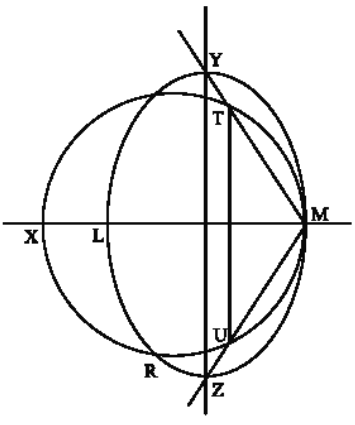


الشكل ١٣-٧

المفصول في الدائرة بالزاوية $\widehat{YMZ}$ التي هي منفرجة لأنَّ $YZ < ML$، يُميِّز ابن الهيثم بين ثلاث حالات: ١) $TU = YZ$ ؛ ٢) $TU < YZ$ ؛ ٣) $TU > YZ$.



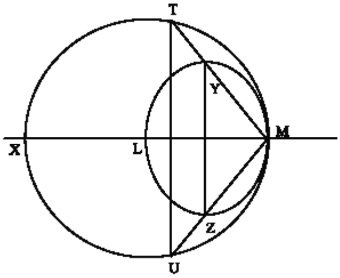
الشكل ١٣-٨



الشكل ١٣-٩

---

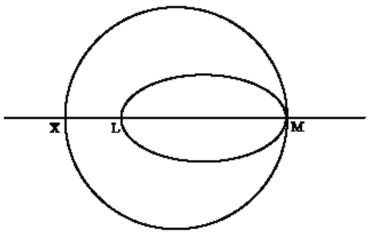
[11] هذا ما يفرض أن يكون $1 > \frac{1}{k} = \frac{ML}{LT}$، فيكون $1 < k$.



الشكل ١٣-١٠

يتقاطع $\mathcal{E}_2$ وَ $\mathcal{C}$ في الحالتين الأوليين، فتكون R موجودة. ولا تكون R موجودة في الحالة الثالثة.

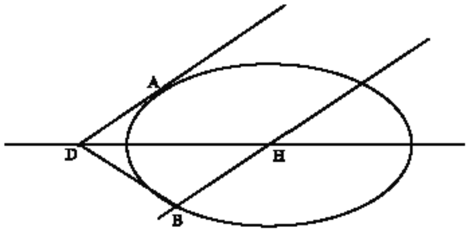
وإذا كان ML، قطر $\mathcal{E}_2$، المحور الأعظم[١٢] لهذا القطع، تكون النقطة X خارج القطع الناقص.



الشكل ١٣-١١

إذا كان $e = g$ ، نعود إلى القطع الأوّليّ Γ($\mathcal{H}$ أو $\mathcal{E}$) : إذا كان القطرُ BH المحورَ المُجانِب لـِ $\mathcal{H}$ أو محورَ $\mathcal{E}$، تكون المسألة مستحيلة (وفقاً للقضيتين ٢٩ وَ ٣٠ من المقالة الثانية). إذا لم يكن القطرُ BH محوراً، يقطع خطُّ التماس في B هذا المحورَ على النقطة D، ويكون خطُّ التماسّ الثاني الخارج من B، أي BA، مساوياً للخطّ BD.

[١٢] هذا ما يفرض $k > 1$.



الشكل ١٣-١٢

دراسة القضيتين ١٢ وَ ١٣

المعطيات: قطع مخروطيٌّ Γ ($\mathcal{H}$ أو $\mathcal{E}$) مركزه H، خط التماسّ BD في نقطة B من Γ والنسبة $\frac{e}{g}$.

مسألة: المطلوب أن نـُخرِج خطاً مماسّاً لـِ Γ يقطع BD على النقطة D، بحيث يكون معنا $\frac{DA}{DB}=\frac{e}{g}$، إذا كانت A نقطة التماسّ.

يتميَّز القطع Γ بالقطر $2HB = d$، بالضلع القائم a المرفق به ($\frac{d}{a}=k$) وبالزاوية α التي يشكـّلها HB مع الاتّجاه المرافق، وهي الزاوية التي تُسمّى "زاوية الترتيب" (توجَد إمكانيّتان وفقاً لكون α حادّة أو منفرجة).

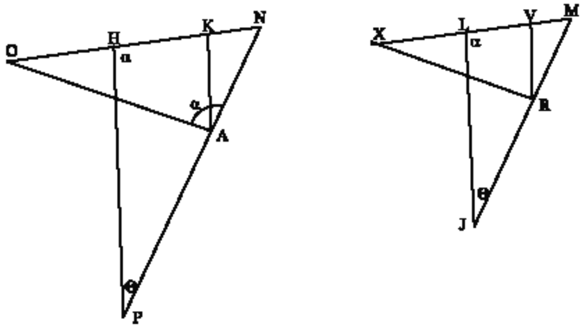
وهكذا يكون معلوماً في هذه المسألة: الخطُّ HB بوضعه وبطوله، النسبة $\frac{d}{a}=k$، الزاوية α والنسبة $\frac{e}{g}$.

لنلاحظ أنّ ابن الهيثم لا يتناول ، في الحالة التي يكون فيها Γ قطعاً زائداً، سوى الفرع الذي يتضمّن النقطة B.

ولقد قصد ابن الهيثم، في القضيتين ١٢ وَ ١٣ أن يُبيّن أنّ المسألة ترجع إلى رسم خطّ تماسّ يُشكـّل زاوية معلومة مع HB، قطر القطع Γ.

١) إذا كان خطّ التماسّ في النقطة A حلاً للمسألة، وإذا كان يقطع القطر HB على النقطة P ويقطع القطر المرافق له على النقطة N، فإنّ الزاوية $\widehat{HPN}$ معلومة لأنّ المثلّث HPN مشابه لمثلّث يُمكن رسمه استناداً إلى معطيات المسألة.

يتناول ابن الهيثم في التحليل، لاستخلاص هذه النتيجة، المثلّثَ NOA المشابه للمثلّث HPN، كما يُقدّم، في بداية التحليل واستناداً إلى المعطيات، رسمَ المثلّثين MXR وَ MJL المشابهين للمثلّثين NOA وَ HPN. يكون معنا حينئذ $\widehat{NPH} = \widehat{MJL} = \Theta$، وهذه الزاوية لا تتعلّق إلا بالمعطيات.



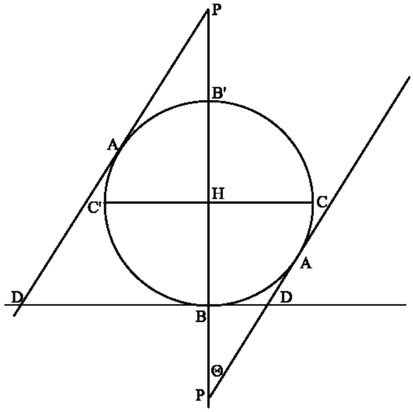
الشكل ١٣-١٣

يُذكـّر ابن الهيثم بأننا، وفقاً للقضيتين ٥٧ وَ ٥٩ من المقالة الثانية، نعرف كيف نرسم خطّاً مماسّاً للقطع Γ بحيث يكون $\widehat{NPH} = \Theta$.

ثمّ يُبيّن أنـّه، إذا كان $\widehat{NPH} = \Theta$، فإنّ خطّ التماس يُشكـّل حلاً للمسألة، أي أنـّه يُحقـّق المعادلة: $\frac{e}{g} = \frac{DA}{DB}$.

ملاحظات:

١) إذا كان القطع Γ دائرة، مع العلم أنّ خطّ التماسّ في B معلومٌ مهما كانت النقطة A إلا إذا كانت A في B' على القطر HB، فإنّ خطّ التماسّ في A يقطع خطّ التماسّ في B على النقطة D ويكون معنا $\frac{DA}{DB} = 1$ فيكون $\frac{e}{g} = 1$.



الشكل ١٣-١٤

٢) يكتب ابن الهيثم "نخرج اد على استقامة في جهة د، فهو يلقى حب ، فليلقه على نقطة ف"[13]. وهذا صحيح في حالة القطع الزائد إذا تناولنا فرع $\mathcal{H}$ الذي توجَد عليه النقطة B. أمّا في حالة القطع الناقص (وفي حالة الدائرة أيضاً)، فيُمكن أن توجَد لدينا عدة أوضاع. ليكن CC' القطر المُرفـَق بـ BHB'. إذا كانت A في C أو في C'، يكون خطّ التماسّ موازياً لـ BH، فلا تكون P موجودة. وإذا كانت A على القوس $\widehat{BC}$ أو على القوس $\widehat{BC'}$، تكون P على امتداد AD من جهة D؛ والنقاط التي تدخل في الدراسة هي بالترتيب A، D، P وَ H، B ، P. ولكن إذا كانت A على القوس $\widehat{B'C}$ أو على القوس $\widehat{B'C'}$ تكون النقاط وفقاً للترتيب D، A، P وَ B، H، P. (انظر الأشكال لاحقاً).

إنـّـه من المحتمل، إذاً، أن يكون ابن الهيثم قد فرض A على القوس $\widehat{CBC'}$. ولكننا نلاحظ أنّ الاستدلال صالح لكل موضع للنقطة A غير مطابق لـ C أو لـ C'، بشرط أن نأخذ الزاوية $\widehat{PHN} = \widehat{PBD} = \alpha$ كـ "زاوية ترتيب".

وإذا كان هناك، من جهة أخرى، نقطتان A متناظرتان بالنسبة إلى النقطة H، يكون خطّا التماسّ الخاصّان بهما متوازيين وتكون النقطتان P المرفقتان بهما متناظرتين بالنسبة إلى النقطة H، كما تكون النقطتان N المرفقتان بهما متناظرتين بالنسبة إلى النقطة H.

[13] انظر ص. ٢٢٣.

ويكون الطولان DN المرفقان بهما متساويين، فتكون النسبة $\frac{ND}{NH}$ هي نفسها للنقطتين المعنيتين بالأمر؛ وكذلك هي الحال بخصوص النسبة $\frac{DA}{DB}$ ، لأنَّ $\frac{DA}{DB} = \frac{DN}{HN}$.

وتكون هذه النتيجة مُحقَّــقة في حالة القطع الزائد وفي حالة القطع الناقص أيضاً.

وهكذا يوجَد، لكل نقطتين على Γ متناظرتين بالنسبة إلى النقطة H، خطّا تماسّ متوازيان مُرفَقان بهاتين النقطتين، فيكون معنا نفس الزاوية $\Theta = \widehat{NPH}$ ونفس النسبة $\frac{DA}{DB}$.

وهذا ما يبيِّن السبب الذي جعل ابن الهيثم يتناول فرعاً من القطع الزائد فقط أو نصف قطع ناقص فقط.

٣) يُدخِل ابن الهيثم، انطلاقاً من المعادلتين $\frac{HP}{IP} = \frac{NH}{IA} = \frac{HB^2}{k.IA^2}$، العبارة $\sigma = k.IA^2$، حيث تكون k معلومة؛ ولكنَّ σ غير معلومة لأنَّ IA غير معلومة. كما يُدخِل العبارة $q = \frac{HB^2}{k} = \Delta^2$، حيث تكون q معلومة لأنَّ k وَ HB معلومتان، وتكون Δ أيضاً معلومة.

يكون معنا عندئذ :

$$\frac{NH}{IA} = \frac{HB^2}{\sigma} = \frac{q}{IA^2}. \qquad (١)$$

نستنتج من (١) :

$$NH.AI = q \quad (\text{أو } NH.HK = q \text{، لأنَّ } HK = IA) \qquad (٢)$$

وَ $\frac{q}{HB^2} = \frac{IA^2}{\sigma}$، أي أنَّ:

$$\frac{1}{k} = \frac{IA^2}{\sigma} = \frac{NH.HK}{HB^2}. \qquad (٣)$$

ما هي فائدة إدخال σ، q وَ Δ التي لا يتحدَّث عنها ابن الهيثم بعد ذلك؟ وقد لا يتطلّب الحساب المؤدّي إلى (٢) وَ (٣) أكثر من عدة سطور بدون استخدام σ أو q ، ولكنَّ معالجة النِّسب تستلزِم غالباً إدخال مثل هذه المقادير.

٤) إذا رمزنا بِـ d إلى BB'، قطر القطع Γ ($\mathcal{H}$ أو $\mathcal{E}$)، و بِـ a إلى الضلع القائم المرفق به، وإذا رمزنا بِـ d' إلى القطر CC' المرفق بالقطر BB' ، و بِـ a' إلى الضلع القائم المرفق به، يكون معنا عندئذ: $k = \frac{d}{a} = \frac{d'}{a'}$، فيكون $\frac{d'}{a'} = \frac{1}{k}$.

يُعرِّف ابن الهيثم القطع الزائد $\mathcal{H}_1$ والقطع الناقص $\mathcal{E}_1$ ذا القطر وذا الضلع القائم ، بحيث يكون $\frac{d_1}{a_1} = \frac{1}{k} = \frac{d'}{a'}$.

إنَّ هذا لا يكفي لتعريف $\mathcal{H}_1$ أو $\mathcal{E}_1$، ولكنَّ من الواضح أنَّ ابن الهيثم يفترض بالإضافة إلى ذلك أنَّ القطر المرفق بِـ HN موازٍ لِـ HB، لأنّـه يأخذ AK كخطّ الترتيب للنقطة A (غير أنَّ $AK \parallel HB$).

يكون القطع $\mathcal{H}_1$ (أو $\mathcal{E}_1$)، نتيجة لذلك، مشابهاً للقطع Γ ($\mathcal{H}$ أو $\mathcal{E}$) المعلوم في المسألة.

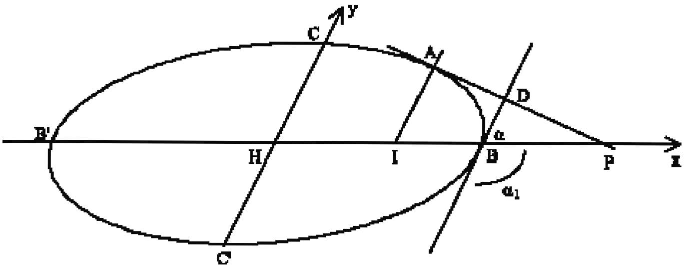
٥) يُقدِّم ابن الهيثم، في القسم المكرَّس للمناقشة، توضيحات حول الأعمال المساعدة التي تدخل في المسألة مع $e \neq g$. وهو يتفحَّص عدداً من الحالات الخاصَّة عندما يكون Γ قطعاً ناقصاً، ولكنّـه لا يُعالج مسألة وجود خطّ تماسّ مُحقِّق لشروط نصّ القضية: هل يكون للمسألة المطروحة حلٌّ، لكل قيمة معلومة للنسبة $\frac{e}{g}$؟

الدراسة التحليلية للمسألة:

أ) ليكن Γ قطعاً ناقصاً ذا مركز H ، وليكن BB' قطراً.

لنأخذ نقطة A على نصف القطع الناقص CBC'. لنضع $d = BB'$ وَ $k = \frac{d}{a}$، حيث يكون a الضلع القائم الخاصّ بِـ d. معادلة القطع الناقص المنسوبة إلى المحورين BH وَ CH، هي

$x^2+k.y^2=\frac{d^2}{4}$. إذا كان AP خطّ التماسّ في A، يكون معنا : $HB^2=HI.HP$. لتكن (x_1, y_1) إحداثيتا النقطة A؛ يكون معنا $0<x_1$ وَ $HP=\frac{d^2}{4x_1}$.



الشكل ١٢-١٥

ويكون معنا أيضاً $k.AI^2=HI.IP$، فيكون $IP=\frac{k.y_1^2}{x_1}$. معادلة خطّ التماسّ في A هي: $y-y_1=(x-x_1)\frac{-x_1}{k.y_1}$. والنقطة D، على هذا الخطّ لها الإحداثية الأولى $\frac{d}{2}$، فيكون:

$$\overline{BD}=y_1+(\frac{d}{2}-x_1).\frac{-x_1}{k.y_1}=\frac{k.y_1^2+x_1^2-\frac{d}{2}x_1}{k.y_1}$$ ،

$$\overline{BD}=\frac{d}{2k.y_1}.(\frac{d}{2}-x_1)$$ ($\overline{BD}$ لها نفس إشارة y_1).

يكون معنا: $\frac{AD}{IB}=\frac{AP}{IP}$، فنحصل على $AD=AP.\frac{(\frac{d}{2}-x_1)x_1}{k.y_1^2}$، $\frac{e}{g}=\frac{AD}{BD}=\frac{2x_1.AP}{d.|y_1|}$.

ولكنّ $AP^2=AI^2+PI^2-2IA.IP.\cos\alpha=y_1^2+\left(\frac{k.y_1^2}{x_1}\right)^2-2|y_1|\frac{k.y_1^2}{x_1}\cos\alpha$

$$=\frac{y_1^2}{x_1^2}\left[x_1^2+k^2.y_1^2-2k\,|y_1|\,x_1.\cos\alpha\right]$$ ،

مع $\alpha<\frac{\pi}{2}$ عندما تكون $A\in BC$ وَ $\alpha>\frac{\pi}{2}$ عندما تكون $A\in BC'$.

يكون معنا إذاً: $\frac{e^2}{g^2}=\frac{4}{d^2}\left[x_1^2+k^2.y_1^2-2k\,|y_1|\,x_1.\cos\alpha\right]$. ولكنّ $x_1^2+k.y_1^2=\frac{d^2}{4}$،

فيمكن إذاً أن نكتب، إذا افترضنا أنَّ $x_1 \neq 0$ وإذا وضعنا $t = \frac{y_1}{x_1}$، مع $0 < t$:

$$\frac{e^2}{g^2} = \frac{x_1^2 + k^2.y_1^2 - 2k\,|y_1|\,x_1.\cos\alpha}{x_1^2 + k.y_1^2} = \frac{1 + k^2 t^2 - 2k\,t.\cos\alpha}{1 + k\,t^2} \quad \text{مع} \quad \frac{d^2}{4x_1^2} = 1 + k\,t^2 .$$

وهكذا تُكتب المعادلة للمتغيِّر t:

$$(*) \qquad k.\left(\frac{e^2}{g^2} - k\right)t^2 + 2k\,t.\cos\alpha + \frac{e^2}{g^2} - 1 = 0 \text{؛}$$

ويكون مميِّزها: $\Delta = k.\left[k.\cos^2\alpha - \left(\frac{e^2}{g^2} - k\right)\left(\frac{e^2}{g^2} - 1\right)\right]$ ، وهو موجب ومساوٍ لـ $k^2.\cos^2\alpha$

عندما يكون $\frac{e^2}{g^2} = 1$ أو k. وإذا أخذنا بعين الاعتبار أنَّ: $\Delta = k.\left[-\frac{e^4}{g^4} + \frac{e^2}{g^2}(1+k) - k.\sin^2\alpha\right]$،

نرى أنَّ Δ تنعدم عندما تأخذ النسبة $\frac{e^2}{g^2}$ إحدى القيمتين m وَ M ، كما تبقى Δ موجبة بين هاتين القيمتين؛ وتوجَد القيمتان 1 وَ k في الفسحة $[m, M]$. فيكون للمعادلة (*) جذران عندما يكون $\sqrt{m} \le \frac{e}{g} \le \sqrt{M}$، ويتطابق هذان الجذران مع طرفي هذه الفسحة. ويساوي جداؤهما:

$$k.\frac{\frac{e^2}{g^2} - 1}{\frac{e^2}{g^2} - k}$$

وهو سالب عندما تكون النسبة $\frac{e}{g}$ بين 1 وَ $\sqrt{k}$؛ فيكون للمعادلة (*) عندئذ جذرٌ موجب t_0 يُقابله حلّ A على القوس $\widehat{BC}$ وحلّ A' على القوس $\widehat{BC'}$. وإذا كانت النسبة $\frac{e}{g}$، بعكس ذلك، في الفسحة $\sqrt{m} \le \frac{e}{g} \le \sqrt{M}$ وليس بين 1 وَ $\sqrt{k}$، فإنَّ لجذري المعادلة (*) الإشارة نفسها؛ ويجب أن يكون نصف مجموعهما، $\frac{\cos\alpha}{k - \frac{e^2}{g^2}}$ ، موجباً، لكي يكونا مقبولين. ويعني هذا الشرط أنَّ $\frac{e}{g} > \sqrt{k}$ إذا كان $\alpha < \frac{\pi}{2}$ وأنَّ $\frac{e}{g} < \sqrt{k}$ إذا كان $\alpha > \frac{\pi}{2}$ ؛ ويكون معنا في هذه الحالة حَلان t_0 وَ t_1 يخصَّان نقطتين على نفس القوس $\widehat{BC}$ وَ $\widehat{BC'}$.

وتصبح المعادلة (*) من الدرجة الأولى، في الحالة الحدّية التي يكون فيها $\frac{e}{g}=\sqrt{k}$:

$2k\,t.\cos\alpha+k-1=0$، فيكون $t=\frac{1-k}{2k.\cos\alpha}$، فلا نحصل على حلّ، إلا إذا كان لـ $(1-k)$ وَ $\cos\alpha$ الإشارة نفسها، أي إذا كان $k<1$ عندما يكون $\alpha<\frac{\pi}{2}$ أو إذا كان $1<k$ عندما يكون $\frac{\pi}{2}<\alpha$. وإذا كان $\alpha=\frac{\pi}{2}$، فإنّ المعادلة تتطلب $1=k$، وهذا ما يجعل t غير محدّدة؛ ويكون القطعُ الناقص، في هذه الحالة، دائرة ويكون $\frac{e}{g}=1$، إذ إنّ خطي التماسّ الخارجين من أيّ نقطة متساويان دائماً.

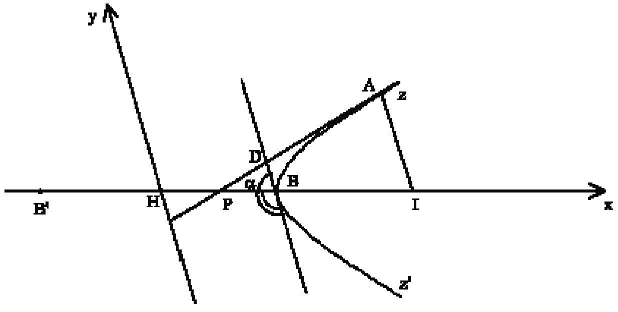
وتصبح المعادلة (*)، في الحالة الحدّية التي يكون فيها $\frac{e}{g}=1$، $k\,t.\left[\left(\frac{e^2}{g^2}-k\right)t+2\cos\alpha\right]=0$،

والحلُّ $t=0$ يخصُّ النقطة B، رأسَ القطع الناقص.

ونحصل بالحساب على: $m=\frac{1+k-r}{2}$ ، $M=\frac{1+k+r}{2}$

مع $1+2k.\cos2\alpha+k^2=(1+k)^2-4k.\sin^2\alpha=r^2$.

ب) ليكن Γ فرعاً من قطع زائد، وليكن $d=BB'$ ، a الضلع القائم وَ $k=\frac{d}{a}$.



الشكل ١٣-١٦

يكون لدينا معادلة فرع القطع الزائد: $x^2-k.y^2=\frac{d^2}{4}$ مع $x>\frac{d}{2}$.

يكون معنا أيضاً $HB^2=\overline{HI}.\overline{HP}$، $\overline{HI}>0$، $\overline{HP}>0$ وَ $\overline{IH}.\overline{IP}=k.AI^2$، $\overline{HI}<0$، $\overline{HP}<0$،

فنحصل على $HP=\frac{d^2}{4x_1}$ وَ $IP=\frac{k.y_1^2}{x_1}$.

وتكون معادلة خطّ التماسّ في A: $y-y_1=\frac{x_1}{k.y_1}(x-x_1)$؛ ويكون

$x=\frac{d}{2} \Leftarrow y=\overline{BD}=y_1+\frac{x_1}{k.y_1}.(\frac{d}{2}-x_1)=\frac{k.y_1^2-x_1^2+\frac{d}{2}x_1}{k.y_1}$، فيكون إذاً: $\overline{BD}=\frac{d}{2k.y_1}.(x_1-\frac{d}{2})$،

($\overline{BD}$ لها إشارة y_1).

يكون معنا: $AI//BD \Leftarrow \frac{AD}{IB}=\frac{AP}{IP} \Leftarrow AD=AP.\frac{(\frac{d}{2}-x_1)x_1}{k.y_1^2}$، فنحصل على

$\frac{2x_1.AP}{d.|y_1|}=\frac{AD}{BD}=\frac{e}{g}$.

ولكنَّ $AP^2=AI^2+PI^2-2IA.IP.\cos\alpha = y_1^2+\left(\frac{k.y_1^2}{x_1}\right)^2-2|y_1|\frac{k.y_1^2}{x_1}\cos\alpha$

$=\frac{y_1^2}{x_1^2}\left[x_1^2+k^2.y_1^2-2k|y_1|x_1.\cos\alpha\right]$،

فيكون $\frac{e^2}{g^2}=\frac{4}{d^2}\left[x_1^2+k^2.y_1^2-2k|y_1|x_1.\cos\alpha\right]$، مع $x_1^2-k.y_1^2=\frac{d^2}{4}$؛

وإذا وضعنا $\frac{|y_1|}{x_1}=t$، يكون معنا: $\frac{e^2}{g^2}=f(t)=\frac{1+k^2t^2-2kt.\cos\alpha}{1-kt^2}$، مع $kt^2=1-\frac{d^2}{4x_1^2}$.

وهكذا تُكتب المعادلة للمتغيِّر t:

(**) $k.\left(\frac{e^2}{g^2}+k\right)t^2-2kt.\cos\alpha+1-\frac{e^2}{g^2}=0$؛

ويكون مميِّزها : $\Delta=k.\left[k.\cos^2\alpha-\left(\frac{e^2}{g^2}+k\right)\left(1-\frac{e^2}{g^2}\right)\right]$،

وهو موجِب ومساوٍ لـ $k^2.cos^2\alpha$ عندما يكون $\frac{e^2}{g^2}=1$ أو k. وإذا أخذنا بعين الاعتبار أنَّ:

$\Delta=k.\left[\frac{e^4}{g^4}+(k-1)\frac{e^2}{g^2}-k.\sin^2\alpha\right]$، سالبٌ عندما يكون $\frac{e^2}{g^2}=0$، نرى أنَّ Δ تنعدم عندما

تأخذ النسبة $\frac{e^2}{g^2}$ قيمة وحيدة m < 0، محصورة بين 0 وَ 1. ولكي تكون Δ موجبة يجب ويكفي أن يكون $\frac{e}{g} \geq \sqrt{m}$؛ فيكون عندئذ للمعادلة (**) جذران يتطابقان عندما يكون $\frac{e}{g} = \sqrt{m}$. وتكون إشارة جداء هذين الجذرين مطابقة لإشارة $\left(1-\frac{e^2}{g^2}\right)$؛ وعندما يكون $\frac{e}{g} < 1$، يكون أحدُ الجذرين موجباً، فنحصل على حلّين A وَ A' للمسألة، حيث تكون هاتان النقطتان وفقاً للترتيب على القوسين $\widehat{BZ}$ وَ $\widehat{BZ'}$. وإذا كان معنا، بعكس ذلك، $1 < \frac{e}{g} < \sqrt{m}$ يكون للجذرين إشارة $\cos \alpha$ ، فلا يوجَد حلّ إلا عندما يكون $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

وإذا كان $\alpha = \frac{\pi}{2}$، فإنَّ المعادلة تتطلب $\frac{e}{g} < 1$. ونحصل بالحساب على: $m = \frac{1-k+r}{2}$ ،

مع $k^2 - 2k.\cos 2\alpha + 1 = (k-1)^2 + 4k.\sin^2 \alpha = r^2$.

ويوجد حلان عندما يكون $\frac{e}{g} > \sqrt{m}$، وهما على القوس $\widehat{BZ}$ إذا كان $1 > \frac{e}{g} > \sqrt{m}$، ولكن عندما يكون $\frac{e}{g} > 1$ فإنَّ أحد الحلّين يكون على $\widehat{BZ}$ بينما يكون الآخر على $\widehat{BZ'}$. وإذا كان $\frac{e}{g} = \sqrt{m}$ نحصل على حلّ مزدوج؛ وإذا كان $\frac{e}{g} = 1$ يوجد حلٌّ على القوس $\widehat{BZ}$ ؛ أما الحلّ الآخر الذي يخصُّ $t = 0$، فهو يتطابق مع النقطة B (هذه هي الحالة المُتَـــرَدِّيَة).

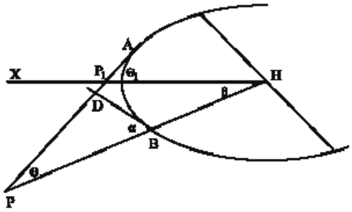
لقد كان هدف ابن الهيثم أن يُبيِّن أنَّ حلّ المسألة المطروحة هنا يُستخرَج من القضية ٥٠ من المقالة الثانية من كتاب "المخروطات": إخراج خطّ تماسّ، على قطع مخروطيّ معلوم، بحيث يُشكِّل مع المحور من جهة القطع المخروطيّ زاوية مساوية لزاوية حادّة معلومة Θ_1. تكون القضية ٥٠ قابلة للحل في حالة القطع الناقص لكلّ زاوية حادّة؛ أما في حالة القطع الزائد، فلا يوجَد حلّ للمسألة إلا إذا كانت الزاوية Θ_1 أعظم من الزاوية الحادّة المشكـــّلة بين الخطّ المقارَب والمحور.

يكون القطر الذي نتناوله هنا قطراً مُجانباً HB يُفترَض أن يكون مختلفاً عن المحور HX.

يقطع خطُّ التماسّ المطلوب DA، على النقطة D، خطَّ التماسّ في B، ويقطع القطر HB في P.

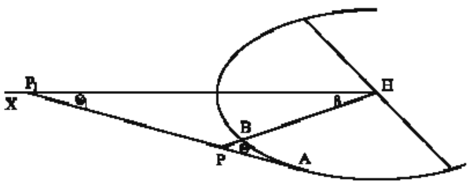
يُبيِّن ابن الهيثم في التحليل، مُستخدماً الرسم المساعِد المدروس في بداية التركيب، أنّه إذا كانت النسبة $\frac{DA}{DB} = \frac{e}{g}$ معلومة، فإنّ الزاوية $\widehat{APB} = \Theta$ تكون معلومة؛ وهو يقول في التركيب إنّ Θ_1 تكون معلومة إذا كانت Θ معلومة.

لتكن β الزاوية التي يُشكّلها HX مع HB، فيكون بين Θ (زاوية خط التماسّ AP مع HB)، Θ_1 (زاوية خط التماسّ AP مع HX) وَ β علاقات مرتبطة بحالة الشكل وخاصّة بالزاوية $\widehat{PBD} = \alpha$.



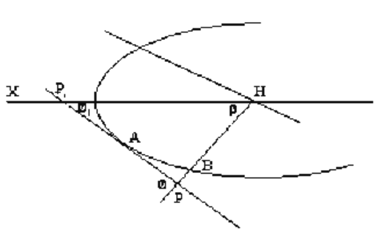
الشكل ١٣-١٧-أ

$\Theta_1 - \beta = \Theta$ ، α حادّة



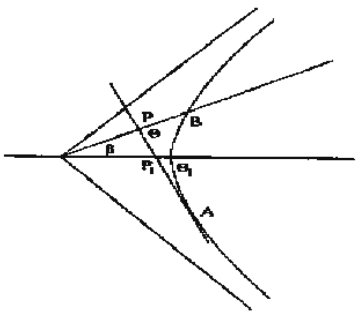
الشكل ١٣-١٧-ب

$\Theta_1 + \beta = \Theta$ ، α منفرجة



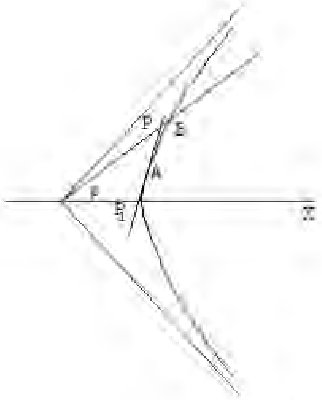
الشكل ١٣-١٧-جـ

$\pi - (\Theta_1 + \beta) = \Theta$ ، α منفرجة



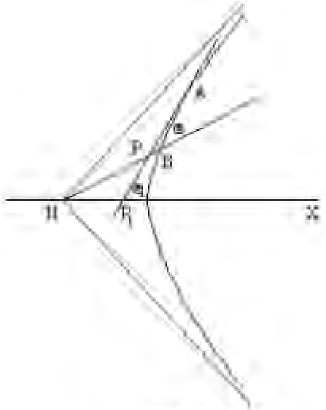
الشكل ١٣-١٧-د

$\Theta_1 + \beta = \Theta$ ، α حادّة



الشكل ١٣-١٧-و

$\Theta+\Theta_1-\beta=\pi$ ، α حادّة



الشكل ١٣-١٧-هـ

$\Theta=\Theta_1-\beta$ ، α منفرجة

التحديد التحليلي للزاوية $\Theta=\Theta_1+\beta$

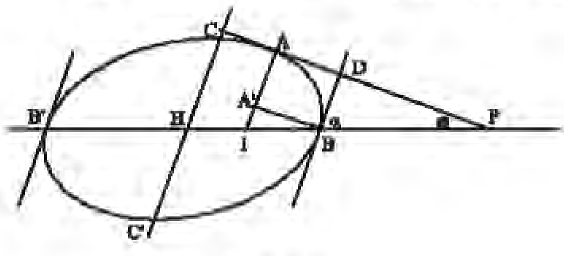
إنّ تحديد Θ بواسطة رسم مساعد تُستخدم فيه المعطيات $k=\frac{d}{a}$، α و $\frac{e}{g}$، قد يتطلب مناقشة لم يقم بها ابن الهيثم ؛ وهي معقّدة ، ويظهر تعقيدها في العلاقة التي تربط بين $\frac{e}{g}$، Θ، α و k.

حالة القطع الناقص

إنّ لدينا:

$$k=\frac{IB.IB'}{AI^2}\text{ ، } HB^2=HI.HP\text{ ، } k=\frac{HI.IP}{AI^2}. \qquad (١)$$

يكون معنا إذاً: $\frac{DB}{PB}=\frac{AI}{PI}=\frac{HI}{k.AI}$ و $PB=HP-HB=\frac{HB.BI}{HI}$،



الشكل ١٣-١٨

ويكون من جهة أخرى: $\frac{DA}{BI}=\frac{\sin\alpha}{\sin\widehat{PAI}}$، مع $\widehat{PAI}=\widehat{PDB}=\pi-(\alpha+\Theta)$ (α حادّة أو منفرجة)،

فيكون $\sin(\alpha+\Theta)=\sin\widehat{PAI}$، ويكون معنا: $DA=\frac{BI.\sin\alpha}{\sin(\alpha+\Theta)}$ وَ $DB=\frac{HB.BI}{k.AI}$،

فنحصل على $\frac{e}{g}=\frac{DA}{DB}=\frac{k.AI}{HB}.\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\Theta)}$. ولكنّ $\frac{HI}{k.AI}=\frac{AI}{PI}=\frac{\sin\Theta}{\sin(\alpha+\Theta)}$، فتُكتب (١)

على الشكل $k.AI^2=HB^2-HI^2$، فنحصل على $k.AI^2+k^2AI^2\frac{\sin^2\Theta}{\sin^2(\alpha+\Theta)}=HB^2$،

وَ $\frac{HB^2}{k.AI^2}=1+k.\frac{\sin^2\Theta}{\sin^2(\alpha+\Theta)}$. يكون معنا عندئذ: $\frac{g^2}{e^2}=\frac{\sin^2(\alpha+\Theta)}{k.\sin^2\alpha}.\left(1+\frac{k.\sin^2\Theta}{\sin^2(\alpha+\Theta)}\right)$،

فيكون $\frac{g^2}{e^2}=\frac{k.\sin^2\Theta+\sin^2(\alpha+\Theta)}{k.\sin^2\alpha}=f(\Theta)=\frac{\Phi(\Theta)}{k.\sin^2\alpha}$.

هذا الحساب صالح لكلّ موضع للنقطة A على القوس $\widehat{BC}$ ($0<\alpha<\frac{\pi}{2}$) أو على القوس

$\widehat{BC'}$ ($\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$). يكون معنا في الحالتين: $0\le\Theta\le\pi-\alpha$ وَ $\alpha\le\Theta+\alpha\le\pi$،

مع $0=\Theta\Leftarrow\frac{e}{g}=\sqrt{k}$ وَ $\Theta=\pi-\alpha\Leftarrow\frac{e}{g}=1$.

حالة القطع الزائد

إنّ لدينا:

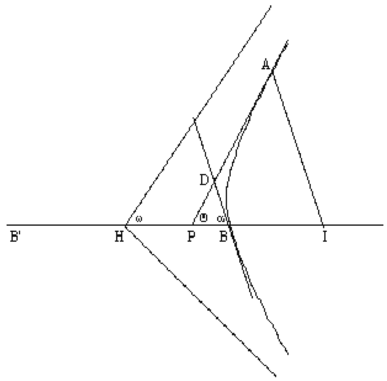
(١) $k=\frac{IB.IB'}{AI^2}\Leftrightarrow HI^2-HB^2=k.AI^2\Leftrightarrow HI^2-k.AI^2=HB^2$،

وَ $HI.HP=HB^2$ ، $HI.HP=k.AI^2$.

نستخرج من ذلك: $PB=HB-HP=HB-\frac{HB^2}{HI}=\frac{HB.BI}{HI}$،

فيكون، كما كان في حالة القطع الناقص: $DB=\frac{HI.HB}{kAI}$.

ويكون معنا أيضاً $DA=BI.\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\Theta)}$، فيكون $\frac{e}{g}=\frac{kAI}{HB}.\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\Theta)}$.



الشكل ١٣-١٩

ولكنْ $\frac{HI}{k\,AI}=\frac{AI}{PI}=\frac{\sin\Theta}{\sin(\alpha+\Theta)}$، كما نستنتج من (١) أنّ:

$$HB^2=k^2AI^2\frac{\sin^2\Theta}{\sin^2(\alpha+\Theta)}-k\,AI^2=k\,AI^2\left(\frac{k.\sin^2\Theta}{\sin^2(\alpha+\Theta)}-1\right)،$$

فنحصل على $\left(\frac{k.\sin^2\Theta}{\sin^2(\alpha+\Theta)}-1\right).\frac{\sin^2(\alpha+\Theta)}{k.\sin^2\alpha}=\frac{g^2}{e^2}$،

فيكون $\frac{\Psi(\Theta)}{k.\sin^2\alpha}=g(\Theta)=\frac{k.\sin^2\Theta-\sin^2(\alpha+\Theta)}{k.\sin^2\alpha}=\frac{g^2}{e^2}$.

وهذا الحساب صالح سواء أكانت α حادّة أو منفرجة.

تكتب العلاقة، بين Θ، α ، k وَ $\frac{e}{g}$ إذاً كما يلي:

$$k.\sin^2\Theta+\varepsilon.\sin^2(\alpha+\Theta)=k.\frac{g^2}{e^2}.\sin^2\alpha \quad (١)$$

حيث يكون $\varepsilon=1$ في حالة القطع الناقص، ويكون $\varepsilon=-1$ في حالة القطع الزائد. وتصبح هذه العلاقة أكثر بساطة، إذا استخدمنا الزاوية Θ_1 التي يُشكّلها خطّ التماسّ المطلوب مع المحور الرئيسيّ للقطع المخروطيّ. لتكن $c=\frac{b}{a}$ النسبة بين المحورين ($0<c\leq1$)، وليكن p ظلّ زاوية انحدار القطر BH؛ تُكتب معادلة القطع المخروطيّ بالنسبة إلى المحورين XH وَ YH،

بالفعل، كما يلي: $x^2+\varepsilon.\frac{y^2}{c^2}=a^2$؛ ويكون ظلّ زاوية الانحدار للقطر المرفق بـِ CH مساوياً لِـ $-\varepsilon\frac{c^2}{p}$. لنحسب $\frac{HB^2}{HC^2}=k$، فنكتب $HB^2=\frac{a^2}{1+\frac{\varepsilon.p^2}{c^2}}(1+p^2)$، $HC^2=\frac{a^2}{1+\frac{\varepsilon.p^2}{c^2}}\varepsilon.(1+\frac{c^4}{p^2})$؛

وهكذا يكون: $k=\frac{1+p^2}{p^2+c^4}c^2$.

ولنحسب الآن الزاوية α عن طريق حساب ظلّها: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{-\varepsilon\frac{c^2}{p}-p}{1-\varepsilon c^2}=-\frac{1}{p}\frac{p^2+\varepsilon c^2}{1-\varepsilon c^2}$.

وتكتّب العلاقة (١) كما يلي:

$$(k+\varepsilon.\cos 2\alpha).\cos 2\Theta-\varepsilon.\sin 2\alpha.\sin 2\Theta)=k+\varepsilon-k.\frac{g^2}{e^2}.(1-\cos 2\alpha) \quad (٢)$$ ،

مع $\sin 2\alpha=-2p\frac{(p^2+\varepsilon c^2)(1-\varepsilon c^2)}{(1+p^2)(p^2+c^4)}$، $\cos 2\alpha=\frac{(p(1-p)-\varepsilon c^2(1+p))(p(1+p)+\varepsilon c^2(1-p))}{(1+p^2)(p^2+c^4)}$.

وهكذا نجد:
$$k+\varepsilon\cos 2\alpha=\frac{(1-\varepsilon c^2)(c^2+\varepsilon p^2)}{p^2+c^4}.\frac{1-p^2}{1+p^2}$$

$$\varepsilon\sin 2\alpha=-\frac{(1-\varepsilon c^2)(c^2+\varepsilon p^2)}{p^2+c^4}.\frac{2p}{1+p^2}$$ ،

فتصبح المعادلة (٢):

$$(1-\varepsilon c^2)\cos 2(\Theta-\beta)=1+\varepsilon c^2-2c^2\frac{G^2}{E^2}\frac{c^2+\varepsilon p^2}{p^2+c^4} \quad (٣)$$ ،

مع $p=tg\,\beta$ (β هي الزاوية المحصورة بين HX و HB).

وهذا ما تـَمْكـُن كتابته، بعبارة أخرى:

$$\cos 2\Theta_1=\frac{1+\varepsilon c^2}{1-\varepsilon c^2}-\frac{2c^2}{1-\varepsilon c^2}\frac{G^2}{E^2}\frac{c^2+\varepsilon p^2}{p^2+c^4} \quad (٤)$$.

وهذا ما يُعطي الشرط التالي، لكي تكون المعادلة ممكنة:

$\left|\frac{1+\varepsilon c^2}{1-\varepsilon c^2}-\frac{2c^2}{1-\varepsilon c^2}.\frac{g^2}{e^2}.\frac{c^2+\varepsilon.p^2}{p^2+c^4}\right|\leq 1$، أو $\varepsilon c^2\leq c^2.\frac{g^2}{e^2}.\frac{c^2+\varepsilon.p^2}{p^2+c^4}\leq 1$.

ويصبح هذا الشرط في حالة القطع الناقص:

(٥-١) $c^2.\dfrac{c^2+p^2}{p^2+c^4} \le \dfrac{e^2}{g^2} \le \dfrac{c^2+p^2}{p^2+c^4}$؛

بينما يصبح في حالة القطع الزائد:

(٥-٢) $\dfrac{e^2}{g^2} \ge c^2.\dfrac{c^2-p^2}{p^2+c^4}$.

ونتحقّق أنّ طرفي المتباينة المزدوجة (٥-١) يتطابقان مع m وَ M الواردتين في المناقشة السابقة، كما يتطابق أيضاً طرف المتباينة (٥-٢) مع m الواردة في المناقشة السابقة.

وإذا كان الشرط (٥-١) محقــّقاً في حالة القطع الناقص، تُحدِّد المعادلة (٤) زاوية حادَّة وحيدة Θ_1، فنحصل على حلّ للمسألة.

وتكتَب المعادلة (٤)، في حالة القطع الزائد، على الشكل الآخر التالي:

(٦) $\cos 2\Theta_1 = \cos 2\omega_1 - \dfrac{g^2}{e^2} c.\dfrac{c^2-p^2}{p^2+c^4}.\sin 2\omega_1$ ،

حيث تكون ω_1 زاوية التي يُشكــِّلها الخطّ المقارَب مع HX؛ وتــُحدِّد هذه المعادلة زاوية حادّة Θ_1 أعظم من ω_1، لأنّ طرفها الأيمن أصغر من $\cos 2\omega_1$.

وهكذا رأينا، خلال هذه المناقشة للمسألة ١٣، أنّ ابن الهيثم لم يعالج مسألة وجود خطّ التماسّ الذي يُحقــِّق الشروط المطلوبة في نصّ القضية. ويُمكن صياغة هذه المسألة على الشكل التالي:

إذا كان القطعُ المخروطيّ Γ معلوماً، وإذا كانت النقطة B معلومة، وهذا ما يجعل إذاً k وَ α معلومتين، هل تكون المسألة قابلة للحلّ لكل قيمة للنسبة $\dfrac{e}{g}$؟

لنتناول من جديد هذه المسألة نفسها.

– إذا كان القطع Γ دائرة، تكون المسألة مستحيلة عندما يكون $\dfrac{e}{g} \ne 1$، وتكون غير محدَّدة(سَيّالة) عندما يكون $\dfrac{e}{g} = 1$، ويقابل كلّ خطّ تماسّ زاوية حادَّة $\Theta = \widehat{APB}$ ونسبة $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{e}{g} = 1$.

وتبقى $\frac{e}{g}$ ثابتة عندما تتغيّر Θ.

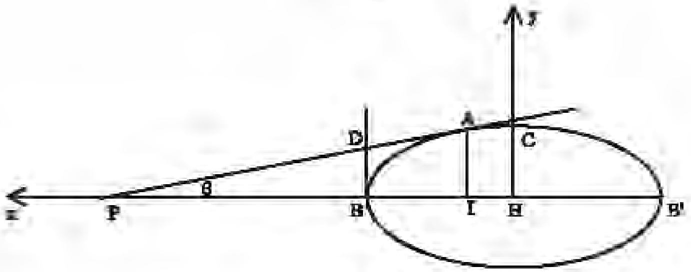
- وإذا كان القطع Γ قطعاً ناقصاً أو قطعاً زائداً، تتغيّر النسبة $\frac{e}{g}$ عندما تتغيّر النقطة A.

لنأخذ كمثال قطعاً ناقصاً ذا محور $B'HB$، فيكون عندئذ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ وَ $k = 1$. نحن نعلم أنّ:

(١) $k = \frac{IB.IB'}{AI^2}$،

(٢) $HI.HP = HB^2$

(٣) $k = \frac{HI.HP}{AI^2}$.



الشكل ١٣-٢٠

لنفرض أنّ I موجودة بين H وَ B، مع $x = HI$ وَ $0 < x < \frac{d}{2}$.

تعطينا المعادلة (١)، إذا استخدمنا المَعْلَم (Hx, Hy):

(٤) $\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x^2 = k.y^2$ معادلة Γ.

نستخرج من (٣) المعادلة: $\frac{HI}{k.AI} = \frac{AI}{PI} = tg\,\Theta$، فنحصل على

(٥) $\frac{x}{k.y} = tg\,\Theta$.

يكون معنا: $DA = \frac{BI}{\cos\Theta}$ ، $PB\,tg\,\Theta = DB$، فنحصل على $\frac{e}{g} = \frac{DA}{DB} = \frac{BI}{PB.\sin\Theta}$.

ولنستخرج من (٢): $\frac{HB^2}{HI} = HP$ وَ $\frac{HB^2}{HI} - HB = HP - HB = PB$، فيكون

$$\frac{HB.BI}{HI} = \frac{HB}{HI}(HB - HI) = PB \ .$$

فلنستخرج من ذلك أنّ :

$$(٦) \qquad \frac{e}{g} = \frac{HI}{HB.\sin\Theta} = \frac{2x}{d.\sin\Theta} \ .$$

ولنستخرج من (٥) وَ (٤): $\left(\frac{d}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{k}.\frac{x^2}{tg\Theta}$، فلنحصل على $\frac{d^2}{4x^2} = 1 + \frac{1}{k\,tg\Theta}$.

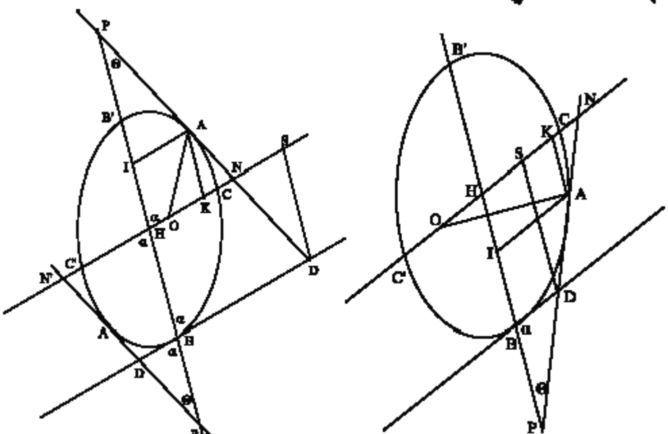
ونستخرج من (٦) عندئذ: $\frac{g^2}{e^2} = \frac{(1+k\,tg^2\Theta)\sin^2\Theta}{k\,tg^2\Theta}$،

$$\frac{g^2}{e^2} = \frac{(1+k\,tg^2\Theta)\cos^2\Theta}{k} = \frac{\cos^2\Theta + k.\sin^2\Theta}{k} = \frac{(k-1).\sin^2\Theta + 1}{k} \ .$$

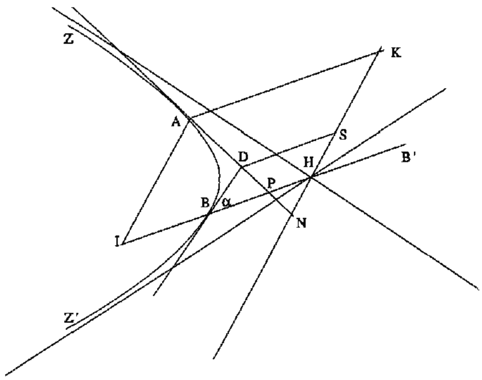
تكون النسبة $\frac{e}{g}$ إذاً دالّة للمتغيّر Θ، عندما تكون k معلومة مع $k > 1$. وعندما ترسم A القوس $\widehat{BC}$، تتناقص Θ من $\frac{\pi}{2}$ إلى 0؛ فيتناقص $\sin\Theta$ من 1 إلى 0، فتتناقص النسبة $\frac{g^2}{e^2}$ من 1 إلى $\frac{1}{k}$؛ فتتزايد النسبة $\frac{e}{g}$ من 1 إلى $\sqrt{k}$.

وهكذا لا تكون المسألة ممكنة، إلا إذا كان $1 \le \frac{e}{g} \le \sqrt{k}$.

لنأخذ الآن قطعاً ناقصاً ذا قطر اختياريّ BHB'. لنفترض أنّ $k < 1$. تبقى المعادلات (١)، (٢) وَ (٣) صحيحة في هذه الحالة.



الشكل ١٣-٢١-ا   الشكل ١٣-٢١-ب



الشكل ١٣-٢١- ج

يقطع خطُّ التماسّ في كلّ نقطة من فرع القطع الزائد الخطَّ BH بين H وَ B.

إذا كانت $A \in BZ$، تكون $\alpha = \widehat{PBD}$ حادّة.

إذا كانت $A \in BZ'$، تكون $\alpha = \widehat{PBD}$ منفرجة.

يكون معنا: $\dfrac{DB}{PB} = \dfrac{AI}{PI} = \dfrac{HI}{k.AI}$ وَ $\dfrac{HB.BI}{HI} = HP - HB = PB$ ؛

ولكنَّ $\dfrac{DA}{BI} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\widehat{PAI}}$، $\pi - (\alpha + \Theta) = \widehat{PDB} = \widehat{PAI}$، $\sin(\alpha + \Theta) = \sin\widehat{PAI}$

فنحصل على: $BI.\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\Theta)} = DA$ وَ $\dfrac{HB.BI}{k.AI} = DB$، $\dfrac{k.AI}{HB}.\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\Theta)} = \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{e}{g}$،

ويكون $\dfrac{2k.y}{d}.\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\Theta)} = \dfrac{e}{g}$.

ولكنَّ

$$\frac{x}{k.y} = \frac{\sin\Theta}{\sin(\alpha+\Theta)} = \frac{AI}{PI} = \frac{HI}{k.AI}, \qquad (٤)$$

وَ

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = x^2 + k.y^2 \qquad (٥)$$

(معادلة القطع الناقص)

فنستنتج من (٤) وَ (٥): $\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 = k^2y^2\dfrac{\sin^2\Theta}{\sin^2(\alpha+\Theta)} + k.y^2$،

فنحصل على: $\dfrac{d^2}{4ky^2} = 1 + \dfrac{k.\sin^2\Theta}{\sin^2(\alpha+\Theta)}$.

يكون معنا عندئذ: $\frac{g^2}{e^2}=\frac{\sin^2(\alpha+\Theta)}{\sin^2\alpha}.\frac{d^2}{4k^2y^2}=\left[1+\frac{k.\sin^2\Theta}{\sin^2(\alpha+\Theta)}\right]\frac{\sin^2(\alpha+\Theta)}{k.\sin^2\alpha}$،

فنحصل على $\frac{g^2}{e^2}=\frac{\sin^2(\alpha+\Theta)+\sin^2\Theta}{k.\sin^2\alpha}$.

وهكذا تكون $\frac{e}{g}$ دالّة للمتغيِّر Θ، عندما تكون k وَ α معلومتين[١٤]. والحساب يصلح عندما تكون A على $\widehat{BC}$ أو على $\widehat{BC'}$. وتكون الزاوية α حادّة عندما تكون A على $\widehat{BC'}$، وتكون α منفرجة عندما تكون A على $\widehat{BC}$.

ويكون معنا في كلتا الحالتين: $0\leq\Theta\leq\pi-\alpha$ وَ $\alpha\leq\Theta+\alpha\leq\pi$.

ويكون: $0=\Theta \Leftarrow \sqrt{k}=\frac{e}{g}$ وَ $\pi-\alpha=\Theta \Leftarrow 1=\frac{e}{g}$.

وهكذا تسمح هذه المناقشة، حول وجود الزاوية Θ، بأن نجد ثانية الشروط التي حصلنا عليها أعلاه بواسطة مناقشة جبرية.

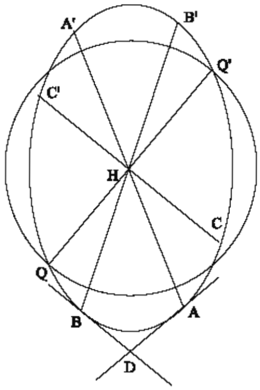
تعالج مناقشة ابن الهيثم بعض الحالات فقط التي يكون فيها الحلُّ ممكناً وبعض الحالات الأخرى التي يكون فيها الحلّ مستحيلاً؛ ولكنَّ مناقشته تبقى غير كاملة. وقد يصعب، من جهة أخرى، القيامُ بالمناقشة الكاملة لوجود نقطة التقاطع R، بالطرق الهندسية. ويُمكن أن نجد لكلّ هذه المسألة حلاً أكثر بساطة من الحلّ الذي بسطه ابن الهيثم[١٥]. يكفي بالفعل أن نتناول تقاطع الدائرة، ذات المركز H ونصف القطر $\frac{\sqrt{ad}}{2}.\frac{e}{g}$، مع القطع الناقص المعلوم أو مع القطع الزائد المُرفَق بالقطع الزائد المعلوم.

وإذا كان هذا التقاطع ممكناً، فإنـــه يُحَدِّد قطرين قد يكونان متطابقين مثل $Q'Q$. نتناول القطر $A'A$، المُرفق بالقطر $Q'Q$ في القطع المخروطيّ Γ، فتكون النقطة A حلاً للمسألة. يكون معنا بالفعل $\frac{DA^2}{BD^2}=\frac{HQ^2}{HC^2}$، وفقاً للقضية ١٧ من المقالة الثالثة من كتاب"المخروطات"؛

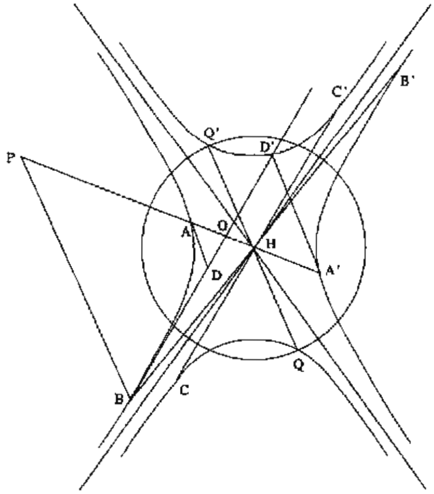
---

[١٤] إذا كان $\alpha=\frac{\pi}{2}$ نجد من جديد $\frac{g^2}{e^2}=\frac{\cos^2\Theta+k.\sin^2\Theta}{k}=\frac{(k-1).\sin^2\Theta+1}{k}$.

[١٥] انظر:
J.P. Hogendijk, *Ibn al-Haytham's Completion of the Conics*, Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences 7 (New York / Berlin / Heidelberg / Tokyo, 1985),
ص. ٣٨٣، مع مناقشة مستندة إلى دليل يستخدم التزايدية والاتصال.



الشكل ١٣ـ٢٢



الشكل ١٣-٢٣

ولكنّ $HQ^2 = \frac{ad}{4} \cdot \frac{e^2}{g^2}$ وَ $HC^2 = \frac{ad}{4}$، فنستنتج أنّ $\frac{AD}{BD} = \frac{e}{g}$.

ونستخدم، في حالة القطع الزائد، القضية ٢٣من المقالة الثالثة من كتاب "المخروطات"؛ فيكون معنا وفقاً لهذه القضية $\frac{e^2}{g^2} = \frac{HQ^2}{HC^2} = \frac{D'A'^2}{BD'^2}$ ، فنحصل على $\frac{e}{g} = \frac{A'D'}{BD'}$. ويكون معنا، من جهة أخرى، $\frac{AD}{BD} = \frac{A'D'}{BD'}$، بفضل التشابه بين المثلّثات $OA'D'$، OAD وَ OPB وبفضل الخاصّة، الواردة في القضية ٣٦ من المقالة الأولى من كتاب"المخروطات"، التي تـُعطي المعادلة $\frac{AP}{A'P} = \frac{AO}{A'O}$.

إنّ عدد الحلول يتعلّق بعدد نقاط التقاطع بين الدائرة والقطع الناقص (أو بين القطع الزائد المُرفق). وإذا رمزنا بـِ α وَ β إلى محوري القطع المخروطي، ليس للمسألة أيّ حلّ إذا كان القطر $\frac{e}{g}.\sqrt{ad}$ أصغر حصراً من β. وكذلك لا يوجد أيّ حلّ، في حالة القطع الناقص، إذا كان $\alpha < \frac{e}{g}.\sqrt{ad}$، في حين إنّـــه يوجَد حلان عندما يكون $\beta < \frac{e}{g}.\sqrt{ad} < \alpha$. ويتطابق الحلان كلّما استـــُبدِلت إحدى المتباينات بمعادلة.

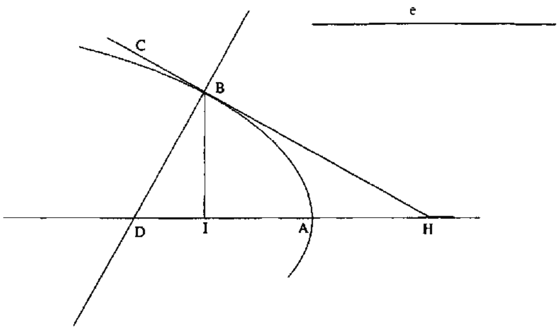
إنّ مناقشة وجود حلول المسألة وعدد هذه الحلول، بواسطة الوسائل الهندسية، يتطلّب الدخول في اعتبارات دقيقة تخصُّ تحدُّب القطع المخروطيّ؛ ويبدو القيامُ بمثل هذه المناقشة صعباً جدّاً بدون استخدام مسائل تحليلية مثل تزايدية نصف قطر الدائرة المساعدة المُعتَبرِ كدالّة للنسبة المعلومة.

يمكننا أن نتساءل لماذا لم يُفكـــِّر ابن الهيثم بمثل هذا الحلّ البسيط، مع العلم أنـــّه كان مطّلِعاً أكثر من أيّ شخص آخر،على كتاب "المخروطات" لأبلونيوس. ويجب أن نـــُذكـــِّر، في محاولتنا للجواب عن هذا السؤال، بأنّ ابن الهيثم من جهة أخرى لم يعالِج مسائل المجسّمات فحسب بل المسائل المستوية (انظر "المعلومات") بواسطة تقاطع القطوع المخروطية. وإنّ اهتمامه، في المؤلّف الحالي، لم يكن منصبّاً على البحث عن أبسط طريقة لحلّ مسألة خاصّة ما، بل على البحث عن فصائل من المخروطات تمكـــّنه من حلّ تلك المسألة.

ولقد رأينا من جهة أخرى كيف استبدل ابن الهيثم، خلال معالجته للمثال الحالي، قطعين مخروطيين بقطعين مخروطيين آخرين من الفصيلة نفسها. ولا ننسَ أنّ ابن الهيثم لم يكن يكتب، بشكل عامّ، ليتكلّم على موضوع معروف، بل ليقدّم نتائج متقدّمة مهمّة في الرياضيات.

١٤– ليكن معنا قطع مكافئ ذو الرأس A والمحور AD؛ وليكن معنا الطول المعلوم e. المطلوب هو إيجاد النقطة B على القطع المكافئ بحيث يقطع خطُّ التماسّ في النقطة B الخطَّ AD على النقطة H مع $e = BH$.

التحليل: لنفرض أنّ النقطة B والخطّ BH معلومان. لنـــُخرِج IB بحيث يكون $DA \perp IB$ وَ $BD \perp BH$. يكون معنا $e^2 = BH^2 = IH \cdot HD$ (المثلّث قائم الزاوية).



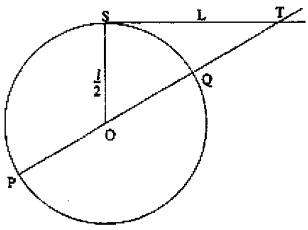
الشكل ١٤

نحن نعلم أنَّ A هي وسط IH، وفقاً لخاصيَّة مسقط خطّ التماسّ على المحور، وأنَّ $ID = \frac{a}{2}$، وفقاً لخاصيَّة المسقط على المحور للخطّ العمودي على خطّ التماسّ، حيث ترمز a إلى الضلع القائم. نستنتج من ذلك الطولين IH وَ ID بطريقة معروفة[١٦]. يكون IH إذاً معلوماً، فيكون الطول IAD معلوماً أيضاً. فنستخرج من ذلك النقطة I.

ملاحظة: ليكن معنا قطع مكافئ Γ ذو رأس A ومحور AD وليكن معنا الطول e. ولنـــُخرِج خطّاً مماسّاً للقطع Γ في النقطة B قاطعاً المحور على النقطة H بحيث يكون $e = BH$.

يُبرهن ابن الهيثم في التحليل أنَّ المعطيات تسمح بتحديد النقطة H. أما في التركيب فهو ينطلق من e ومن ضلع Γ القائم ويقول إنَّ H معلومة ويُضيف ببساطة "لنخرج من النقطة حَ خطّاً مماسّاً للقطع، وليكن $\overline{\text{ح ب}}$"[١٧].

[١٦] يتعلق الأمر بتحديد طولين x وَ y، علماً بأنَّ $x\text{-}y = l$ وَ $x.y = l.L$ ، حيث يكون l وَ L طولين معلومين. نرسم دائرة (O, r)، مع $r = \frac{l}{2}$ ونـُخرج خطّ التماس TS ذا الطول L ؛ والخط OT يقطع الدائرة على النقطتين P وَ Q، فيكون معنا $x = TP$ وَ $y = TQ$. وهذا العمل ممكن دائماً.



[١٧] انظر ص٢٣١.

وهو لا يُعطي أيَّة إشارة لطريقة العمل الهندسي للنقطة H أو للنقطة B. ويتمّ هنا تحديد هاتين النقطتين بواسطة المسطرة والبركار، بطريقة بسيطة.

ويكفي لتحديد النقطة H أن نعرف مقدار HA ؛ ولكنّ $AH = \frac{HI}{2}$ فيكون معنا:

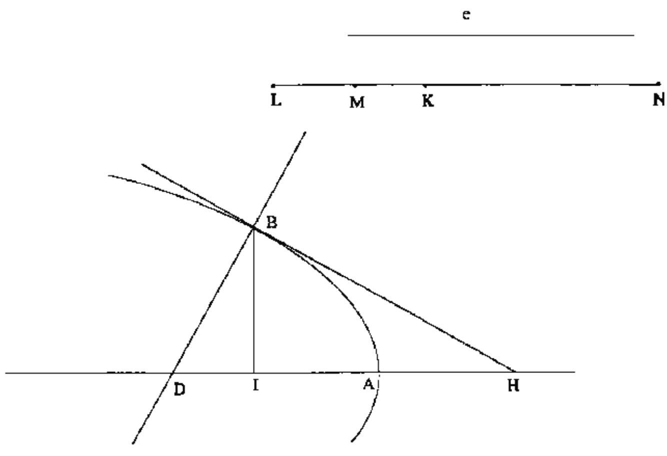
$e^2 = HD.\, HI$ ، $HD - HI = \frac{a}{2} =$ نصف الضلع القائم $= l$.

ونستخرج النقطة I، بعد تحديد النقطة H، لأنّ $AH = AI$، فنحصل على النقطة I لأنّ ID تساوي l، أي نصف الضلع القائم.

وتكون النقطة B المطلوبة نقطة تقاطع الدائرة ذات القطر HD مع الخطّ العمودي Δ في النقطة I على محور Γ.

وكان ابن الهيثم يعلم أنّ تحديد النقطة H يسمح بإيجاد خطّ التماسّ (القضية ٤٩ من المقالة الثانية).

١٥– التركيب: يُبيِّن التركيب أنّ إعطاء الطول والضلع القائم a يسمح بتحديد الطول HI وباستنتاج النقطة H ثمَّ النقطتين I وَ B. ويتمُّ الاستدلال بعد ذلك وفقاً لعكس الترتيب الذي اتُّـبِع في التحليل.



الشكل ١٥

ملاحظة: النقطة B هي النقطة ذات الإحداثية الأولى IA، فتكون إذاً نقطة التقاطع بين القطع المكافئ والخطّ Δ العمودي في النقطة I على المحور؛ والنقطة B هي أيضاً نقطة تقاطع Δ مع الدائرة ذات القطر DH، حيث تُحدّد النقطتان H و D استناداً إلى المعطيات.

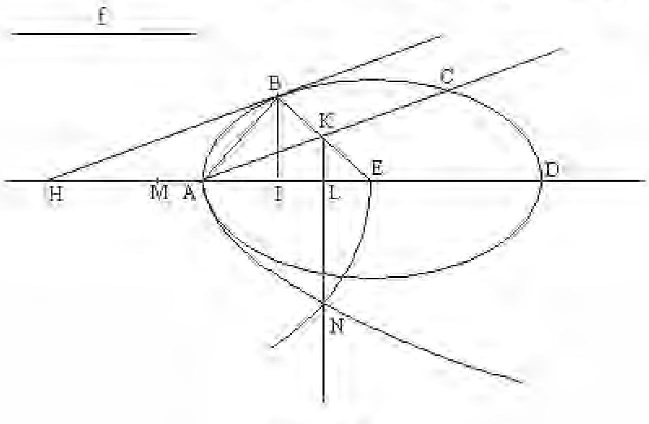
ولنلاحظ أخيراً أنّ الأمر يتعلّق، هنا، بمسألة إدخال خطٍّ ذي طول معلوم e بين القطع المكافئ ومحوره؛ والشرط هو أن يكون الخطّ المُدخَل مماساً للقطع المكافئ.

١٦- ليكن معنا قطع مخروطيّ Γ ناقص أو زائد ذو محور DA ومركز E، وليكن معنا خطّ طوله f. المطلوب هو إيجاد نقطة B على Γ بحيث يقطع خطّ التماسّ في B المحورَ على نقطة H بحيث يكون $HB = f$.

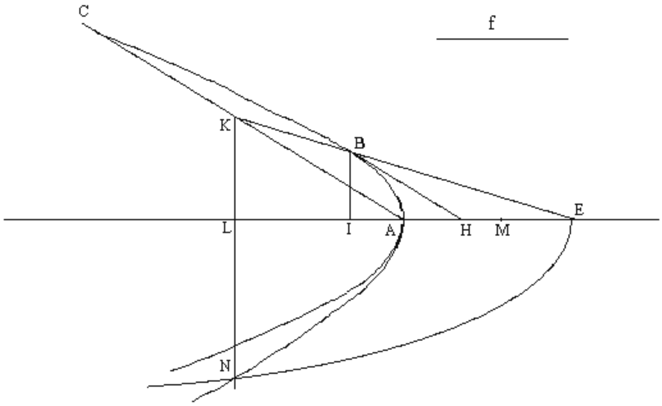
التحليل: ليكن HB خطّ التماسّ المطلوب؛ لنخرج IB و AC بحيث يكون $AD \perp IB$ و $BH \parallel AC$. وليكن a الضلع القائم، فنحدّ النقطة M بالمعادلة $\frac{ME}{MA} = \frac{DA}{a}$، فيكون MA مساوٍ لنصف "الخطّ الشبيه النسبة". (انظر أبلونيوس المقالة السابعة، القضيتين ٢ و ٣، و ص. ٧٥، الحاشية ٢).

يكون معنا إذاً: $\frac{ML.LA}{AK^2} = \frac{ME}{AE}$، ومن جهة أخرى $\frac{HE}{AE} = \frac{HB}{AK}$،

فنحصل على الجداء المعلوم: $HB.AE = HE.AK$.



الشكل ١٦-١



الشكل ١٦ـ٢

ولكنّ القسمة (A, D, I, H) توافقية، وفقاً لخاصّة خطّ التماسّ؛ يكون معنا $EI.EH = AE^2$، فيكون بالتالي: $k = \frac{f}{AE} = \frac{BH}{AE} = \frac{AK}{IE} = \frac{AE.BH}{AE^2} = \frac{AK.HE}{EI.EH}$، فتكون هذه النسبة معلومة. فنستنتج من ذلك أنّ: $\frac{ML.LA}{IE^2} = \frac{AK^2}{IE^2}.\frac{ML.LA}{AK^2} = k^2.\frac{ME}{AE}$.

ولكنّنا قد رأينا (القضية ٣) أنّ $EI.EH = AE^2$، فيكون إذاً: $\frac{ML.LA}{LE.EA} = k^2.\frac{ME}{AE}$.

ليكن $\mathcal{P}$ القطعَ المكافئ ذا الرأس E والمحور LE والضلع القائم AE؛ يقطع $\mathcal{P}$ الخطّ LK على النقطة N. ليكن $\mathcal{H}$ القطعَ الزائد ذا الرأس A والمحور MA والضلع القائم a'، بحيث يكون: $\frac{MA}{a'} = \frac{ME}{AE}\frac{HB^2}{EA^2} = k^2.\frac{ME}{AE}$؛ فيقطع $\mathcal{H}$ الخطّ LK على النقطة N'.

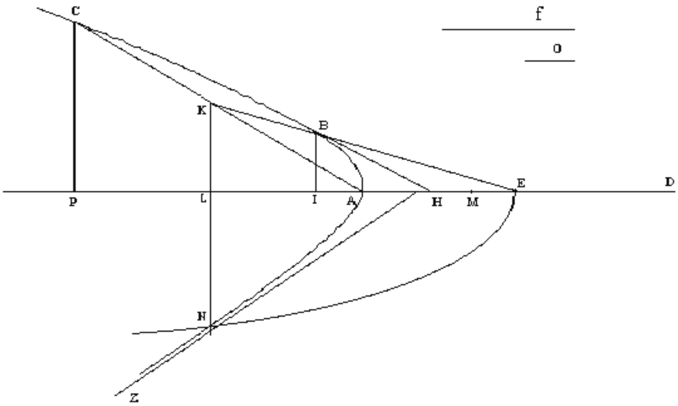
يكون معنا $N \in \mathcal{P}$، فيكون إذاً: $EL.EA = LN^2$؛ $N' \in \mathcal{H}$، فيكون معنا إذاً: $\frac{LM.LA}{LN'^2} = \frac{MA}{a'} = k^2.\frac{ME}{AE}$؛ فنستنتج من (١) أنّ: $EL.EA = LN'^2$، ويكون إذاً $LN^2 = LN'^2$؛ فتكون النقطتان N وَ N' متطابقتين.

فإذا كان خطّ التماسّ BH موجوداً، يكون للقطع الزائد $\mathcal{H}$ وللقطع المكافئ $\mathcal{P}$ نقطة مشتركة هي N.

يتلاقى القطعان المخروطيان $\mathcal{P}$ وَ $\mathcal{H}$ في النقطة N الموجودة على الخطّ العمودي على المحور في النقطة L، ولكنّ N لا تقع على القطع المعلوم Γ. وهذا ما يقود ابن الهيثم إلى تحرير غير مألوف نوعاً ما، لأنّ هذا التحرير قد يعطي الانطباع بأنّ النصّ يُشبه نصّ تركيب. ليس من المفيد أن نقارن بين هذا النصّ ونصّ عمل المسبّع المتساوي الأضلاع، حيث نلاحظ نوعاً من الغموض بين التحليل والتركيب[١٨].

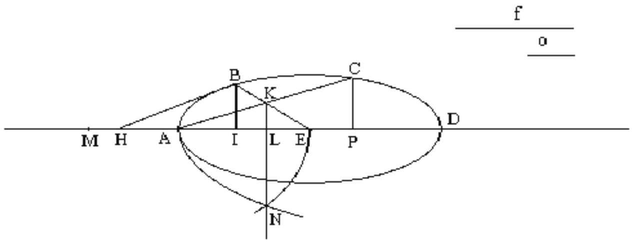
١٧ – التركيب: نحدّد النقطة M، مثلما فعلنا في التحليل، بالمعادلة $\frac{ME}{MA}=\frac{DA}{a}$. ليكن o طولَ خطّ بحيث يكون $\frac{MA}{o}=\frac{f^2}{EA^2}\frac{EM}{EA}$؛ وليكن $\mathcal{H}$ القطعَ الزائد ذا المحور المستعرض (السهم المُجانِب، كما يقول ابن الهيثم) AM والضلع القائم o ؛ وليكن $\mathcal{P}$ القطعَ الناقص ذا السهم EA والضلع القائم EA. يتلاقى القطعان المخروطيّان $\mathcal{P}$ وَ $\mathcal{H}$ في النقطة N (انظر المناقشة ص. ١٤٥).

لتكن L وَ P النقطتين المحدّدتين بـ $NL \perp AD$ وَ $LP = AL$. توجَد النقطتان L وَ P داخل القطع الناقص أو الزائد Γ. ولتكن C نقطة على Γ بحيث تكون النقطة P مسقطَها على المحور. يتقاطع الخطّان AC وَ NL على النقطة K، والخطّ EK يقطع Γ على النقطة B. وخطّ التماسّ في B يقطع المحور على النقطة H؛ لنبيّن أنّ $HB = f$.



الشكل ١٧–١

[١٨] انظر ص. ٤٨٨.



الشكل ١٧-٢

ليكن BI مع $AD \perp BI$ ، فيكون معنا $EL.EA = EI^2$ (انظر التحليل).

ويكون من جهة أخرى $N \ni \mathcal{P}$، فيكون $EL.EA = LN^2$ ، ويكون معنا إذاً $EI \perp LN$. ولكنّ

$N \ni \mathcal{H}$، فيكون معنا إذاً: $\frac{LM.LA}{EI^2} = \frac{f^2}{EA^2}.\frac{ME}{EA} = \frac{MA}{o} = \frac{LM.LA}{LN^2}$ ؛ ولكننا نعلم أنّ:

$\frac{LM.LA}{AK^2} = \frac{ME}{EA}$ ، فيكون معنا: $\frac{AK.EH}{BI.EH} = \frac{f}{EA}$ ، ويكون: $BH.EA = AK.EH$ ، ومن جهة

أخرى $EI.EH = EA^2$ ، فيكون معنا: $\frac{f}{EA} = \frac{BH}{EA}$ ، فنحصل على $f \perp BH$.

مناقشة وجود N

إذا كان Γ قطعاً ناقصاً، تكون النقطة E التي هي رأس $\mathcal{P}$، داخل $\mathcal{H}$ (فرع القطع الزائد المعنيّ بالأمر)؛ ويكون للقطعين $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$ المحور نفسُه وتقعُّران متضادّان؛ وهما يتقاطعان على نقطتين متناظرتين بالنسبة إلى المحور AD.

وإذا كان Γ قطعاً زائداً، يكون وسط MA، الذي هو النقطة H، داخل $\mathcal{P}$؛ فيقطع $\mathcal{P}$ إذاً خطّاً $\mathcal{H}$ المقارَبين، فيقطع بالتالي $\mathcal{H}$.

ملاحظتان

١) يتعلّق الأمر باستخدام تقنية النيوسِس، كما حصل في المسألة السابقة الخاصّة بالقطع المكافئ، ولكنّ هذا الاستخدام يخصّ هذه المرة القطوع المخروطية التي لها مركز.

٢) لِنَصُغ المسألة بواسطة المعادلات. تكتَب معادلة Γ على الشكل التالي:

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = x^2 + k.y^2$$ ،

حيث يكون d قطر Γ، ويكون $0 < k$ إذا كان Γ قطعاً ناقصاً، ويكون $0 > k$ إذا كان Γ قطعاً زائداً. ويكون معنا دائماً $0 < k(k-1)$، لأنّ k ليست بين 0 وَ 1.

يُساوي ظلُّ زاوية الانحدار، لخطّ التماسّ على Γ في النقطة B ذات الإحداثيتين (x, y)، $\frac{-x}{k.y}$، فنحصل على معادلة خطّ التماسّ: $\frac{-x}{k.y}(X-x)=Y-y$. يكون معنا إذاً:

$$BH^2 = y^2 + \frac{k.y^4}{x^2} = \frac{y^2}{x^2}\left(x^2+k^2.y^2\right) = \frac{y^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - k.y^2}\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 - k.y^2 + k^2.y^2\right).$$

وهكذا تكون معنا المعادلة: $f^2.\left(1-\frac{4k.y^2}{d^2}\right) = y^2.\left[1+k(k-1).\frac{4y^2}{d^2}\right]$،

التي تُصبح، إذا وضعنا $\eta = \frac{2y^2}{d}$، $f^2 = k(k-1).\eta^2 + \left(\frac{d}{2}+\frac{2k.f^2}{d}\right)\eta$.

وهكذا نبدأ، للحصول على حلّ المسألة، بتطبيق المساحة $\frac{f^2}{k(k-1)}$، التي نُنقِص منها المربَّع η^2، على طول الخطّ $\frac{1}{k(k-1)}\left(\frac{d}{2}+\frac{2k.f^2}{d}\right)$. ثمَّ نجد y كضلع المربَّع المعادل للمساحة $\frac{d}{2}.\eta$.

وهكذا نرى أنَّ المسألة، هنا أيضاً، هي مسألة مستوية. ولكنَّنا لا يمكن أن نكتشف ذلك بواسطة تحليل هندسيّ محض، لأنَّ الأمر يتعلّق بمعادلة مزدوجة التربيع. لقد استخدم ابن الهيثم على كل حال، هنا أيضاً، تقاطعاً بين قطعين مخروطيين، ولم يستخدم رسماً مستوياً.

-١٨- ليكن معنا قطع مخروطيّ Γ ذو رأس A ولتكن D وَ E نقطتين على محوره. المطلوب هو إيجاد نقطة B على Γ بحيث يكون $\frac{i}{k}=\frac{BD}{BE}$ (حيث تكون النسبة $\frac{i}{k}$ معلومة)[١٩].

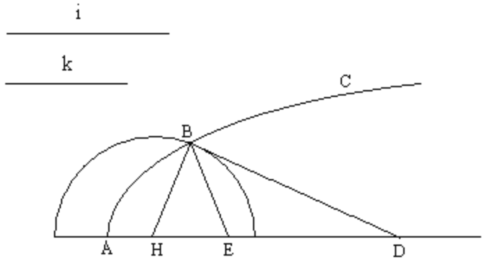
التحليل: إذا وُجدت نقطة B تحقِّق شروط المسألة، تكون هذه النقطة في آن واحد على Γ وعلى الدائرة التي هي مجموع النقاط التي تكون نسبة مسافاتها إلى D وَ E مساوية للنسبة $\frac{i}{k}$؛ ويقسم طرفا قطرِ هذه الدائرة، الموجودِ على الخطّ DE، الخطَّ DE توافقياً.

يُحدِّد ابن الهيثم مركز الدائرة H ونصف قطرها بالطريقة التالية:

---

[١٩] لا يوضِّح ابن الهيثم نوع القطع المخروطيّ Γ. التحليل صالح للقطع الناقص والزائد والمكافئ، ولكنَّ ابن الهيثم لا يُشير إلا إلى رأس واحد. أما في التركيب، فإنّه من الواضح أنَّ ابن الهيثم منذ بدء المناقشة لا يتناول القطع الناقص الذي تكون مناقشته مختلفة جداً (انظر الحاشية التالية).

ليكن H بحيث تتحقــق المعادلة $\widehat{HBD} = \widehat{HEB}$. ونستخلص بفضل التشابه بين المثلّثين EBH وَ HDB: $\frac{DH}{HB} = \frac{BH}{HE} = \frac{BD}{BE}$، فيكون $\frac{HD}{HE} = \frac{i^2}{k^2}$؛ وتكون النقطة H معلومة ويكون الطولان HD وَ HE معلومين. ويكون، من جهة أخرى، $HD.HE = HB^2$، فيكون الطول HB معلوماً وتكون B على دائرة مركزها H ونصف قطرها المعلوم $HB = r$ ؛ والنقطة B، إذا وُجدت، تكون نقطة تقاطع الدائرة (H, r) مع Γ.



الشكل ١٨-١

إذا كان $\frac{i}{k} = 1$، يكون معنا $EB = BD$؛ وإذا وجِدت النقطة B، تكون على المُنصِّف العمودي Δ للخطّ ED، تكون B نقطة تقاطع Γ مع Δ.

ولا يتناول ابن الهيثم الفرضية $\frac{i}{k} = 1$ إلا خلال المناقشة.

ملاحظة:

إذا كان $\frac{i}{k} \neq 1$، تكون النقطة H خارج القطعة DE.

إذا كان $i > k$، تكون H أبعد من E ويكون $BD > BE$ (تُسمّى BD القطعة الأولى).

إذا كان $i < k$، تكون H أبعد من D ويكون $BD < BE$.

يتبنّى ابن الهيثم الفرضية $i > k$، وهذا ما يجعل النقطة H خارج القطعة DE من جهة E (وهذا ما يؤكّده النصّ وما تؤكّده الأشكال في المخطوطة[٢٠]).

---

[٢٠] إذا افترضنا أنّ $i \neq k$، لتبيّن أنّه يمكن أن نقصر الدراسة على الحالة $\frac{i}{k} > 1$، أي على الحالة $i > k$، بدون أن نقلل من عمومية المسألة.

ليكن معنا العدد $\lambda > 1$، وليكن معنا موضع معلوم لكلّ من النقطتين D وَ E على عزم محور Γ؛ ولنأخذ الشكل ١٨-٢ المُرافق بالنسبة $\frac{BD}{BE} = \lambda$ والشكل ١٨-٣ المرافق بالنسبة $\frac{BD}{BE} = \frac{1}{\lambda} < 1$.

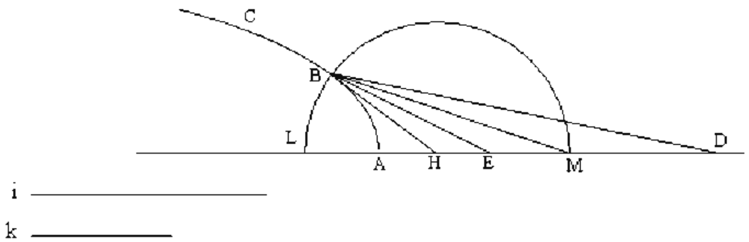
يُمكن إذاً، إذا افترضنا أنّ $\lambda = \frac{i}{k} > 1$، أن نحصل على كلّ حالات الشكل التي يجب تفحّصها خلال مناقشة المسألة.

ولنلاحظ أنّ ابن الهيثم يفترض منذ بداية هذه المناقشة أنّ $i > k$ وأنّه، في أغلب الحالات وبعد أن يدرس الشكل الذي توجد فيه النقط D وَ E في ترتيب معيّن، يتفحّص الشكل الحاصل من تبديل النقطتين D وَ E. (انظر الملاحظة ٣-٢ ص. ١٥١، والملاحظة ص. ١٥٣).

١٩- **التركيب:** نتناول من جديد Γ والنقطتين D وَ E. لتكن H النقطة المحدَّدة بالمعادلة $\frac{i^2}{k^2}=\frac{HD}{DE}$، ولتكن HM المسافة المحدَّدة بالمعادلة $HD.HE = HM^2$. لنبيِّن أنَّ $\frac{i}{k}=\frac{DB}{DE}$، إذا كانت الدائرة (H, HM) تقطع Γ على النقطة B (انظر المناقشة).

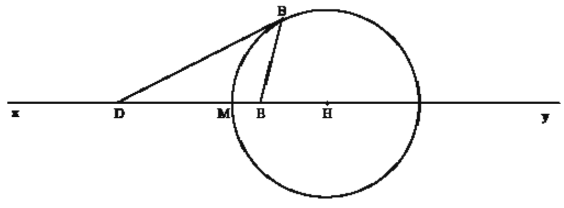
يكون معنا $HB = HM$، فيكون إذاً $HD.HE = HB^2$، فنحصل على $\frac{HB}{HE}=\frac{HD}{HB}$؛ والمثلثان DBH وَ HBE اللذان لهما الزاوية المشتركة $\widehat{H}$ متشابهان. يكون معنا إذاً:

$$\frac{DB^2}{BE^2}=\frac{HD^2}{HB^2}=\frac{HD}{DE}=\frac{i^2}{k^2}$$ ، فنحصل على $\frac{i}{k}=\frac{DB}{DE}$.

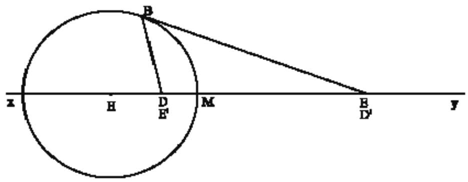


الشكل ١٩-١

ملاحظة: نستخرج من المعادلتين $\frac{i^2}{k^2}=\frac{HD}{DE}$ وَ $HD.HE = HM^2$: $\frac{i^2}{k^2}=\frac{HD^2}{HE.HD}=\frac{HD^2}{HM^2}$،



الشكل ١٨-٢



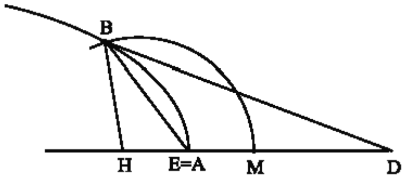
الشكل ١٨-٣

نحصل على الشكل ١٨-٣ من الشكل ١٨-٢ بواسطة تناظر ما؛ فإذا استبدلنا، في الشكل ١٨-٣، (D,E) بـ (D',E')، نحصل على الشكل الخاصّ بالحالة $1 < \lambda = \frac{BD}{BE}$.

فيكون: $\frac{HD}{HM} = \frac{HM}{HE} = \frac{i}{k}$.

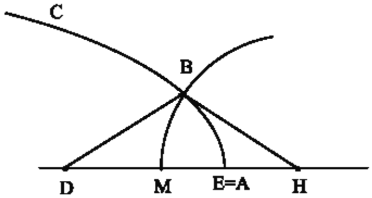
المناقشة: لنفرض أنّ $k < i$ $(BE < HB)$.

١) إذا كانت E في A (رأس Γ) وكانت D خارج Γ، تكون H داخل Γ وتكون M، التي هي بين E وَ D ، خارج Γ (انظر الشكل ١٩-٢)؛ والدائرة (H, HM) تقطع Γ[٢١].



الشكل ١٩-٢

٢) إذا كانت E في A (رأس Γ) وكانت D داخل Γ، تكون H خارج Γ وتكون M داخل Γ (انظر الشكل ١٩-٣)؛ والدائرة (H, HM) تقطع Γ.



الشكل ١٩-٣

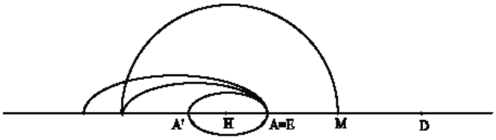
[٢١] إنّه من الواضح أنّ ابن الهيثم يفترض هنا أنّ Γ قطع مكافئ أو قطع زائد، أي أنّ Γ قطع مخروطي ذو فرع غير منتهٍ، كما يفترض أنّ الدائرة (H, HM) تقطع $M\Gamma$ بالضرورة.

ولكن إذا كان Γ قطعاً ناقصاً ذا محور AA' ، يكون لدينا ثلاث إمكانيات:

١) Γ داخل الدائرة (H, HM)

٢) Γ مماسّ للدائرة (H, HM)

٣) Γ يقطع الدائرة (H, HM)

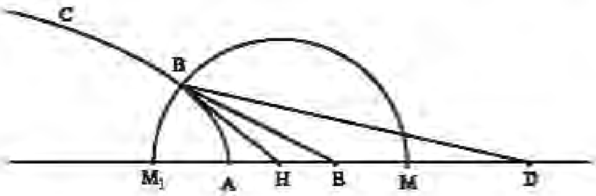


وقد تتطلب المناقشة شروطاً إضافية تأخذ بعين الاعتبار موضع A' الرأس الثاني للقطع الناقص.

ونحن نجد ثانية صعوبات من نوع مماثل خلال المناقشة في الحالات ٣، ٤ وَ ٥.

٣-١) إذا كانت E وَ D خارج Γ، يُمكن أن تكون النقطة H، المحدّدة بالمعادلة $\frac{DB}{DE}=\frac{i}{k}$،

داخل Γ أو على Γ أو خارج Γ؛ وتكون M دائماً بين E وَ D.



الشكل ١٩-٤

إذا كانت H داخل Γ أو في النقطة A على Γ، تقطع الدائرة (H, HM) القطعَ Γ.

إذا كانت H خارج Γ وبين النقطتين A وَ E (انظر الشكل ١٩-٤)، تقطع الدائرة (H, HM) القطعَ Γ إذا، وفقط إذا، تحققت المتباينة $HA < HM$.

ولكنْ $HA < HM \Leftrightarrow \frac{DH}{HA} < \frac{DH}{HM} \Leftrightarrow \frac{DH}{HA} < \frac{i}{k}$.

الشرط $\frac{ED}{EA} \leq \frac{i}{k}$ الذي أعطاه ابن الهيثم هو شرط كافٍ لأنّ $\frac{DH}{HA} < \frac{ED}{EA}$، ولكنّه ليس ضروريا.

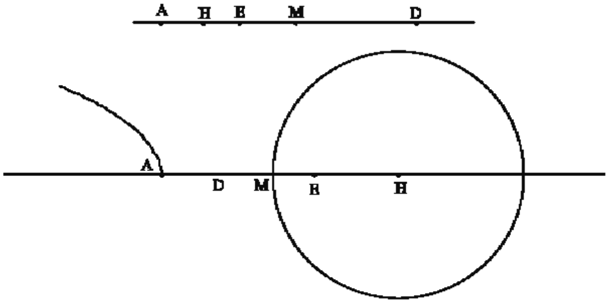
وإذا كان $HM = HM_1$ مع $M_1 \in (H, HM)$، يُصبح شرط التقاطع:

$HA < HM_1 \Leftrightarrow EA < EM_1$؛ ولكنْ $\frac{M_1D}{M_1E} = \frac{i}{k}$، فيكون: $\frac{DE}{M_1E} = \frac{i-k}{k}$ وَ $M_1E = \frac{k\,DE}{i-k}$.

يكون معنا إذاً: $EA < EM_1 \Leftrightarrow \frac{k\,DE}{i-k} > EA \Leftrightarrow \frac{DE}{EA} > \frac{i-k}{k} \Leftrightarrow \frac{DA}{EA} > \frac{i}{k}$،

وهذا هو الشرط الضروري والكافي لوجود حلّ عندما تكون النقطتان D وَ E خارج Γ، مع تتابع النقاط وفقا للترتيب A، E وَ D.

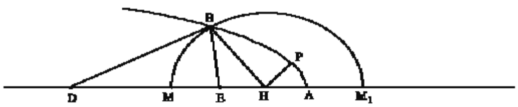
٣-٢) تبدأ الفقرة التالية في نص ابن الهيثم كما يلي: "فإن كان مقدم النسبة يلي نقطة هـ وهو الأعظم،..."[٢٢]؛ واضح إذاً أنّ ابن الهيثم يُبقي على الفرضية $\frac{i}{k}<1$، ولكنّه يُبادل بين دوري E وَ D في الشكل ١٩-٤، فيكون معنا الشكل ١٩-٥ مع E وَ M خارج Γ.



الشكل ١٩-٥

يكون معنا إذاً: $HM < HA$ ، فلا تقطع الدائرة (H, HM) القطع Γ.

٤) إذا كانت E وَ D داخل Γ، مع تتابع النقاط وفق الترتيب A، E وَ D، يُمكن أن تكون النقطة H خارج Γ أو في A على Γ أو داخل Γ بين A وَ E.



الشكل ١٩-٦

إذا كانت النقطة H خارج Γ أو في A، فإنّ الدائرة (H, HM) تقطع Γ.

إذا كانت النقطة H بين A وَ E، وإذا كانت P النقطة على Γ بحيث تكون HP الحدَّ الأدنى لمسافات النقطة H إلى نقاط Γ، فإنّ الشرط الضروريّ والكافي لكي تكون B موجودة هو $HP \leq HM$.

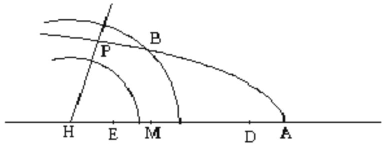
ويُمكن أن تكون المسألة بدون حلّ أو أن يكون لها حلّ أو حلان.

---

[٢٢] انظر ص. ٢٣٩.

والشرطُ $\frac{DE}{EA} \leq \frac{i}{k}$، الذي يُعطيه ابن الهيثم والذي يؤدّي إلى المتباينة $HM > HA$ ، كافٍ ولكنّه غير ضروريّ.

ولنلاحظ أنّ ابن الهيثم لا يدرس هذه المرّة الحالة التي تكون فيها النقطتان D وَ E داخل Γ مع تتابع النقاط حسب الترتيب A، D وَ E. تكون H، في هذه الحالة، أبعدَ من E (انظر الشكل ١٩-٧)، فتكون النقطتان H وَ M داخل Γ، ويكون $HM < HA$.

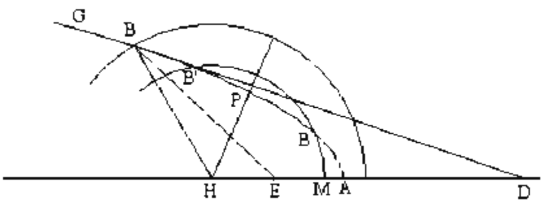


الشكل ١٩-٧

وإذا كانت HP المسافة الدنيا من نقاط Γ إلى النقطة H، فإنّ الشرط الضروريّ والكافي لكي تكون B موجودة هو $HP \leq HM$.

٥) إذا كانت P خارج القطع وكانت E في داخله مع نفس الشرط $\frac{i}{k} > 1$، تكون النقطة H عندئذ في داخل القطع.

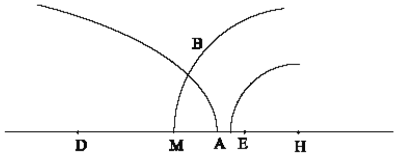
والشرط الكافي والضروريّ لكي تقطع الدائرة (H, HM) القطعَ Γ هو $HP \leq HM$ حيث تكون HP، كما في السابق، المسافة الدنيا من النقطة H إلى نقاط Γ.



الشكل ١٩-٨

إذا كانت D داخل القطع وكانت E في خارجه ، تكون النقطة H عندئذ خارج القطع؛ فيمكن أن تكون النقطة M داخل Γ أو في A على Γ أو خارج Γ.

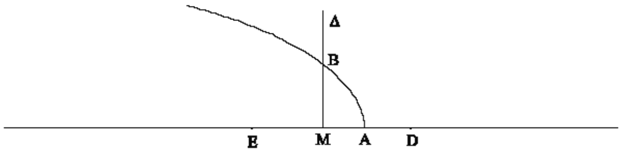
والشرط الكافي والضروريّ لكي تقطع الدائرة (H, HM) القطعَ Γ هو $HA < HM$ (انظر الشكل ١٩-٩).



الشكل ١٩-٩

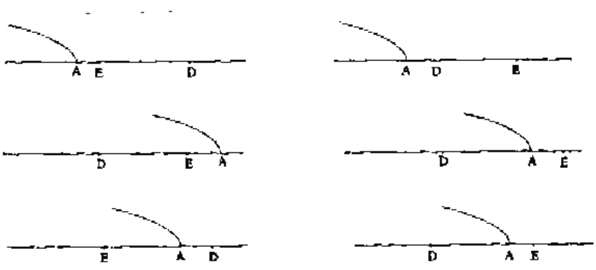
ويُصبح هذا الشرط كما هي الحال في ٣) وَ ٤)، $\frac{DA}{EA} > \frac{i}{k}$.

٦) لقد رأينا أنّ B تكون على Δ العمود المُنَصِّف للخطّ DE، عندما يكون $i = k$؛ ولكي يقطع Δ القطعَ Γ، يجب ويكفي أن تكون M، وهي وسط DE، في داخل Γ مهما كان ترتيب النقاط A، D وَ E.



الشكل ١٩-١٠

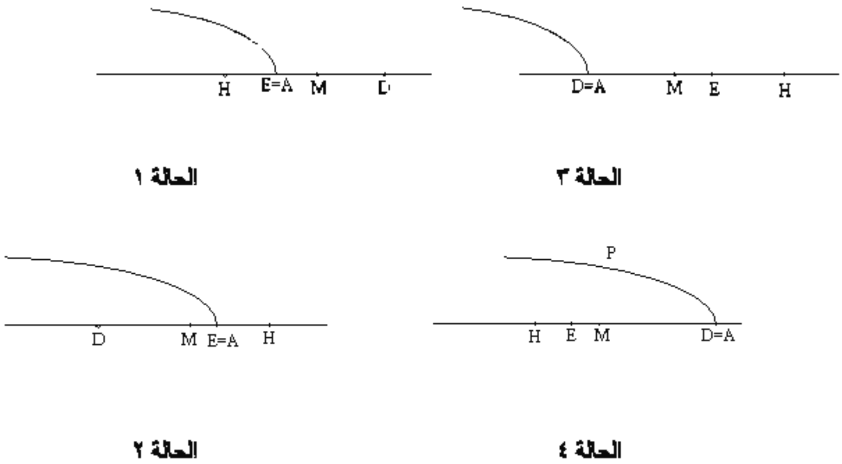
ملاحظة: لقد وجدنا، خلال هذه المناقشة، الترتيبات التالية للقطع Γ وللنقطتين D وَ E، حيث نأخذ بعين الاعتبار التبديلات بين D وَ E:



الشكل ١٩-١١

لنلاحظ أنّ ابن الهيثم لم يدرس الحالتين ٣ وَ ٤ المرفقتين بالحالتين ١ وَ ٢.

إنّه من الواضح أنّ المسألة ليس لها حلّ في الحالة ٣، لأنّ $HM > HA$.



الشكل ١٩-١٢

إذا كانت HP المسافة الدنيا من النقطة H إلى نقاط Γ، فإنّ شرط التقاطع بين Γ والدائرة (H, HM) هو $HP \leq HM$.

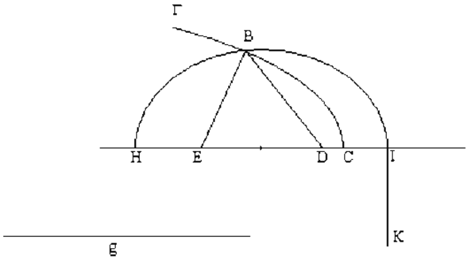
٢٠ – ليكن Γ قطعاً مخروطياً ذا رأس C، ولتكن D وَ E نقطتين على محوره، وليكن g طولاً معلوماً. المطلوب هو إيجاد نقطة B على Γ بحيث يكون $g = BD + BE$ ؛ فيكون من الضروريّ أن نفترض $g > ED$.

ملاحظة: تُحدّد المعادلة $g = BD + BE$ قطعاً ناقصاً $\mathcal{E}$ بؤرتاه D وَ E. ترجع المسألة إذاً إلى دراسة التقاطع بين Γ وَ $\mathcal{E}$.

التحليل: لتكن I وَ H نقطتين على الخطّ ED خارج القطعة ED، بحيث يكون $HE = DI = \frac{g - DE}{2}$ ؛ فيكون معنا عندئذ $HI = g$.

نحدّد IK بواسطة المعادلة: $HI . IK = 4 . HD . DI$.

يُحدَّد إذاً القطعُ الناقص ε ذو المحور HI والضلع القائم KI استناداً إلى المعطيات، وهو، وفقاً لأبلونيوس (القضية ٥٢ من المقالة الثالثة)، يمرُّ بالنقطة B.



الشكل ٢٠

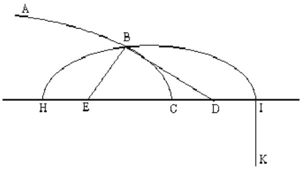
إنَّ دوريْ D وَ E، في كلّ هذه المسألة، قابلان للتبديل، لأنَّ العمود المنصِّف للقطعة DE هو محور التناظر للقطع الناقص.

٢١- **التركيب**: نرسم القطع الناقص ε كما أشرنا إلى ذلك في التحليل؛ ومحوره HI يساوي g.

لنفرض أنَّ ε وَ Γ يتقاطعان على النقطة B. يكون معنا وفقاً لأبلونيوس (القضية ٥٢ من المقالة الثالثة): $B \ni \varepsilon \Leftarrow g=BE+BD$، فيكون $g = BD + BE$. تـُحقّق النقطة B، إذاً، الشروطَ المطلوبة في المسألة.

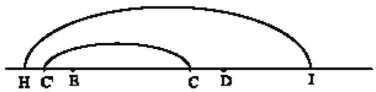
المناقشة: نفترض أنَّ $g > DE$.

١) إذا كانت إحدى النقطتين D أو E خارج Γ وكانت الأخرى داخله، أو إذا كانت إحدى هاتين النقطتين في C رأس Γ وكانت الأخرى داخل أو خارج ، يكون معنا بالضرورة $C \in [ED]$؛ فإذا كان Γ قطعاً مكافئاً أو زائداً، تكون إذاً إحدى النقطتين H وَ I داخل Γ وتكون الأخرى خارجه (انظر الشكل ٢١-١)، فيقطع Γ إذاً ε في نقطة ويكون للمسألة حلّ.



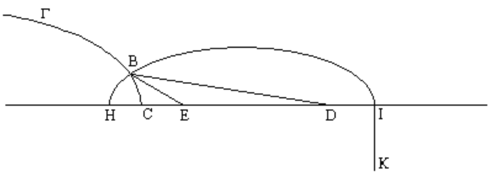
الشكل ٢١-١

ولكن، إذا كان Γ قطعاً ناقصاً، يمكن أن يكون رأسه الثاني C' بين H وَ E، فلا يمكن أن نحصل على نتيجة. وهكذا يبدو أنَّ ابن الهيثم يفترض أنَّ Γ قطع مكافئ أو زائد، كما فرض في المسألة السابقة.



الشكل ٢١-٢

٢) إذا كانت النقطتان D وَ E داخل Γ وفقاً للترتيب C، E، D ، نميِّز بين حالتين:



الشكل ٢١-٣

ا) إذا كان $EC > \frac{g-DE}{2}$، أي إذا كان $EH > EC$، تكون النقطة H عندئذ داخل Γ[٢٣] وتكون I خارجه، فيتقاطع ε مع Γ على النقطة B.

ب) إذا كان $EC < \frac{g-DE}{2}$، تكون النقطتان H وَ I عندئذ خارج Γ، فيكون ε بكامله خارج Γ، فلا يوجَد حلّ للمسألة.

لنلاحظ أنّه إذا كان $EC = \frac{g-DE}{2}$، تكون النقطة H في C؛ والنقطة C تُحقّق شروط المسألة لأنَّ $g = HI = CD + CE$.

٣) إذا كانت النقطتان D وَ E داخل Γ وفقاً للترتيب C، D، E، نميِّز بين ثلاث حالات:

---

[٢٣] يكون هذا الاستدلال صالحاً، إذا كان Γ قطعاً مكافئاً أو زائداً.

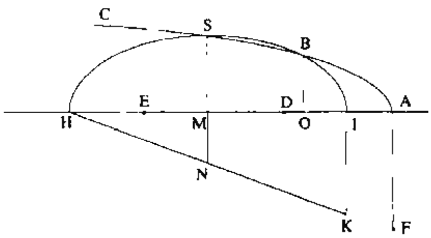
ا) إذا كان $\frac{g-DE}{2} > CD$، أي إذا كان $DI > DC$، تكون النقطة I عندئذ خارج Γ وتكون H داخله[٢٤]، فيتقاطع ε مع Γ.

ب) إذا كان $\frac{g-DE}{2} = DC$، يكون $C = I$، وتكون C حلاً للمسألة.

جـ) إذا كان $\frac{g-DE}{2} < CD$، تكون النقطة I عندئذ داخل Γ وتتطلب المسألة مناقشة أعظم من المناقشة الحالية؛ وهذا ما تتمُّ دراسته في القضية ٢٢ حيث يكون Γ قطعاً مكافئاً، وفي القضية ٢٣ حيث يكون Γ قطعاً زائداً.

٢٢- إذا كانت النقطتان D وَ E داخل Γ وإذا كان $\frac{g-DE}{2} < AD$[٢٥]، يكون H وَ I، رأسا القطع الناقص ε داخل Γ.

لنفرض أنَّ Γ قطع مكافئ:



الشكل ٢٢-١

لتكن النقطة M مركز القطع الناقص ε، وليكن IK ضلعه القائم؛ ولتكن النقطة A رأس القطع المكافئ؛ وليكن FA ضلعه القائم. والشرط الذي أعطاه ابن الهيثم لكي يتقاطع ε وَ Γ هو: $\frac{HI}{KI} \leq \frac{HM^2}{MA.AF}$.

١) ليكن $\frac{HI}{KI} = \frac{HM^2}{MA.AF}$. (انظر الشكل ٢٢-١).

---

[٢٤] انظر الحاشية السابقة.

[٢٥] استُبدِل الحرف C في القضية ٢٢ بالحرف A.

ليكن MN بحيث يكون $MN \perp HI$، مع $N \in HK$، فيكون معنا بالتتابع:

$$\frac{HM^2}{MA.AF} = \frac{HI}{KI} = \frac{HM}{MN} = \frac{HM.MI}{MN.MI} = \frac{HM^2}{MN.MI}$$ ،

فنحصل على $MN.MI = MA.AF$.

نرفِق بالنقطة M نقطة على القطع المكافئ بحيث تكون y إحداثيتها الثانية ونرفق بالنقطة M نقطة على القطع الناقص بحيث تكون Y إحداثيتها الثانية؛ فيكون معنا:

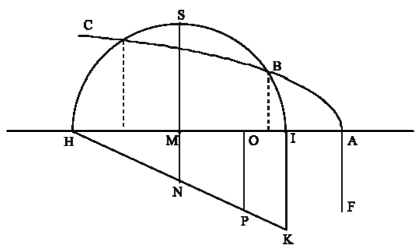
$MA.AF = y^2$ (معادلة Γ) وَ $\frac{MI.MH}{Y^2} = \frac{HI}{IK}$ (معادلة ε)،

فيكون إذاً $\frac{MH^2}{Y^2} = \frac{MH}{MN}$، فنحصل على $MI.MN = MH.MN = Y^2$؛ يكون معنا إذاً: $y = Y$، فيمرّ Γ إذاً بالنقطة S رأس القطع الناقص ε.

٢) لنفرض أنّ $\frac{HM^2}{MA.AF} < \frac{HI}{KI}$.

يكون معنا، لكلّ نقطة O على القطعة IH، $0 < HO.OI < HM^2$، فتوجَد O بين I و M بحيث يكون:

(١) $\frac{HI}{KI} = \frac{HO.OI}{MA.FA}$ (الشكل ٢٢-٢) .



الشكل ٢٢-٢

ليكن OP بحيث يكون $OP \perp IH$ وتكون P على HK، فيكون معنا:

(٢) $\frac{HO.OI}{OP.OI}=\frac{HO}{OP}=\frac{HI}{KI}$.

نستخرج من (١) وَ (٢) : $OP.OI = MA.FA$. ولكنَّ $OA.FA < MA.FA$، فيكون إذاً: $OA.FA < OP.OI$؛ وتكون O، كما في السابق، المسقط على AH لنقطة من Γ ذات الإحداثية الثانية y ولنقطة من ε ذات الإحداثية الثانية Y، ويكون معنا: $OA.FA = y^2$ وَ $OP.OI = Y^2$،

فنحصل على $y < Y$.

يكون للقطع الناقص إذاً نقطة خارج القطع المكافئ، ويكون الرأسان H وَ I داخله؛ لذلك يقطع Γ على نقطتين بحيث تسقط إحداهما على AH بين O وَ I وتسقط الأخرى بين H وَ O.

٣) يكمل ابن الهيثم بعد ذلك الفقرة الأولى مُبَيِّناً أنـّه عندما يقطع Γ القطعَ ε على الرأس S، فإنـّه يقطعه على نقطة ثانية.

لنتناول من جديد الشكل ٢٢-١؛ ولتكن O بين M وَ I المُحدَّدة بالمعادلة $MI^2 = MA.MO$، أي أنَّ O هي المُرفق التوافقي للنقطة A بالنسبة إلى القطع ε؛ ويكون معنا: $\frac{MI^2}{MO^2}=\frac{MA}{MO}$،

فنحصل على $\frac{MA}{MO}=\frac{MA}{MA-MO}=\frac{MI^2}{MI^2-MO^2}=\frac{MI^2}{HO.OI}$.

لنرمز بِـ y_M إلى الإحداثية الثانية لنقطة القطع المكافئ Γ التي يكون مسقطُها على المحور النقطة M، ولنرمز بِـ y_O إلى الإحداثية الثانية لنقطة القطع المكافئ Γ التي يكون مسقطُها، على المحور، النقطة O؛ فيكون معنا: $\frac{MA}{MO}=\frac{{y_M}^2}{{y_O}^2}$.

لنرمز بِـ Y_M إلى الإحداثية الثانية لنقطة القطع المكافئ ε التي يكون مسقطُها على المحور النقطة M، ولنرمز بِـ Y_O إلى الإحداثية الثانية لنقطة القطع المكافئ ε التي يكون مسقطُها على المحور النقطة O؛ فيكون معنا: $\frac{{y_M}^2}{{y_O}^2}=\frac{MI^2}{OH.OI}=\frac{AM}{OM}$، فيكون: $\frac{y_M}{y_O}=\frac{Y_M}{Y_O}$؛ ولكنَّ $MS = y_M = Y_M$، فيكون إذاً: $y_O = Y_O$.

وهكذا يكون للقطع المكافئ Γ وللقطع الناقص ε نقطة مشتركة تسقط على AH في النقطة O.

ونتيجة الأمر هي أنّ القطع المكافئ Γ والقطع الناقص ε يتقاطعان على نقطتين، إذا كان $\frac{HM^2}{MA.AF} \le \frac{HI}{IK}$، فيكون للمسألة حلان.

ملاحظة: لقد أثبتت البراهين أنّ الشرط المفروض **كافٍ** لكي يتقاطع Γ وَ ε على نقطتين. وإذا تحقّق هذا الشرط، تكون إحدى هاتين النقطتين في S رأس القطع الناقص أو على القوس $\widehat{HS}$، وتكون النقطة الأخرى على القوس $\widehat{IS}$.

ويُمكن أن يتقاطع Γ وَ ε على نقطتين من القوس $\widehat{IS}$ أو أن يكون Γ مماساً للقطع ε، وهذا ما لا يظهر في المناقشة.

وهكذا يكون الشرط المفروض غير **ضروري**.

دراسة التقاطع بين Γ وَ ε

ليكن Γ قطعاً مكافئاً ذا الرأس A والضلع القائم AF، ولتكن D وَ E نقطتان على محوره. المطلوب هو إيجاد نقطة على Γ بحيث يكون $g = BD + BE$.

لنضع $c = AF$ وَ $l = DE$. ولتكن M وسط DE، ولتكن I وَ H نقطتين على المحور بحيث يكون $\frac{g}{2} = MH = MI$.

يفترض ابن الهيثم، في القضية ٢٢ أنّ النقطتين D وَ E داخل Γ وأنّ $DI < AD \Leftrightarrow \frac{g-DE}{2} < AD < AE$.

تكون معنا النقاط إذاً وفقاً للترتيب A، I، D، M، E وَ H. يكون معنا $g = BD + BE$، فيكون إذاً $B \ni \varepsilon$، حيث يكون ε القطعَ الناقص ذا البؤرتين D وَ E وذا المحور الأعظم HI.

ليكن $c' = KI$ ضلعه القائم. يكون معنا: $g^2 - l^2 = g\,c'$، فيكون إذاً $k = \frac{g^2}{g^2 - l^2} = \frac{g}{c'} = \frac{HI}{IK}$.

لنضع $m = MA$.

نحصل من الشرط $AD > DI$ على $\frac{g}{2} < m$.

معادلة Γ: $y^2 = c.(m - x)$، معادلة ε: $x^2 + k.y^2 = \frac{g^2}{4}$، $-\frac{g}{2} \leq x \leq \frac{g}{2}$،

معادلة الإحداثيات الأولى لنقاط التقاطع $\Gamma \cap \varepsilon$: $x^2 + k.c(m - x) = \frac{g^2}{4}$،

(١) $0 = x^2 - k.c.x + k.c.m - \frac{g^2}{4} = f(x)$.

ويُكتَب الشرط $\frac{HI}{HK} \leq \frac{HM^2}{MA.AF}$ الذي أعطاه ابن الهيثم على الشكل التالي:

$$0 \geq k.c.m - \frac{g^2}{4} \Leftrightarrow \frac{g^2}{4.m.c} \geq k.$$

ويكفي هذا الشرط لكي يكون للمعادلة (١) جذران يُحقّقان: $-\frac{g}{2} < x' < 0 \leq x'' < \frac{g}{2}$، إذ إنّ هذه المعادلة تعطينا: $f(\frac{g}{2}) > 0$، $f(-\frac{g}{2}) > 0$ وَ $f(0) \leq 0$.

ولكنّ هذا الشرط غير ضروريّ. إذا كان $\Delta = k^2c^2 - k.c.x - 4(k.c.m - \frac{g^2}{4}) \geq 0$، مع $\frac{g^2}{4} < k.c.m$ ، يكون للمعادلة جذران موجبان حصراً.

ولكنّ الشرط $k.c.m - \frac{g^2}{4} \leq \frac{k^2c^2}{4}$ ضروريٌّ وكافٍ لكي يكون الجذران حقيقيَّين. ويجب أن نفرض، بالإضافة إلى ذلك، أن يكون الجذران في الفسحة: $\left[-\frac{g}{2}, \frac{g}{2}\right]$. ويكون الجذران (إذا كانا موجودين) من الجهة نفسها بالنسبة إلى $\frac{g}{2}$ أو $-\frac{g}{2}$،لأنّ $0 \leq k.c\left(m \mp \frac{g}{2}\right) = f\left(\pm\frac{g}{2}\right)$، فيكفي أن نفرض أنّ مُعدَّلهما $\frac{k.c}{2}$، الذي هو موجِبٌ، أصغر من $\frac{g}{2}$ أو مساوٍ لِـ $\frac{g}{2}$، وهذا ما

يُعادل $k \le \frac{g}{c}$. ويُكتَب الشرطان الكافيان والضروريان : $0 \le \lambda^2 - 4.m.\lambda + g^2$ وَ $g \ge \lambda$، إذا وضعنا $k\,c = \lambda$. ويكون لمتعدّد الحدود $\lambda^2 - 4.m.\lambda + g^2$ جذران موجبان $2.m \pm \sqrt{4.m^2 - g^2}$، بحيث توجد g بينهما، وذلك لأنّ $0 > 4.g.\left(\frac{g}{2} - m\right) = g^2 - 4.m.g + g^2$. والمتباينة $0 \le \lambda^2 - 4.m.\lambda + g^2$ تعني أنّ λ توجَد خارج فسحة الجذرين؛ فيكون الشرطان معادلان إذاً للمتباينة الوحيدة $\lambda \le 2.m - \sqrt{4.m^2 - g^2}$، أي للمتباينة: $\frac{HI}{IK} = k \le 2.\left(\frac{MA - \sqrt{AI.AH}}{AF}\right)$.

ملاحظة: تُكتَب معادلة الإحداثيات الأولى لنقاط التقاطع على الشكل الآخر:

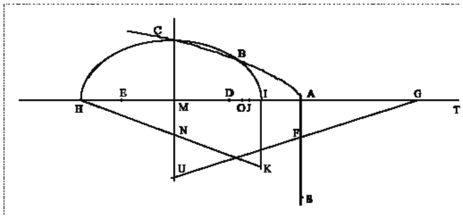
$$\frac{MH^2 - x^2}{AF.\left(\overline{MA} - x\right)} = \frac{HI}{IK}،$$

حيث ينعدم الطرف الأيسر عندما يكون $x = \pm\frac{g}{2}$ ويمرُّ بحدٍّ أقصى µ بين هاتين الإحداثيتين الأوليين. نحصل إذاً على شرط وجود حلّ للمعادلة: $\mu \le \frac{HI}{IK}$؛ ويُكتب الشرطُ الذي يُقدّمه ابن الهيثم: $\frac{HI}{IK} \ge \frac{MH^2}{AF.\overline{MA}}$، حيث نجد في الطرف الأيمن لهذه المتباينة قيمة الطرف الأيسر للمعادلة عندما يكون $x = 0$؛ وهذا ما يتضمَّن بالطبع المعادلة السابقة. إنّـه من الواضح إذاً أنّ شرط ابن الهيثم أقوى من اللازم.

ترتكز المناقشة، في الواقع، على تحديد قيمة k التي تجعل القطع الناقص ε مماسّاً للقطع المكافئ Γ. أمّا التحديد الهندسي، فهو أبعد من أن يكون فوريّاً.

٢٣- ليكن Γ فرعاً من قطع زائد. لنتبنَّ فرضيات القضية ٢٢، أي أن تكون D وَ E داخل Γ وأن يكون $AD < \frac{g - DE}{2}$. فتكون النقطتان H وَ I، رأسا القطع الناقص ε، داخل Γ.

ليكن GA محور Γ وليكن FA ضلعه القائم. يقطع الخطُّ MN ($AD \perp MN$) الخط HK على N ويقطع GF على U.



الشكل ٢٣-١

إذا كانت S النقطة المحدَّدة بالمعادلة: $\frac{SA}{AF}=\frac{HI}{IK}$، يكون معنا: $\frac{SA}{AG}=\frac{HI}{IK}.\frac{AF}{AG}$.

والشرط الذي يُعطيه ابن الهيثم لتقاطع ε مع Γ هو $\frac{SA}{SG}\geq\frac{HM^2}{MA.MG}$.

١) لنفرض أنّ $\frac{SA}{AG}=\frac{HM^2}{MA.MG}$. يكون معنا:

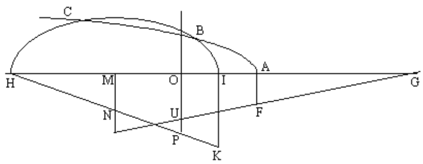
$$\frac{HM^2}{MA.MG}=\frac{HM.MI}{NM.MI}.\frac{NM.MI}{MA.MG}=\frac{HI}{IK}.\frac{NM.MI}{MA.MG}=\frac{SA}{AF}.\frac{NM.MI}{MA.MG}$$ ،

فنستخرج $\frac{MU.MA}{MA.MG}=\frac{MU}{MG}=\frac{AF}{AG}=\frac{NM.MI}{MA.MG}$، فيكون $NM.MI=MU.MA$ (الشكل ٢٣-١).

نُرفق بالنقطة M نقطة على القطع الناقص ε لها الإحداثية الثانية Y، ونقطة على القطع الزائد Γ لها الإحداثية الثانية y؛ يكون معنا على ε : $\frac{HM}{MN}=\frac{HI}{IK}=\frac{MH.MI}{Y^2}$، فنحصل على $MN.MI=Y^2$، ويكون معنا على Γ: $\frac{MG}{MU}=\frac{AG}{AF}=\frac{MA.MG}{y^2}$، فيكون $MA.MU=y^2$؛ يكون معنا إذاً: $y^2=Y^2$، فيقطع Γ القطع ε في الرأس C.

٢) لنفرض أنّ $\frac{SA}{AG}>\frac{HM^2}{MA.MG}$ (الشكل ٢٣-٢).

توجَد نقطة O بين M وَ I بحيث يكون: $\frac{SA}{AG}=\frac{HO.OI}{MA.MG}$.



الشكل ٢٣-٢

ولكنَّ $MA.MG > OA.OG$، فيكون: $\frac{HO.OI}{OA.OG} > \frac{SA}{AG}$.

ليكن OP بحيث يكون $OP // IK$، مع P على HK؛ فيكون معنا: $\frac{HO}{OP} = \frac{HI}{IK} = \frac{SA}{AF}$،

فنحصل على: $\frac{HO.OI}{OA.OG} = \frac{HO.OI}{OP.OI} \cdot \frac{OP.OI}{OA.OG} = \frac{SA}{AF} \cdot \frac{OP.OI}{OA.OG}$، فيكون $\frac{OP.OI}{OA.OG} > \frac{AF}{AG}$.

يتقاطع OP مع GF على النقطة U، ويكون معنا: $\frac{OU.OA}{OA.OG} = \frac{OU}{OG} = \frac{AF}{AG}$، فيكون بالتالي: $OP.OI > OU.OA$.

نُرفق بالنقطة O نقطة على القطع الناقص $\mathcal{E}$، يكون لها الإحداثية الثانية Y، ونقطة على القطع الزائد Γ، يكون لها الإحداثية الثانية y؛ فيكون معنا: $OI.OP = Y^2$ وَ $OU.OA = y^2$، فيكون $y^2 < Y^2$. ويقطع Γ، إذاً، الخطُّ PO داخل $\mathcal{E}$. ويكون A رأس Γ خارج $\mathcal{E}$، فيقطع Γ، بالتالي، $\mathcal{E}$ على نقطتين موجودتين على جانبَي الخطّ PO.

٣) يُكمل ابن الهيثم، بعد ذلك، الفقرة الأولى مبيِّناً أنـّه إذا قطعَ Γ القطعَ الناقص $\mathcal{E}$ على الرأس C، فإنّـه يقطع $\mathcal{E}$ في نقطة أخرى على القوس $\widehat{CI}$.

لنتناول من جديد الشكل ٢٣-١، لتكن O نقطة بين M وَ I محدَّدة بالمعادلة $\frac{MI}{MA} = \frac{MO}{MI}$، ولتكن J محدَّدة بالمعادلة $\frac{AS}{AG} = \frac{OJ}{JA}$.

يكون معنا: $\frac{OI}{IA} = \frac{MI}{MA} < \frac{IM^2}{MA.MG}$. ولكنَّ لدينا $\frac{OJ}{JA} = \frac{AS}{AG} = \frac{IM^2}{MA.MG}$، ومن جهة أخرى

$\frac{OM}{MG} = \frac{MI}{MG} \cdot \frac{OM}{MI} = \frac{MI}{MG} \cdot \frac{MI}{MA}$ ، فيكون $\frac{OM}{MG} = \frac{OJ}{JA}$.

لنضع $JA = GT$، فنحصل على:

$$\frac{OM}{MG} = \frac{OJ}{JA} = \frac{MJ}{MG + JA} = \frac{MJ}{MG + GT} = \frac{MJ}{MT} = \frac{IM^2}{MA.MG} = \frac{MJ^2}{MJ.MT}.$$



الشكل ٣-٢٣

ولكنّ $MJ.MT + JA.JG = MA.MG$ ؛ وذلك أنّ:

$$MJ.MG + JA.(MJ + JG) = (MJ + JA)MG = MA.MG$$

$$MJ.MT + JA.JG = MJ.(MG + GT) + JA.JG =$$

ومن جهة أخرى: $MI^2 - MJ^2 = (HM + MJ)(MI - MJ) = HJ.JI$ ، فيكون إذاً

$\frac{JH.JI}{JA.JG} = \frac{IM^2 - MJ^2}{MA.MG - MJ.MT} = \frac{IM^2}{MA.MG}$ ، فنحصل على $\frac{MA.MG}{JA.JG} = \frac{MH.MI}{JH.JI}$.

لنرمز بـِ Y_M وَ Y_J إلى الإحداثيتين الثانيتين لنقطتيْ القطع Γ التي يكون مسقطُهما النقطتين M وَ J على المحور المشترك بين Γ وَ ε ، ولنرمز بـِ y_M وَ y_J إلى الإحداثيتين الثانيتين لنقطتَي القطع ε التي يكون مسقطُهما على هذا المحور النقطتين M وَ J. فيكون معنا: $\frac{Y_M}{Y_J} = \frac{y_M}{y_J}$.

ولكنّ $MC = y_M = Y_M$، فيكون $y_J = Y_J$ ، ويكون بالتالي للقطع الزائد Γ وللقطع الناقص ε نقطة مشتركة يكون مسقطها النقطة J على المحور AH .

وتكون النتيجة أنّه إذا كان $\frac{HM^2}{MA.MG} \geq \frac{SA}{SG}$ يكون للقطعين Γ وَ ε نقطتان مشتركتان ويكون للمسألة حلاّن.

ملاحظة: الشرط الذي أعطاه ابن الهيثم كافٍ، ولكنّه غير ضروريّ، كما جرى في القضية ٢٢.

الدراسة التحليلية للتقاطع بين Γ وَ $\mathcal{E}$.

ليكن Γ قطعاً ناقصاً ذا محور $d = AH$ وضلعٍ قائمٍ $c = AF$؛ ولتكن الفرضيات من جهة أخرى مطابقة لفرضيات القضية ٢٢. ونفترض أيضاً أنّ $\frac{g-DE}{2} < AD$، وهذا ما يُعطي $\frac{g}{2} < m$.

لنضع $m = \overline{AM}$ وَ $d + m = \overline{GM}$ في المَعْلَم (Mx, My) فيكون معنا:

معادلة Γ: $\frac{d}{c} = \frac{(m+d+x).(m+x)}{y^2}$ ، $x \geq -m$

معادلة $\mathcal{E}$: $x^2 + k.y^2 = \frac{g^2}{4}$ ، $-\frac{g}{2} \leq x \leq \frac{g}{2}$ ،

معادلة الإحداثيات الأولى لنقاط التقاطع $\Gamma \cap \mathcal{E}$:

$$k\frac{c}{d}.\frac{(m+x).(m+d+x)}{y^2} = \frac{g^2}{4} - x^2 \text{ ،} \qquad -\frac{g}{2} \leq x \leq \frac{g}{2}$$

$$(١) \qquad f(x) = x^2\left(k\frac{c}{d}+1\right) + k\frac{c}{d}(2m+d)x + k\frac{c}{d}m(m+d) - \frac{g^2}{4} = 0.$$

ويُكتب الشرط، $\frac{HM^2}{MA.MG} \geq \frac{HI}{IK}.\frac{AF}{AG}$ الذي يُعطيه ابن الهيثم لتقاطع $\mathcal{E}$ مع Γ ، هنا، كما يلي: $\frac{kc}{d}m(m+d) \leq \frac{g^2}{4}$.

ويكفي هذا الشرط لكي يكون للمعادلة (١) جذران يُحقّقان: $-\frac{g}{2} < x' < 0 \leq x'' < \frac{g}{2}$، إذ إنّ هذه المعادلة تعطينا: $f(\frac{g}{2}) > 0$ ، $f(-\frac{g}{2}) > 0$ وَ $f(0) \leq 0$. وذلك لأنّ:

$f(\frac{g}{2}) = k\frac{c}{d}\left(m+\frac{g}{2}\right)\left(m+d+\frac{g}{2}\right)$ وَ $f(-\frac{g}{2}) = k\frac{c}{d}\left(m-\frac{g}{2}\right)\left(m+d-\frac{g}{2}\right)$ مع $m < \frac{g}{2}$.

ولكنَّ هذا الشرط غير ضروريّ.

يساوي مميِّز المعادلة (١): $\Delta = \frac{k^2c^2}{d^2}(2m+d)^2 - \frac{4.(kc+d)}{d}\left[\frac{kc}{d}.m(m+d) - \frac{g^2}{4})\right]$.

فيكون الشرط الضروريّ والكافي لكي يكون للمعادلة (١) جذران:

$$\left[\frac{kc}{d}.m(m+d) - \frac{g^2}{4})\right] \le \frac{k^2c^2.(2m+d)^2}{4d(kc+d)}\text{،}$$

وهذا ما يُكتب إذا وضعنا $\lambda = kc$: $\varphi(\lambda) = g^2 + \left(g^2 - 4m(m+d)\right).\frac{\lambda}{d} + \lambda^2 \le 0$.

يجب أن نُضيف إلى هذا الشرط شرطاً آخر لكي يكون جذرا المعادلة محصورين بين $-\frac{g}{2}$ وَ $\frac{g}{2}$. ويساوي نصف مجموع الجذرين $-\frac{\lambda(2m+d)}{2(\lambda+d)} > 0$، وهذا ما يجعل الشرط الأخير على الشكل التالي: $g \le \frac{\lambda(2m+d)}{\lambda+d}$، أي: $\lambda \ge \frac{gd}{2m+d-g} = \alpha$.

يُكتب مميِّز $\varphi(\lambda)$: $\delta = \frac{1}{d^2}(4m^2-g^2)\left[4(m+d)^2 - g^2\right] \ge 0$،

فيكون لِـ $\varphi(\lambda)$ جذران λ_0 وَ λ_1، فيعادل الشرط الأوّل أن تكون λ خارج الفسحة $[\lambda_0, \lambda_1]$.

ونجد بعد حسابٍ أنَّ: $\varphi(\alpha) = \frac{(2m+d)g(2m-d)[2(m+d)-g]}{(2m+d-g)^2} < 0$،

فتكون α بين λ_0 وَ λ_1، فيقتصر الشرطان معاً على المعادلة الوحيدة $\lambda \ge \lambda_0$، أي على:

$$\frac{HI}{IK} = k \ge \frac{2m(m+d)}{cd} - \frac{1}{2cd}\sqrt{(4m^2-g^2)[4(m+d)^2-g^2]} =$$

$$2\frac{AM.MG - 2MI^2 - \sqrt{AH.GH.AI.GI}}{AF.AG}.$$

إذا كان Γ قطعاً ناقصاً مع الفرضيات التي تجعل D وَ E داخل Γ مع $AD < \frac{g-DE}{2}$، أي $DI < AD$، تكون النقطة A، رأس Γ، خارج $\mathcal{E}$، ويكون رأسه الثاني G أبعد من E؛ ويمكن أن تكون G بين E وَ H أو على H أو أبعد من H.



الشكل ٢٣-٤

ويُمكن أن تكون مناقشة التقاطع بين Γ وَ $\mathcal{E}$ مختلفة (انظر لاحقاً).

ملاحظة: يكون معنا: $\frac{SA}{AG} = \frac{x^2 - MH^2}{(AM + x)(GM + x)}$.

والقيمة الحدّيّة التي أعطاها ابن الهيثم تخصّ، كما جرى في الحالات السابقة، الحالة التي يكون فيها للقطعين المخروطيّين نقطة مشتركة في رأس المحور الصغير للقطع $\mathcal{E}$.

دراسة القضايا ٢٠، ٢١، ٢٢، ٢٣ وَ ٢٤

لا يوضّح ابن الهيثم في نصّ القضية نوع القطع المخروطيّ Γ؛ وهذا لا يُسبّب أيّة صعوبة في التحليل (٢٠). ولكنْ من الضروريّ، في القضية ٢١ بخصوص التركيب وبداية المناقشة في الفقرات الثلاث الأولى، أن يتمّ التمييز بين القطع المكافئ والقطع الزائد من جهة، والقطع الزائد من جهة أخرى.

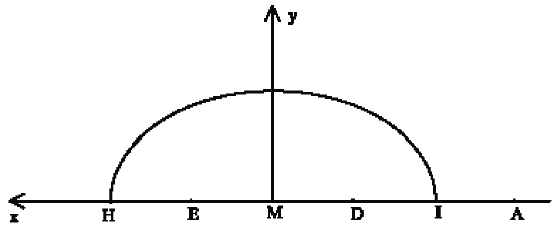
إنّ ابن الهيثم، عندما يؤكّد أنّه إذا كانت النقطة I خارج Γ يكون من الضروريّ أن تكون H داخله، يفترض أنّ للقطع فرعاً غير منتهٍ أي أنّه قطع مكافئ أو فرع قطع زائد. وهكذا لم يدرس ابن الهيثم حالة القطع الناقص.

يتابع ابن الهيثم المناقشة في القضية ٢٢ حيث يكون Γ قطعاً مكافئاً، وفي القضية ٢٣ حيث يكون Γ قطعاً زائداً، وينهي القضية ٢٣ قائلاً إنّ Γ قطع ناقص[٢٦]. ولكن إذا كان

---

[٢٦] انظر ص ٢٤٩.

Γ قطعاً ناقصاً، يجب علينا أن نــمُيِّز بين عدة حالات وفقاً لموضع G، الطرف الثاني لمحور Γ؛ ولكنَّ الشرط الذي يعطيه ابن الهيثم، $\frac{SA}{SG} \geq \frac{HM^2}{MA.MG}$، كافٍ في جميع الحالات لكي يكون للمسألة حلٌّ واحد على الأقلّ(حلٌّ أو حَلان).



الشكل ٢٣ـ٥

تقاطع القطعين الناقصين $\mathcal{E}$ وΓ وفقاً لفرضيات القضية ٢٣.

معادلة $\mathcal{E}$: $\frac{MH^2 - x^2}{y^2} = \frac{HI}{IK}$ ، مع $(\overline{MH} = \frac{g}{2})$.

معادلة Γ : $\frac{AG}{AF} = -\frac{(\overline{AM}+x)(\overline{GM}+x)}{y^2}$ ، (مع $\overline{GM} > 0$ وَ $\overline{AM} < \frac{g}{2}$).

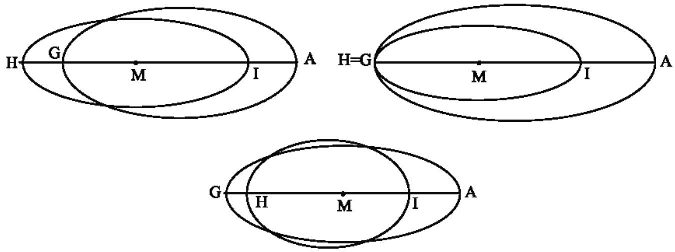
يجب أن نــمُيِّز بين ثلاث حالات وفقاً لكون H أبعد من G (خارج Γ)، أو في G أو بين M وَ G (داخل Γ). يقطع $\mathcal{E}$ ، في الحالة الأولى، القطعَ Γ بالضرورة لأنَّ رأسه الثاني I موجود داخل Γ. يكون $\mathcal{E}$ ، في الحالة الثانية، مماساً للقطع Γ في رأسهما المشترك G. يبقى علينا أن نناقش مسألة التقاطع في الحالة الثالثة حيث يكون $MH < MG$.

معادلة الإحداثيات الأولى لنقاط التقاطع هي: $\frac{SA}{AG}.(\overline{AM}+x)(\overline{GM}+x) = x^2 - HM^2$ ،

أي أنَّ $f(x) = x^2\left(\frac{SA}{AG}-1\right) + \frac{SA}{AG}\left(\overline{AM}+\overline{GM}\right)x + \frac{SA}{AG}\overline{AM}\,\overline{GM} + HM^2 = 0$.

يكون معنا: $f\left(\pm\frac{g}{2}\right) = \frac{SA}{AG}\left(\overline{AM}\pm\overline{MH}\right)\left(\overline{GM}\pm\overline{MH}\right) \leq 0$، لأنَّ $0 < \overline{MH} < \overline{AM}$ وَ

$\overline{GM} > \overline{MH}$ -؛ ويكون معنا، إضافة إلى ذلك: $f(0) = MH^2 + \frac{SA}{AG}\overline{AM}.\overline{GM}$ ، والشرط $\frac{SA}{SG} \ge \frac{HM^2}{\overline{MA}.\overline{MG}}$ الذي يُعطيه ابن الهيثم يعني أنَّ $f(0)=0$، وهذا ما يتضمَّن وجود الجذر x_1 بين 0 وَ $-\frac{g}{2}$ والجذر x_2 بين 0 وَ $\frac{g}{2}$.



الشكل ٦-٢٣

إذا كان $\frac{SA}{SG}>1$، تنعدم $f(x)$ بين $-\infty$ وَ $-\frac{g}{2}$ وبين $\frac{g}{2}$ وَ $+\infty$؛ ولكنَّ هذين الجذرين لا يتوافقان مع نقاط على القطع الناقص ε ، فلا يوجَد حلّ للمسألة. إذا كان $\frac{SA}{SG}=1$، تنعدم $f(x)$ مرَّة واحدة (f هي من الدرجة الأولى) بالضرورة خارج الفسحة $\left[-\frac{g}{2},\frac{g}{2}\right]$. لنفرض أنَّ $\frac{SA}{SG}<1$؛ يكون معنا مميِّز f:

$$\Delta = \frac{SA^2}{AG^2}\left(\overline{AM}+\overline{GM}\right)^2 - 4\left(\frac{SA}{AG}-1\right)\left(\frac{SA}{AG}\overline{AM}.\overline{GM}+HM^2\right)=$$

$$\varphi\left(\frac{SA}{AG}\right) = GA^2.\frac{SA^2}{AG^2} + 4\left(\overline{AM}.\overline{GM}-HM^2\right)\frac{SA}{AG} + 4HM^2$$

وهو عبارة من الدرجة الثانية بالنسبة إلى $\frac{SA}{SG}$، فنكتب مميِّزها:

$$\delta = 4\left[\left(\overline{AM}.\overline{GM}-HM^2\right)^2 - \frac{SA}{AG} + HM^2.GA^2\right].$$

نتحقّق من أنّ $0\le\delta$ لأنّ $AM.MG+HM^2\ge HM$، وذلك بفضل المتباينة: $AM.MG\ge HM(AM+GH)$ التي تكتَب أيضاً $AM.GH\ge HM.GH$.

وهكذا تنعدم Δ عندما تكون $\frac{SA}{SG}$ مساوية لقيمتين موجبتين α وَ β ، وتكون موجبة عندما تكون النسبة $\frac{SA}{SG}$ خارج الفسحة $[\alpha,\beta]$. وعندما تكون $\frac{SA}{SG}=1$، تصبح Δ مساوية لِـ $0\le GA^2+4\overline{AM}.\overline{GM}$، لأنّ $\overline{AM}.\overline{GM}\ge\left(\frac{GA}{2}\right)^2$؛ فنرى إذاً أنّ *1* يوجد خارج الفسحة $[\alpha,\beta]$.

ويجب أن نفرض، بالإضافة إلى ذلك، أنّ جذري المعادلة ذات المتغيِّر x محصوران بين $-\frac{g}{2}$ وَ $\frac{g}{2}$. وتساوي القيمة المطلقة لنصف مجموع هذين الجذرين: $\frac{SA\,|\overline{AM}+\overline{GM}|}{2AG\left(1-\frac{SA}{AG}\right)}$،

فيكتب هذا الشرط إذاً: $2g\left(1-\frac{SA}{AG}\right)\ge\frac{SA}{AG}|\overline{AM}+\overline{GM}|$، أي: $\frac{SA}{AG}\le\frac{g}{g+|\overline{AM}+\overline{GM}|}$.

يكون معنا:

$$\varphi\left(\frac{g}{g+|\overline{AM}+\overline{GM}|}\right)=\frac{8.HM.|\overline{AM}+\overline{GM}|}{\left(2HM+|\overline{AM}+\overline{GM}|\right)^2}\left(HM^2+|\overline{AM}+\overline{GM}|.HM+\overline{AM}.\overline{GM}\right).$$

وتبقى هذه العبارة سالبة، لأنّ العبارة الموجودة بين قوسين تُكتب كما يلي:

$$[HM-\inf(AM,GM)][HM+\sup(AM,GM)]^*،$$

وهي سالبة لأنّ MH أصغر من MA ومن GM. وهكذا تكون العبارة $\frac{g}{g+|\overline{AM}+\overline{GM}|}$ بين α وَ β. ويعادل الشرطان، إذاً، المتباينة الوحيدة:

---

* نرمز بـ $\inf(AM,GM)$ إلى أصغر العددين الموجودين بين قوسين، كما نرمز بـ $\sup(AM,GM)$ إلى أعظم العددين الموجودين بين قوسين.

$$\frac{2HM^2 - \overline{AM}\,\overline{GM} - \sqrt{AI.GI.AH.GH}}{AG^2} = \alpha \geq \frac{SA}{AG}.$$

والشرط الضروريّ والكافي لوجود حلول للمسألة يكون، في النهاية، $\alpha \geq \frac{SA}{AG}$. وعندما يكون $\alpha = \frac{SA}{AG}$، نحصل على $\Delta = 0$، ويكون القطعان الناقصان متماسّين.

٢٤ – ليكن Γ قطعاً زائداً ذا المركز H والرأس A. المطلوب هو إيجاد نقطة B على Γ بحيث يحقـِّـق القطر BP الخارج من B والضلع القائم PN المرفق به المعادلة: $EG^2 = BP.PN$، حيث تكون EG قطعة معلومة.

التحليل: ليكن AD المحورَ المُجانِبَ، وليكن AI الضلعَ القائم الخاصّ بِـ AD، يُحقّق عندئذ القطرُ الثاني Δ المرفقُ بِـ AD المعادلة: $AD.AI = \Delta^2$.

يكون معنا عندئذ: $AD.DI = AD.|AD - AI| = |AD^2 - \Delta^2|$.

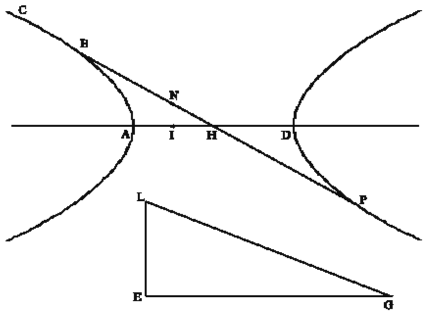
ليكن EL بحيث يكون $EG \perp EL$ مع $|AD^2 - \Delta^2| = AD.DI = EL^2$.

إذا كانت النقطة B حلاً للمسألة، يكون معنا $BP.PN = EG^2$ فتكون القطعة EG مساوية للقطر المرفق بِـ PB. يكون معنا إذاً: $BP.BN = BP.|BP - PN| = |BP^2 - EG^2|$.

ولكنّ $|AD^2 - \Delta^2| = |BP^2 - EG^2|$ (القضية ١٣ من المقالة السابعة من كتاب "المخروطات")، فيكون إذاً: $EL^2 = |BP^2 - EG^2|$.

١) إذا كان $AD > DI$، يكون عندئذ $AD > \Delta$ ويكون في هذه الحالة $BP > EG$ (القضية ٢١ من المقالة السابعة من كتاب "المخروطات")، ويكون معنا:

$EL^2 = |BP^2 - EG^2| \Leftrightarrow LG^2 = EL^2 + EG^2 = BP^2$ (الشكل ٢٤-١). يعطي العمل الهندسي الذي أشار إليه ابن الهيثم، عندئذ الطول BP.

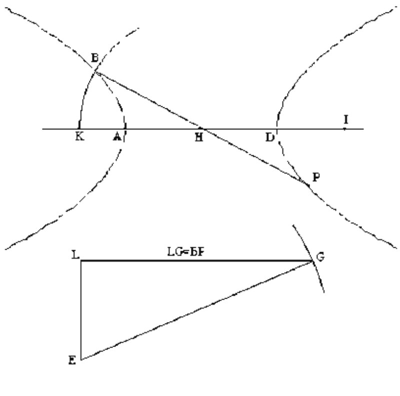


الشكل ٢٤-١

٢) إذا كان $AD < DI$ ، يكون عندئذ $\Delta < AD$ ويكون في هذه الحالة $BP < EG$ (القضية ٢٢ من المقالة السابعة من كتاب "المخروطات")، ويكون معنا:

$EL^2 = EG^2 - BP^2 \Leftrightarrow EG^2 - EL^2 = BP^2$ (الشكل ٢٤-٢).

تكون القطعة PB ضلعاً لزاوية قائمة في مثلّث قائم الزاوية بحيث يكون EG وترَه ويكون EL ضلعه الثالث؛ وهذا ما يتطلّب $EL < EG$، أي $AD.DI < EG^2$.



الشكل ٢٤-٢

وإذا كانت النقطة B موجودة، فإنّ الطول يُستخرَج إذاً في كلتا الحالتين من المعادلة $EL^2 = \left|BP^2 - EG^2\right|$.

• ٢٥- **التركيب:** يتناول ابن الهيثم من جديد العمل الهندسي مفترضاً أنَّ $AD > DI$ (الشكل ٢٤-١) ويتناول الدائرة ذات المركز H ونصف القطر $\frac{GL}{2}$؛ وإذا قطعت هذه الدائرة Γ على نقطة B تكون هذه النقطة حلاً لهذه المسألة. يكون معنا في الواقع $GL = 2BH = BP$؛ وإذا حدَّدنا PN بالمعادلة $BP.PN = EG^2$، يكون معنا $PN < PB$ لأنَّ $EG < GL$، فيكون $EL^2 = BP^2 - EG^2 = BP^2 - BP.PN = BP.BN$.

وهكذا تكون القطعة PN الضلعَ القائم المرفق بالقطر BP الذي يكون طول قطره المرافق مساوياً لطول القطعة GE.

إذا افترضنا أنَّ $AD < DI$ (الشكل ٢٤-٢) وإذا حدَّدنا PN بالمعادلة $BP.PN = EG^2$، يكون معنا $PN > PB$ لأنَّ $EG > GL$، فيكون $EL^2 = EG^2 - BP^2 = BP.PN - BP^2 = BP.BN$، فتحقِّق PB وَ PN شروط المسألة.

وجود النقطة B: لكي تقطع الدائرة $(H, \frac{GL}{2})$ القطع Γ ، يجب ويكفي أن يكون $AD < GL$.

(كلّ قطر مُجانِب لِـ Γ يكون أعظم من المحور المُجانِب).

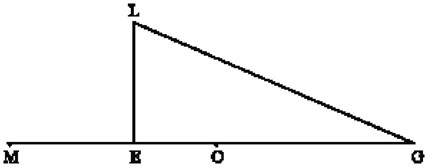
$$AD.AI < EG^2 \Leftrightarrow \Delta < EG \Leftrightarrow AD < GL،$$

هذا هو الشرط الضروري والكافي لكي يكون للمسألة حلٌّ، (يكون في الواقع $AD.DI < EG^2 \Leftarrow AD.AI < EG^2$، وهذا هو الشرط المفروض في الحالة ٢).

يتناول ابن الهيثم، هنا فقط، الفرضية $AD < AI$. فتكون المسألة قد عولجت حتّى الآن مع الفرضية $AD > AI$. لقد رأينا أنَّ البناء في الحالة الأولى لا يعطي $BP = LG$ إذا كان $AD < AI$. يعطي ابن الهيثم ، هنا، طريقة لاستخراج PB من البناء في الحالة الأولى.

لتكن O نقطة على القطعة GE محدَّدة بالمعادلة: $EG^2 - EL^2 = GE^2 - AD.DI = GO^2$، وهذا ما يفرض $AD.DI < EG^2$، أي $EL < GE$؛ فتكون القطعة GO، عندئذ، مساوية للقطعة LG في بناء الحالة الثانية.

وإذا كانت النقطة M محدَّدة بالمعادلة $GM.GO = EG^2$، يكون معنا $GO < GE < GM$؛ يكون الطول GO، عندئذ، طولَ القطر المطلوب ويكون GM الضلع القائم المرفق به، على أن يكون $AD < GO$.



الشكل ٢٥ـ١

$$AD.DI < GE^2 \Leftrightarrow AD(AD + DI) < GE^2 \Leftrightarrow AD^2 < GE^2 - AD.DI \Leftrightarrow AD < GO.$$

إذا كان $AD = AI$ يكون عندئذ $AD = \Delta$ وكلُّ قطر يكون مساوياً لضلعه القائم ولقطره المرافق (القضية ٢٣، من المقالة السابعة، الخاصّة بالقطع الزائد ذي الخطين المقارِبين المتعامدين)، فيكون للقطر المطلوب وللضلع القائم المرفق به الطولُ المشترَك GE؛ فيكون الشرطُ الضروريّ والكافي لوجود B ، عندئذ، $AD < GE$.

الحالة التي يكون فيها Γ قطعاً ناقصاً

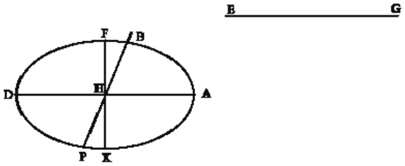
المطلوب إيجاد نقطة B على قطع ناقص Γ ذي المحور الأعظم AD والمركز H بحيث يُحقّق القطر BP الخارج من B والضلع القائم المرفق به $BP.PN = EG^2$، حيث يكون EG خطّاً معلوماً.

التحليل: ليكن AI الضلع القائم الخاصّ بـ AD، فيكون المحورُ الأصغر FK القطرَ المرافق لـ AD؛ ويكون معنا $AD.AI < FK^2$، $AI < AD$.

إذا كانت B حلاً للمسألة، يكون معنا $BP.PN = EG^2$ ويكون EG القطر المرافق لـ BP؛ ويكون معنا، وفقاً للقضية ١٢ من المقالة السابعة:

(١) $$AD^2 + FK^2 = BP^2 + EG^2.$$

ونحن نعرف الأطوال AD، FK و EG ، فيكون الطول BP معلوماً.



الشكل ٢٥_٢

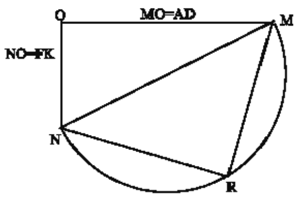
التركيب:

ا) رسم الطول BP.

لنضع على ضلعَي الزاوية القائمة $\widehat{O}$ الطولين $AD = OM$ وَ $FK = ON$، فيكون عندئذ $FK^2 + AD^2 = MN^2$. فنرسم نصف دائرة ذات قطر MN ودائرة مركزها M ونصف قطرها EG؛ فتتقاطع هذه الدائرة مع نصف الدائرة على نقطة، R، إذا وفقط إذا، كان $MN < EG$ ، أي إذا كان $FK^2 + AD^2 > EG^2$. فيكون الطول NR مساوياً للطول المطلوب BP.

ب) وجود النقطة B.

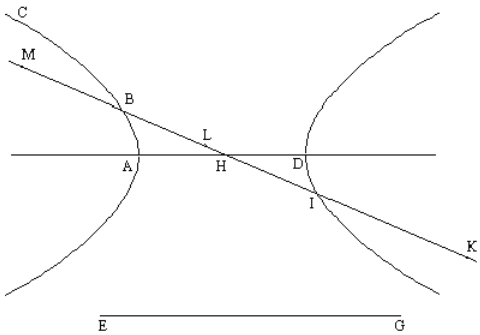
نرسم الدائرة ذات المركز H ونصف القطر $\frac{BP}{2} = \frac{RN}{2}$. وهي تقطع القطع الناقص، إذا وفقط إذا، كان $FK < BP < AD$. وهذا الشرط يعادل، وفقاً لـِ (١)، $FK < EG < AD$. والنقطة B التي نجدها تكون حلاً للمسألة، والضلع القائم المرفق بـِ PB هو PN الذي يُحقِّق $BP.PN = EG^2$.



الشكل ٢٥_٣

والخلاصة إذاً،هي أنّ الشرط ليكون للمسألة حلّ في حالة القطع الناقص، إذاً كانت الأطوال AD، IA وَ EG معلومة، هو $AD.AI < EG^2 < AD^2$.

٢٦- ليكن Γ قطعاً زائداً ذا المركز H والمحور AD، ولتكن معنا القطعة EG. المطلوب هو إيجاد قطر، بحيث إذا أضفنا إليه ضلعه القائم نحصل على خطّ مساوٍ لـِ EG.



الشكل ٢٦-١

التحليل: ليكن BI القطر الذي يُحقّق شروط المسألة، وليكن IK ضلعه القائم، يكون معنا:

$$EG = BK = BI + IK.$$

إذا كان Δ القطر المرافق لِـ AD، وكان Δ' القطر المرافق لِـ BI، يكون معنا:

$$\left|BI^2 - \Delta'^2\right| = \left|AD^2 - \Delta^2\right| \text{ وَ } BI.IK = \Delta'^2 \text{ ، } BI.\left|BI - BK\right| = \left|AD^2 - \Delta^2\right|.$$

لتكن النقطة L بحيث يكون $IK = IL$، ولتكن النقطة M بحيث يكون الجداء $KM.BM$ معلوماً وبحيث يكون الطول $EG = BK$ معلوماً. فيكون الطولان KM وَ BM معلومين ويكون معنا $\frac{KM}{2} = BI$.

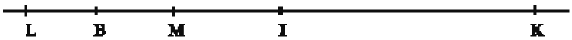
ملاحظة: ليكن c الضلع القائم الخاصّ بِـ AD:

١) $AD > c \Leftarrow AD > \Delta$ وَ $BI > IK$ ، فيكون لدينا الترتيب التالي الذي هو الترتيب نفسه على الشكل ٢٦-١.



الشكل ٢٦-٢

٢) $AD < c$ ⇐ $AD < \Delta$ وَ $BI < IK$ ، فيكون لدينا الترتيب التالي:



الشكل ٢٦-٣

ويكون معنا، في كلتا الحالتين، $2BI = KM$ ، فيكون إذاً:

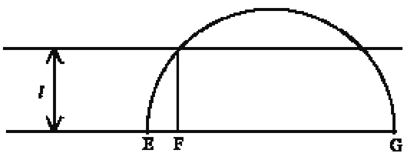
$KM.BM = 2\left|\Delta^2 - AD^2\right| = 2AD.\left|AD - c\right|$ ، وهذا جداء معلوم.

ولكنّ معنا في ١): $EG = KM - BM = BK$ وفي ٢) : $EG = KM + BM = BK$.

يكون الطولان KM وَ BM معلومين لأنّ متوسّطهما الهندسي معلومٌ ولأنّ الفرق بينهما معلوم (الحالة ١) أو مجموعهما معلوم (الحالة ٢).

إنّ رسم KM وَ BM ممكن بدون مناقشة، في الحالة ١[٢٧].

إذا وضعنا، في الحالة ٢، $KM.BM = 2\left|\Delta^2 - AD^2\right| = l^2$ يكون الشرط الضروري لإمكانية حلّ المسألة: $2l \leq EG$ ، كما يظهر على الشكل ٢٦-٤.



الشكل ٢٦-٤

والطولان EF وَ FG هما الطولان المطلوبان.

[٢٧] انظر الملاحقة ١٦ ص. ١٤٠

٢٧- التركيب: ليكن $c = AI$ الضلع القائم المرفق بالقطر AD، يكون معنا إذاً $DI = |AD - c|$.

١) $AD > AI$ ٢) $AD < AI$

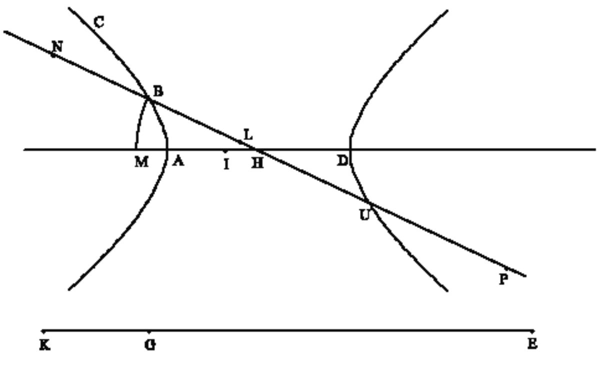


الشكل ٢٧-١

١) لنفرض أوّلاً أنّ $AD > AI$

لتكن K النقطة المحدّدة بالمعادلة $2DA.DI = KE.KG$، ولتكن M النقطة المحدّدة بالمعادلة $HM = \frac{1}{4EK}$. تقطع الدائرة $\Gamma(H, HM)$ على النقطة B ، والقطر HB يُحقّق الشروط المطلوبة في المسألة.

البرهان: لتكن U، P، N وَ L نقاط على الخط BH بحيث يكون $BH = UH$، $EG = BP$ وَ $KG = BL = BN$ (النقاط L، U وَ P توجَد على نصف الخطّ HB).



الشكل ٢٧-٢

يكون معنا عندئذ $BU = 2HM = \frac{EK}{2}$، $EK = EG + GK = PN$، فيكون $BU = PU + BL = PU + BN$، فنحصل على $BU - BL = PU$ وَ $LU = PU$.

فيكون معنا $BU.BL = \frac{EK.KG}{2} = DA.DI$، فإذاً $BU.BL = BU^2 - \Delta'^2$، إذا كان Δ' القطر المرافق لِـ BU، ويكون $\Delta'^2 = BU.LU = BU.UP$. فيكون UP، إذاً، الضلعَ القائم المرفق بالقطر BU، ويكون $UP + BU = EG$.

المناقشة: إنّـه من الضروريّ أن يكون $AD + AI < UP + BU$ (هذه هي خاصّة أقطارِ القطع الزائد وأضلاعِها القائمة[٢٨]) أي أن يكون:

$$AD + AI < EG. \qquad (١)$$

هل يكون هذا الشرط كافياً؟ تكون النقطة B موجودة إذا وفقط إذا كان $HM > HA$، وهذا ما يعادل $2AD < EK$، حيث تكون النقطة K محدَّدة بالمعادلة $2DA.DI = KE.KG$ مع $KG < KE$.

وإذا تبنَّينا الفرضية $AD > IA$، فإنَّ الشرط (١) يمكن أن يُكتب في الواقع: $2AD - DI < EG$،

فيكون معنا إذاً: $2AD - DI < EK - KG$ وَ $2AD - DI = KE.KG$، فنحصل على $2AD < KE$ وَ $DI > KG$.

يكون الشرط (١)، إذاً، كافياً لكي تكون B موجودة.

٢) لنفرض أنَّ $AD < AI$.

لتكن U' نقطة على القطعة EG بحيث يكون $2AD.DI = EU'.U'G$، مع $EU' > U'G$؛ ولتكن النقطة M بحيث يكون $HM = \frac{EU'}{4}$؛ الدائرة (H, HM) تقطع على النقطة B، والقطر HB يُشكـِّـل حلاً للمسألة.

المناقشة: هل يكون الشرط (١) $AD + AI < EG$ كافياً لكي تكون النقطتان U' وَ B موجودتين؟

---

٢٨ لا تصحُّ هذه الخاصّة إلا مع الفرضية $AI \leq 3AD$. وإذا لم نفرض هذه المتباينة، يبلغ مجموعُ القطروالضلع القائم الحدَّ الأدنى في موضعين للقطر متناظرين بالنسبة إلى AD (انظر أبلونيوس القضية ٤٠ من المقالة السابعة)؛ انظر الملاحظة في نهاية المسألة.

إذا وضعنا $l^2 = 2AD.DI$، تكون U' موجودة، إذا وفقط إذا كان $l < \frac{EG}{2}$، وهذا ما يُعادل $8AD.DI < EG^2$. ولكنَّ:

(١) $\Leftrightarrow \quad 4AD^2 + 4AD.DI + DI^2 < EG^2 \Leftrightarrow 2AD + DI < EG$

$\Leftrightarrow \quad 8AD.DI + 4AD^2 - 4AD.DI + DI^2 < EG^2 \quad \Leftrightarrow$

(٢) $8AD.DI + (2AD - DI)^2 < EG^2$.

يكون إذاً: $8AD.DI < EG^2 \Leftarrow AD + DI < EG$

وتكون النقطة U' موجودة.

يكون معنا $HB = HM = \frac{EU'}{4}$؛ وتكون النقطة B موجودة إذا وفقط إذا كان $\frac{AD}{2} < HB$، أي $2AD < EU'$.

ونحن نعلم أنَّ $EG = EU' + U'G$ وأنَّ $2AD.DI = EU'.U'G$، فنحصل على $EG^2 - 8AD.DI = (EU' - U'G)^2$؛ ويكون وفقاً لِـ (٢)، $(2AD - DI)^2 < (EU' - U'G)^2$، فيكون معنا إذاً: $EG = EU' + U'G$، $|2AD - DI| < EU' - U'G$ (لأنَّ $EU' > U'G$)، فنحصل على: $\frac{1}{2}\left[EG + |2AD - DI|\right] < EU'$، $\frac{1}{2}\left[2AD + DI + |2AD - DI|\right] < EU'$.

إذا كان $2AD > DI$ يكون معنا $2AD < EU'$. إذا كان $2AD < DI$ يكون معنا $2AD < DI < EU'$.

فيكون الشرطُ $AD + DI < EG$ كافياً لكي تكون B موجودة.

٣) لنفرض أنَّ $AD = AI$.

يكون كلُّ قطر، في هذه الحالة، مساوياً لضلعه القائم؛ ويساوي القطر المطلوب $\frac{EG}{2}$، ويكون شرط الحصول على حلّ للمسألة $2AD < EG$، أي $AD + AI < EG$.

ملاحظة: لا يكون الشرط المفروض $AD + AI \le BU + UP$ ضرورياً إلا عندما يكون $AI \le 3AD$. ويجب أن نستبدِل هذا الشرط، في حالة العكس التي تتضمَّن $AD < AI$، بالشرط التالي: $\le BU + UP$ (الحدّ الأدنى لمجموع القطر والضلع القائم)

(انظر أبلونيوس القضية ٤٠ من المقالة السابعة).

لنحسب هذا الحدَّ الأدنى بطريقة تحليلية. تُكتَب إحداثيتي نقطة B، على القطع الزائد ذي المعادلة $1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$: $x = a\,ch\,t$ وَ $y = b\,ch\,t$، حيث يكون t وسيطاً موجباً على فرع القطع الزائد المعنيّ بالأمر.

إنَّ الاتجاه المرافق للقطر BH هو اتجاه خطّ التماسّ، في B، الذي يكون وسيطاه الموجِّهان: $a\,sh\,t$ وَ $b\,ch\,t$. ويكون نصفا القطرين الخاصّين به :

$$a' = \sqrt{a^2 ch^2 t + b^2 sh^2 t} \text{ وَ } b' = \sqrt{a^2 sh^2 t + b^2 ch^2 t}.$$

والضلع القائم المرفق هو $p' = \frac{2b'^2}{a'}$؛ وهكذا يساوي المجموع $2a' + p'$:

$$2\frac{a'^2 + b'^2}{a'} = 2\sqrt{2}\frac{(a^2+b^2)ch\,2t}{\sqrt{(a^2+b^2)ch\,2t + a^2 - b^2}}.$$

لنضع $(a^2+b^2)ch\,2t = u$ مع $(a^2 + b^2 \le u)$، فيجب أن نحسب الحدَّ الأدنى للعبارة: $v = \frac{u}{\sqrt{u + a^2 - b^2}}$. يكون معنا: $v' = \frac{u + 2(a^2 - b^2)}{\left(u + a^2 - b^2\right)^{3/2}}$؛ وهذه المشتقّة موجبة عندما يكون $u \ge 2(b^2 - a^2)$.

وهذا الشرط محقــَّق دائماً عندما يكون $b \le a$؛ وتكون v في هذه الحالة دالّة تزايدية للمتغيِّر u، فتكون إذاً تزايدية أيضاً للمتغيِّر t في الفسحة $0 \le t$، فنحصل على الحدّ الأدنى عندما ينعدم t، فتكون قيمة هذا الحدّ الأدنى : $AD + AI = 2\frac{a^2 + b^2}{a}$ $(B = A)$.

يكون معنا أيضاً $0 \le v'$ في الحالة التي يكون فيها $a \le b$، إذا كان $b \le a\sqrt{3}$؛ وذلك، لأنّ لدينا في هذه الحالة: $a^2 + b^2 \ge 2(b^2 - a^2)$ هي القيمة الأوّلية لـِ u. وهكذا تتزايد v بداية من قيمتها الدنيا $AD + AI = 2\frac{a^2+b^2}{a}$. والشرط الذي يعطيه ابن الهيثم ضروريّ وكافٍ. وإذا كان $b > a\sqrt{3}$، بعكس ذلك، يكون لـِ v حدٌّ أدنى محلّيٌّ، عندما يكون $u = 2(b^2 - a^2)$. يكون معنا عندئذ: $a'^2 = \frac{u + a^2 - b^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}$، $b'^2 = \frac{u - a^2 + b^2}{2} = 3\frac{b^2 - a^2}{2}$، أي أنّ الضلع القائم $\frac{2b'^2}{a'} = 6a'$ يساوي ثلاثة أضعاف القطر المُجانِب؛ ويكون

$$2\frac{a^2+b^2}{a} > 4\sqrt{2(b^2 - a^2)} = 2\frac{a'^2 + b'^2}{a'} = 2a' + p'،$$

لأنّ $0 < (b^2 - 3a^2)^2 = (a^2 + b^2)^2 - 8a^2(a^2 - b^2)^2$.

ويكون الحدُّ الأدنى إذاً $2\sqrt{2AD(AI - AD)} = 4\sqrt{2(b^2 - a^2)}$، ويكون شرط إمكانية وجود الحلّ $8AD.AI = 8AD(AI - AD) \le EG^2$؛ وكان ابن الهيثم ، في هذا النوع من المسائل، يبحث عن تحديد دقيق للحلّ.

إنّ a'، نصف قطر الدائرة المساعِدة، أعظمُ من $HA = a$، لأنّ المتباينة $a^2 < \frac{b^2 - a^2}{2}$ تعادل $3a^2 < b^2$.

يمكن أن نلخِّص المناقشة السابقة بالطريقة التالية:

١) إذا كان $AI \le AD$، تكون النقطة K موجودة ويكون وجود B مشروطاً بالمعادلة $AD + AI \le EG$ (وهذا الشرط ضروريّ وكافٍ).

٢) إذا كان $AI > AD$، يكون وجود النقطة U'، التي تحلُّ محلَّ النقطة K، مشروطاً بالمعادلة $8AD.DI \le EG^2$ (وهذا الشرط ضروريّ وكافٍ).

يكون وجود النقطة B مؤمَّناً بهذا الشرط في الحالة التي يكون فيها $3AD \leq AI$، ولكن إذا كان $3AD > AI$، يجب إبداله بالشرط الأقوى $AD + AI \leq EG$.

وهكذا يكون الشرط الضروريّ والكافي ليكون للمسألة حلٌّ: $AD + AI \leq EG$، إذا كان $3AD > AI$؛ ويصبح هذا الشرط $8AD.DI \leq EG^2$، عندما يكون $3AD \leq AI$.

ويكون الشرطان متعادلان عندما يكون $3AD = AI$.

يجب تحديد الحدّ الأدنى لمجموع القطر والضلع القائم المرفق به، ليُمكنَ إتمام هذه المناقشة، وهذا ما لم يقم به أبلونيوس في الحالة $3AD \leq AI$؛ وهو يكتفي فقط، في هذه الحالة، بالإشارة إلى وجود هذا الحدّ الأدنى عندما لا يكون هذا الأخيرُ مساوياً لـِ $AD + AI$. وهكذا نفهم لماذا لم يواصل ابن الهيثم المناقشة ولماذا ترك دراسة هذه الحالة بالضبط.

ونحن نرى ، هنا أيضاً، ابن الهيثم يترك المناقشة الكاملة عندما يشعر بأنّ القيام بالتحديد المضبوط بعيد المنال. وربّما كان ابن الهيثم، بعد أن فطن إلى عدم قدرته على حلّ المسألة في الحالة التي يكون فيها $3AD \leq AI$، قد أهمل الإشارة إلى هذه الحالة، كما أهمل ما تقوله عنها القضية ٤٠ من المقالة السابعة من كتاب "المخروطات".

٢٧-ا – يتعلّق الأمر بنفس المسألة حيث يكون Γ قطعاً ناقصاً. يعطي ابن الهيثم فقط إشارة إلى الطريقة التي يجب اتباعها.

ليكن Γ قطعاً ناقصاً ذا محور أعظم AD ومركز H، وليكن EG طولاً معلوماً. المطلوب هو إيجاد قطر BU بحيث يكون UP الضلع القائم المرفق بـِ BU مع $EG = BU+UP$.

ليكن AI الضلعَ القائم المرفق بـِ AD ($AI < AD$)، فيكون معنا:

(١) $BU^2 + BU.UP = AD^2 + AD.AI$،

فنحصل على:

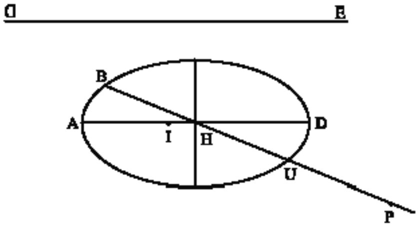
(٢) $BU.EG = AD(AD + AI)$؛

فيكون BU معلوماً لأن الأطوال EG، AD وَ AI معلومة.

ولكي يكون الطول BU حلاً للمسألة، يجب ويكفي أن يكون $\Delta < BU < AD$، حيث يكون Δ المحور الأقصر للقطع الناقص $(AD.AI = \Delta^2)$.

ويكون معنا، وفقاً لـ (٢) $AD > BU$، إذا وفقط إذا كان $AD + AI < EG$.

$$BU.EG > \Delta.EG \Leftrightarrow \Delta < BU \Leftrightarrow AD(AD+AI) > \Delta.EG \Leftrightarrow \frac{AD}{\Delta}(AD+AI) > EG.$$



الشكل ٢٧-٣

$$\frac{AD}{\Delta} = \sqrt{\frac{AD}{AI}} > 1 \text{، } \Delta < BU \Leftrightarrow \sqrt{\frac{AD}{AI}}(AD+AI) > EG.$$

يكون للمسألة حلٌ إذا وفقط إذا كان: $\sqrt{\frac{AD}{AI}}(AD+AI) > EG > AD + AI$.

يعطي ابن الهيثم الشرط $EG > AD + AI$.

٢٧– ب – ليكن معنا قطع ناقص ذو محور مُجانِب AD ومركز؛ المطلوب هو إيجاد قطر BE والضلع القائم BF المرفق به بحيث يكون $k = \frac{BF}{BE}$.

ليكن AI الضلع القائم المرفق بـِ AD وليكن $\frac{AI}{AD} = k_0$.

وإذا كان BE حلاً للمسألة، نحن نعلم أنّ: $\left|AD^2 - AD.AI\right| = \left|BE^2 - BE.BF\right|$، أو

$$BE.\left|BE - BF\right| = AD\left|AD - AI\right|.$$

لنضع النقطة F على نصف المستقيم $[BE)$ ولنضع النقطة I على نصف المستقيم $[AD)$، فيكون معنا:

$$AD.DI = BE.EF. \qquad (١)$$

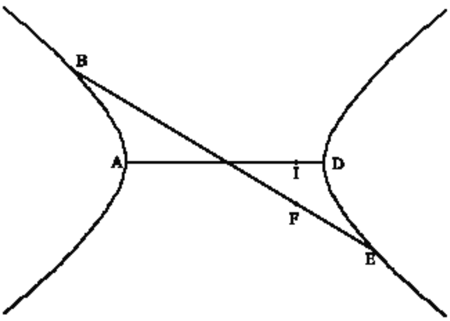
إذا كان $AD > AI$ ، يكون من الضروريّ أن نفرض $1 > k > k_0$ (وفقاً للقضية ٢١ من المقالة السابعة)؛ يكون معنا إذاً: $BF < BE$ وَ $k = \frac{BF}{BE} \Leftarrow \frac{BE-BF}{BE} = 1-k = \frac{EF}{BE}$، ويكون معنا كذلك: $\frac{DI}{AD} = 1-k_0$. ويكون: $(١) \Leftarrow AD^2(1-k_0) = BE^2(1-k)$.

الطول BE معلومٌ لأنّ AD، k وَ k_0 معلومة. والفرضية $1 > k > k_0$ تعطي $1-k < 1-k_0$ فيكون بالتالي $BE > AD$ ، فيكون BE حلاً للمسألة.

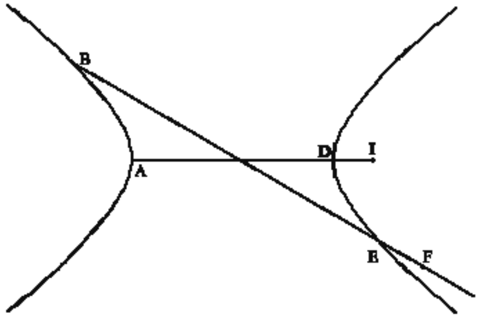
إذا كان $AD < AI$، يكون من الضروريّ أن نفرض $1 > k > k_0$ (وفقاً للقضية ٢٢ من المقالة السابعة)؛ يكون معنا إذاً: $BF > BE$ ، $\frac{BF-BE}{BE} = \frac{EF}{BE} = k-1$ وَ $\frac{DI}{DA} = k_0 - 1$؛

ويكون: $(١) \Leftarrow AD^2(k_0-1) = BE^2(k-1)$، فيكون الطول BE معلوماً. ونحصل من الفرضيّة $1 > k > k_0$ على: $k-1 < k_0-1$ ، وبالتالي على $BE > AD$.

ولكي يكون حلُّ المسألة ممكناً، يجب ويكفي أن تكون النسبة k محصورة بين 1 وَ k_0.
[$1 > k > k_0$ أو $1 > k > k_0$].



الشكل ٢٧ـ٤



الشكل ٢٧ـ٥

إذا كان $AD = AI$ (حالة القطع الزائد ذي الخطّين المقاربَين المتعامدين ، وهي الحالة التي لم يناقشها ابن الهيثم)، يكون معنا: $I = k_0$، فيجب أن تكون النسبة k مساوية أيضاً لـِ I. وتكون، في هذه الحالة، كلّ نقاط القطع الزائد مناسبة[٢٩].

٢٧– جـ – نتناول نفس المسألة عندما يكون Γ قطعاً ناقصاً ذا محور AD وذا ضلع قائم AI، مع $k_0 = \dfrac{AI}{AD}$، وَ $I > k_0$.

إذا كان BE القطر الذي يُحقـِّق الشروط المطلوبة، يكون معنا: $k = \dfrac{BF}{BE}$، وَ $BE\,(BE + BF) = AD\,(AD + AI)$؛

ولكنّ $k = \dfrac{BF}{BE} \Leftarrow k + 1 = \dfrac{BE + BF}{BE} \Leftarrow (k+1)BE = BE + BF$، وكذلك $(k_0 + 1)AD = AD + AI$، فنحصل على:

$$BE^2(k+1) = AD^2(k_0+1), \qquad (١)$$

فيكون الطول BE معلوماً. يكون BE حلاً للمسألة إذا وفقط إذا:

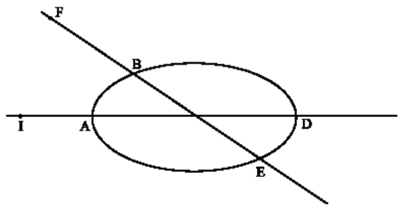
$$k_0 AD^2 < BE^2 < AD^2. \qquad (٢)$$

[٢٩] ليس هنالك إلّا ما يجب باللزوم. وهذا قد يكون السبب الذي جعل ابن الهيثم يعتبر دراسة هذه القضية غير ضرورية.

تعطي المعادلة (١): $BE^2 = \frac{AD^2(k_0+1)}{1+k}$، فيكون: (٢) $\Leftrightarrow 1 < \frac{k_0+1}{1+k} < 1 \Leftrightarrow k_0 < 1 \Leftrightarrow k.k_0$ وَ

$k_0 < k \Leftrightarrow k_0 < k < \frac{1}{k_0}$.

وهكذا يكون شرط وجود حلّ للمسألة: $k_0 < k < \frac{1}{k_0}$. ولقد أشار ابن الهيثم، في المسألتين ٢٧- ب وَ ٢٧- جـ إلى الطريقة التي يجب اتّباعها، ولكنّه لم يدرس شروط إمكانية وجود الحلّ؛ وهذه الشروط هي من جهة أخرى بديهية.

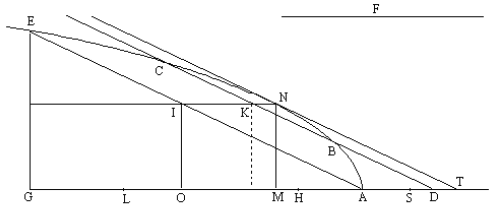


الشكل ٢٧-٦

الملاحظة: نحصل على الحلول، في المسائل ذات الأرقام ٢٤،٢٥، ٢٦ وَ ٢٧، بواسطة تقاطع القطع المخروطيّ المعلوم مع دائرة لها نفس المركز، بحيث يُرسم نصف قطرها بواسطة المسطرة والبركار.

ولا يدخل إذاً أيّ قطع مخروطيّ مساعد في هذه المسائل.

٢٨- أخرِجْ من نقطة معلومة D، موجودة على محور قطع مكافئ Γ، خطاً يقطع Γ على النقطتين B وَ C، بحيث يكون $f = CB$ طولاً معلوماً.



الشكل ٢٨

التحليل: إذا كان الخطّ DBC حلاً للمسألة، يكون عندئذ $f = BC$.

إذا كان AE موازياً لـ BC، فإنّ الخطّ، الموازي للخطّ AD والخارج من وسط القطعة AE، يقطع القطعة BC على وسطها K ويقطع Γ على النقطة N . وخطّ التماسّ في N على Γ موازٍ للخطّ AE، وهو يقطع المحور على النقطة T، فيكون معنا $AD < AT$. إذا كان MN وَ IO بحيث يكون $AE \perp MN$ وَ $IO \perp AD$، تكون النقطة A في وسط TM، ويكون معنا $MO = NI = AT = MA$ وَ $2AM = OA$. ويكون معنا من جهة أخرى $AD = KI$.

ليكن H بحيث يكون $KI = AD = AH$، فيكون عندئذ $KN = DT = MH$.

وإذا كان AS الضلع القائم الخاصّ بالمحور، يكون معنا $SA.AG = EG^2$، فنحصل على $SG.GA = EA^2 = EG^2 + GA^2$. ولكنّ $4NI = 4AM = 2OA = GA$، فنحصل على $EI^2 = LA^2 = SG.NI$.

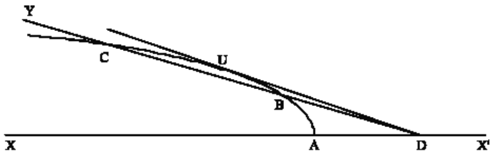
القطعة SG هي الضلع القائم الخاصّ بالقطر NI وَ K هي وسط BC، فيكون إذاً: $DK^2 - BK^2 = DC.DB$؛ ولكنّ $DK = LA$، فيكون $SG.NI = BK^2 + DC.DB$؛ ولكن، من جهة أخرى، $B \in \Gamma$، فيكون إذاً $SG.NK = BK^2$، فنحصل على $SG.IK = DC.DB$ وَ $SG.AH = DC.DB$.

يكون معنا أيضاً $SG.MH = BK^2$ لأنّ $NK = MH$. إذا وضعنا $4.AH = AL$، يكون عندئذ $4.HM = LG$ (لأنّ $4.AM = GA$) وَ $f^2 = BC^2 = 4BK^2 = SG.GL$، وهو مربّع معلوم. لنلاحظ أنّ $AL < AG$ لأنّ $AM = AT > AD = AH$.

الطولان AS وَ AD معلومان؛ فتكون القطع AL، AH وَ SL معلومة، وكذلك تكون القطعة SG، وبالتالي تكون النقطة G معلومة.

وتسمح النقطة G بتحديد النقطة E على Γ وبتحديد النقطة I، وسط AE، ثمّ النقطة K (لأنّ $IK \parallel AD$ وَ $IK = AD$) ؛ ونصل بين K وَ D، فنحصل على B وَ C، لأنّ $\frac{f}{2} = KC = BK$.

٢٩- يكون للمسألة المطروحة حلّ مهما كان موضع النقطة D على القطع المكافئ Γ وخارجه، ومهما كان الطول المعلوم f.



الشكل ٢٩-١

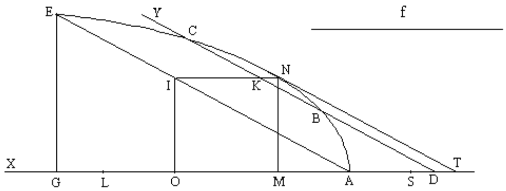
يُمكن أن نـــُخرِج، في الواقع، من كلٍّ نقطة D موجودة على AX'، خطّاً مماسّاً DU للقطع Γ، وتكون الزاوية $\widehat{UDX}$ حادّة. وكلٌّ خطٍّ داخل الزاوية $\widehat{UDX}$ يقطع القطع المكافئ على نقطتين B وَ C، ويتزايد الطول YD من 0 إلى $+\infty$ عندما تتزايد الزاوية $\widehat{UDY}$ من 0 إلى $\widehat{UDX}$؛ فتوجَد إذاً قيمة وحيدة للزاوية $\widehat{UDY}$ تجعل CB مساوية لـِ f، فيوجَد إذاً خطّ YD يُحقــِّق شروط الحلّ للمسألة.

لنبيِّن أن الرسم الذي نستخرجه من هذا التحليل يؤدّي فعلاً إلى هذا الخطّ YD.

لتكن L نقطة على المحور بحيث يكون $4.AD = LA$، ولتكن G النقطة التي تكون أبعد من L بحيث يكون $f^2 = SG.GL$، ولتكن E النقطة على Γ التي تسقط على النقطة G، ولتكن I وسط AE. لنبيِّن أنّ DY الخط الموازي للخطّ AE هو الخطّ المطلوب، أيْ أنّ:

ا) الخطّ DY يقطع القطعَ Γ على نقطتين B وَ C وَ   ب) $f = BC$.

ا) DY يقطعَ Γ



الشكل ٢٩-٢

والخطُّ الموازي للخطّ AG، والمارّ بالنقطة I وسط AE، يقطع Γ على N، وخطُّ التماسّ TN موازٍ للخطّ AE.

يقطع الخطُّ DY القطعَ Γ، إذا وفقط إذا، كان $AT > AD$. وهذا الشرط محقَّق لأنّ $AL < AG$ وَ $4.AD = AL$ وَ $4.AT = AG$.

لتكن B وَ C نقطتي التقاطع بين DY وَ Γ.

ب) $f = BC$.

يكون معنا، كما كان في التحليل، $SG.GA = EA^2$، فنحصل على $SG.NI = AI^2$ (لأنّ $NI = \frac{GA}{4}$)؛ والقطعة SG هي الضلع القائم الخاصّ بالقطر NI الذي يقطع BC في وسطها K.

يكون معنا: $SG.KN = BK^2$، $\frac{LG}{4} = AT - AD = DT = KN$، فنحصل على:

$\frac{1}{4}SG.GL = BK^2$، فيكون بالتالي: $f^2 = SG.GL = BC^2$ ويكون إذاً: $f = BC$.

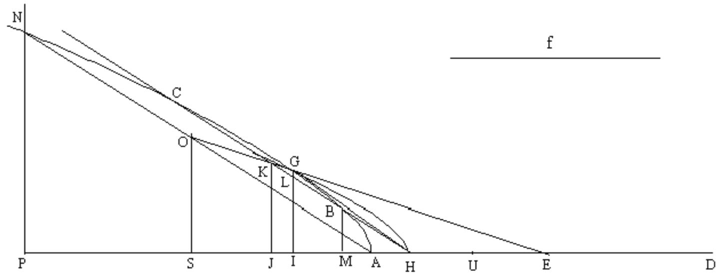
لنلاحظ أنّ هذه المسألة، التي تمثّل حالة خالصة للرسم بالآلة (νευσις)، محلولة هنا حصراً بواسطة الهندسة المستوية.

٣٠- المعطيات هي: قطع زائد Γ ذو محور AD ومركز E، نقطة H بين A وَ E، وطول f.

أخرِجْ من النقطة H خطّاً يقطع Γ على نقطتين B وَ C بحيث يكون $f = BC$.

لنرمز بـِ a إلى الضلع القائم الخاصّ بالقطعة AD، ولنضع $k = \frac{EA}{EH}$.

التحليل: ليكن الخطّ HBC حلاً للمسألة. الخطّ AN الموازي للخطّ BC يقطع Γ على النقطة N. إذا كانت النقطتان K وَ O وسطَي القطعتين BC وَ AN، تكون النقاط E، K وَ O متسامتة. ونخرج الخطوط NP، OP، KJ وَ BM العمودية على المحور AD.



الشكل ٣٠

يكون معنا: $\frac{OS}{KJ}=\frac{SA}{JH}=\frac{OA}{KH}=\frac{EA}{EH}=k$، وهي نسبة معلومة. ويكون $k=\frac{SE}{JE}=\frac{EA}{EH}=\frac{SA}{JH}$.

فنستنتج من ذلك: $\frac{JE.JH}{KJ^2}=\frac{ES.SA}{OS^2} \Leftarrow \frac{ES.SA}{JE.JH}=\frac{OS^2}{KJ^2}=k^2$،

ولكنّ $2SA=PA$ وَ $2AE=DA$، فيكون $2ES=DP$، ويكون أيضاً $2OS=NP$.

يكون معنا إذاً: $\frac{AD}{a}=\frac{DP.PA}{PN^2}=\frac{JE.JH}{KJ^2}$ (لأنّ $\Gamma \ni N$).

لنخرج خطّ التماسّ HG على Γ وليكن IG عمودياً على AD؛ فتقطع IG الخطّ BC على النقطة L (إذا مددنا IG على استقامة، يمرّ هذا الخطّ بنقطة التماسّ G' لخطّ التماسّ الثاني الخارج من H)؛ والقسمة (C, B, L, H) توافقية فيكون: $\frac{CL}{LB}=\frac{CH}{HB}$ (القضية ٣٧ من المقالة الثالثة من كتاب "المخروطات").

لنفرض أنّ $LB < CL$ وأنّ L بين B وَ K. يكون معنا $\frac{AD}{a}=\frac{EI.IH}{IG^2}$، وفقاً لخاصّة خطّ التماس (القضية ٣٧ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات").

إذا كان a' طول القطعة المحدَّد بالمعادلة $\frac{AD}{a}=\frac{EH}{a'}$، يمرُّ عندئذ القطعُ الزائد $\mathcal{H}$، ذو المحور EH والضلع القائم a'، بالنقطتين K وَ G لأنّ: $\frac{EH}{a'}=\frac{IE.IH}{IG^2}=\frac{JE.JH}{JK^2}$.

لتكن U النقطة المحدَّدة بالمعادلة $\frac{AD}{a}=\frac{EH}{a'}=\frac{UE}{UH}$، وهي بين E وَ H، حيث يكون UH "الخط الشبيه النسبة"، فتكون $\frac{UJ.HJ}{HK^2}=\frac{UE}{EH}$ عندئذ نسبة معلومة (القضية ٢ من المقالة السابعة من كتاب "المخروطات").

ولكنَّ $\frac{CH}{HB}=\frac{CL}{LB} \Leftarrow \frac{CH+HB}{HB}=\frac{CL+LB}{LB}=\frac{CB}{LB} \Leftarrow \frac{HK}{HB}=\frac{BK}{LB}$

$\Leftarrow \frac{HK}{KB}=\frac{BK}{LB} \Leftarrow BK^2=HK.LK$.

فنحصل من هذه المعادلة، بواسطة إسقاط عموديّ على المحور AD، يكون معنا: $JM^2=JH.JI$، فيكون: $\frac{HJ}{JM}=\frac{JM}{JI}$ وَ $\frac{HJ^2}{JM^2}=\frac{HJ}{JI}$.

ولكنَّ $\frac{HJ}{JM}=\frac{HK}{KB}$، فنحصل على $\frac{HK^2}{KB^2}=\frac{HJ}{JI}=\frac{HJ.UJ}{JI.UJ} \Leftarrow \frac{JI.UJ}{KB^2}=\frac{HJ.UJ}{HK^2}=\frac{UE}{EH}$.

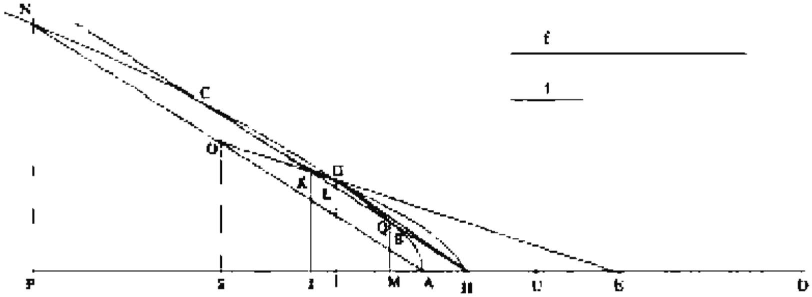
يكون لدينا: $KB^2=\frac{f^2}{4}$ وَ $\frac{UE}{EH}$ نسبة معلومة، فيكون الجداء JU . JI معلوماً، وتكون النقطتان I وَ U معلومتين، فتكون النقطة J معلومة[٣٠].

يقطع الخطّ العموديُّ في J على AD القطعَ $\mathcal{H}$ على النقطة K، ويقطع الخطُّ HK القطعَ Γ على النقطتين B وَ C.

٣١- **التركيب:** نتناول من جديد القطع Γ ذا الرأس A والمحور AD والمركز E ؛ ونـُخرج خطّ التماسّ HG. يكون معنا: $\frac{AD}{a}=\frac{EI.JH}{IG^2}$ (القضية ٣٧ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات").

نرسم القطع المخروطيّ $\mathcal{H}$ (ذا المحور EH والضلع القائم a' الذي يُحقّق $\frac{AD}{a}=\frac{EH}{a'}$)،

[٣٠] يتمّ تحديد الطولين JI وَ JU وفقاً للطريقة المشار إليها سابقاً.



الشكل ٣١-١

ونأخذ النقطة G ∋ $\mathcal{H}$، ولتكن U بحيث يكون $\frac{EH}{UH} = \frac{EH}{a'}$، فتكون U بين H و E (UH هو "الخطّ الشبيه النسبة").

لنضع $\frac{UE}{EH} = \frac{t^2}{\frac{1}{4}f^2}$ و $JU \cdot JI = t^2$، فتكون النقطة J داخل Γ وأبعد من I، ويقطع الخطّ، العموديُّ في J على AJ، القطعَ $\mathcal{H}$ على النقطة K داخل Γ. ويقطع الخطُّ HK الخطَّ GI على النقطة L، كما يقطع Γ على نقطتين موجودتين على جانبي النقطة K.

وهكذا حدّدنا بالتتابع، استناداً إلى المعطيات، النقاط G، I، H، U، J و K، فحصلنا على الخطّ HK. يجب أن نـــُبيّن أنّ HK هو الخطّ المطلوب.

يكون معنا: $\frac{UJ \cdot JH}{HK^2} = \frac{UE}{EH} = \frac{t^2}{\frac{1}{4}f^2} = \frac{UJ \cdot JH}{\frac{1}{4}f^2}$ (القضية ٢ من المقالة السابعة من كتاب "المخروطات")، فنحصل على $\frac{HJ}{JI} = \frac{HK^2}{\frac{1}{4}f^2}$.

لنحدّد النقطة M بالمعادلة $JM^2 = HJ \cdot JI$، فنحصل على: $\frac{HJ}{JI} = \frac{JM^2}{JI^2} = \frac{JH^2}{JM^2}$؛

يقطع العمودُ في M على AD الخطُّ HK على النقطة B ويكون:

$$JM^2 = HJ \cdot JI \Leftarrow KB^2 = KH \cdot KL \Leftarrow \frac{HK}{KL} = \frac{KB^2}{KL^2} = \frac{KH^2}{KB^2}.$$

ولكنَّ: $\frac{HK}{KL}=\frac{HJ}{JI}$ ، فنحصل على: $\frac{HK^2}{\frac{1}{4}f^2}=\frac{HJ^2}{JM^2}=\frac{KH^2}{KB^2}$ ، فيكون: $KB=\frac{1}{2}f$.

ونخرِج من A خطّاً موازياً للخطّ HK، فيقطع EK على النقطة O؛ لنمدّد AO على استقامة حتــّى N، بحيث يكون $AO=ON$؛ وليكن NP وَ OS عمودين على AD. يكون معنا:

$$\frac{JH}{JK}=\frac{AS}{SO} \text{ ، } \frac{SE}{JE}=\frac{SA+AE}{JH+EH}=\frac{AE}{EH}=\frac{OA}{KH}=\frac{SA}{JH}=\frac{OS}{KJ}$$

وَ
$$\frac{AD}{a}=\frac{EH}{a'}=\frac{JE.JH}{JK^2}=\frac{ES.SA}{SO^2}\Leftarrow\frac{JE}{JK}=\frac{ES}{SO} \text{ ،}$$

فيكون: $2OS=NP$ ، $2SA=AP$ وَ $2ES=PD$.

يكون معنا إذاً: $\frac{AD}{a}=\frac{PA.PD}{PN^2}=\frac{ES.SA}{SO^2}\Leftarrow N\ni\Gamma$.

النقطة O هي وسط AN، فتكون القطعة EO قطراً؛ وتكون النقطة K بالتالي وسط القطعة CQ، إذا رمزنا بِـ C وَ Q إلى نقطتي التقاطع بين HK وَ Γ، ويكون $HC>HK>HQ$.

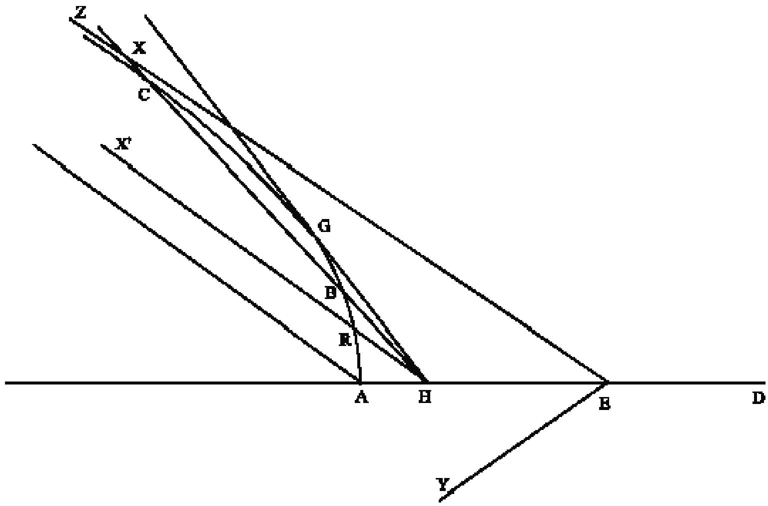
لنبيِّن أنَّ النقطتين B وَ Q متطابقتان.

تشكّل النقاط (C, Q, L, H) قسمة توافقية، فيكون إذاً $KC=KQ=KB=\frac{f}{2}$، وَ $f=BC$.

وجود الحلّ

يكون Γ، في كلّ هذه المسألة، فرعاً من قطع زائد، بل نصف فرع، لأنَّ كلّ الدراسة قد أقيمت في أحد نصفي المستوي المفصولين بالمحور.

لنبيِّن أنَّ للمسألة حلاً، مهما كان الطول المعلوم f. يُدخِل ابن الهيثم لتبيين ذلك الخطّين المقارَبين EX وَ EY. لا يقطع الخطُّ، الخارج من A والموازي للخطّ EX، القطعَ Γ إلا على



الشكل ٣١-٢

النقطة A؛ وكذلك لا يقطع الخط HX'، الموازي للخط EX، القطعَ Γ إلا على النقطة R. ليكن HG خطَّ التماسّ الخارج من H، فيقطع كلُّ نصفِ خط مستقيم HZ، خارج من H وموجودٍ داخل الزاوية $\widehat{GHX'}$، القطع الناقصَ على النقطة B بين R وَ G وعلى النقطة C التي هي أبعد من G، وذلك لأنّ نصف الخط هذا يقطع بالضرورة الخط المقارب EX.

يكون معنا: $\widehat{GHX'} > \widehat{GHZ} > 0$؛ وعندما تتزايد الزاوية $\widehat{GHZ}$ من 0 إلى $\widehat{GHX'}$ يتزايد الطول BC بشكل رتيب من 0 إلى $\infty+$، فيأخذ إذاً القيمة المعلومة f مرة واحدة فقط.

ملاحظة: إنّ التحاكي الذي يُحوّل A إلى H وَ D إلى E، يُحوّل بالطبع القطعَ الزائد المعلوم إلى القطع الزائد المساعد $\mathcal{H}$. ومركز هذا التحاكي هو النقطة X التي تتحقّق بها المعادلة $EX = \frac{1}{2k-1} EA$، وهو أبعد من النقطة A ؛ ونسبة هذا التحاكي هي $\frac{1}{2k}$.

يُحَوِّل هذا التحاكي، الذي نستشفّه ضمن طريقة ابن الهيثم، القطعَ الزائدَ المعلومَ إلى المكان الهندسي الذي ترسمه أوساطُ الأوتار الخارجة من النقطة H ونحصل، عندما تتغيّر النقطة H، على فصيلة من القطوع الزائدة المساعِدة المتحاكية مع القطع الزائد المعلوم Γ.

ونلاحظ مرّة أخرى وجود فصيلة خطّية من القطوع المخروطية (المتحاكية فيما بينها). والنقاط الأساسية لهذه الفصيلة هي : النقطة المزدوجة E والنقطتان في اللانهاية باتجاه خطّي Γ المقاربَين.

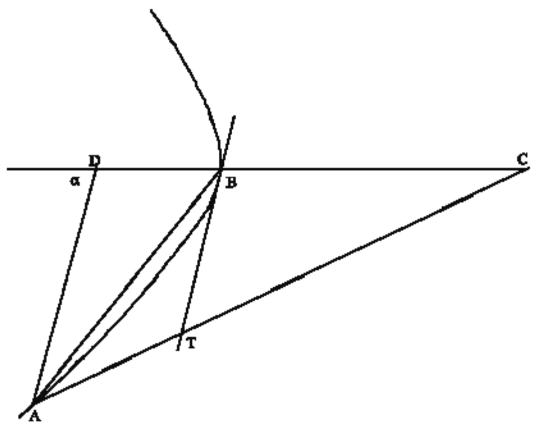
والنقطة J محدّدة بعمل لتطبيق المساحات، أي بعمل للهندسة المستوية. وإنّــه من الممكن أن نحصل على النقطة K، وهي نقطة التقاطع بين القطع الزائد $\mathcal{H}$ المحدّد بضلعه القائم وقطره المُجانِب وبالخطّ JK العموديّ على DA، بواسطة عمل للهندسة المستوية. ولا يُشير ابن الهيثم إلى ذلك، لأنّــه يهتمّ هنا بشكل خاصّ بالأعمال الهندسية بواسطة القطوع المخروطية المساعِدة.

ملحق

تثليث الزاوية

ليكن $\mathcal{H}$ قطعاً زائداً ذا قطر BC وضلع قائم مساوٍ لـِ BC وليكن TB خطّ تماسّه في الرأس B بحيث تكون الزاوية $\widehat{TBC} = \alpha$ معلومة.

لتكن A نقطة على $\mathcal{H}$ بحيث يكون $BC=BA$، فيكون $\widehat{DAB} = \frac{\alpha}{3}$.



البرهان: القطع الزائد $\mathcal{H}$ يكون ذا خطّين مقارَبين متعامدين، فيكون معنا إذاً: $DB.DC = AD^2$، فنحصل على: $\frac{DB}{DA} = \frac{DA}{DC}$.

فيكون المثلّثان DBA وَ DAC متشابهين فيكون:

$$\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = \widehat{DAB} \quad \text{وَ} \quad 2\widehat{DAB} = \widehat{DBA}\text{ ،}$$

فيكون عندئذ: $3\widehat{DAB} = \widehat{DAB} + \widehat{DBA} = \alpha$ ، $3\widehat{DAB} = \alpha$.

ليس لهذا النصّ علاقة بكتاب ابن الهيثم، ولكنّ التقليد المخطوطي جعله في نهاية هذا الكتاب؛ وهو يُقدّم لنا تطبيقاً بسيطاً، للنوع نفسه من النيوسِس، على تثليث الزاوية. نضيف هنا على القطع الزائد المتعامد المقارَبين وتراً مساوياً لقطرٍ ومارّاً برأس هذا القطر. ويكون اختيار القطر المعنيّ بالأمر بحيث تكون الزاوية، التي يجب تثليثها، زاوية الترتيب الخاصّة بهذا القطر.

نصّ كتاب ابن الهيثم

"في تمام كتاب المخروطات"

١ – ظ

إن أبلونيوس ذكر في صدر كتاب *المخروطات* أنه قسّم كتابه إلى ثماني مقالات وبيّن ما في كل واحدة من المعاني التي استنبطها، وذكر أن المقالة الثامنة إنما هي في مسائل تقع في *المخروطات*. ولم ينقل من هذا الكتاب إلى اللغة العربية إلا سبع مقالات ولم توجد المقالة الثامنة.

ولما نظّرْنا في هذا الكتاب واستقرينا معانيه وكثر تصفحنا للمقالات السبع، وجدناها قد أخلت بمعانٍ يجب ألا يخلو هذا الكتاب منها، فاعتقدنا أن المعاني التي أخلت بها المقالات السبع، هي المعاني التي في المقالة الثامنة، وإنما أخرها لأنه لم يحتج إلى استعمالها في المعاني التي ضمّنها المقالات السبع. وهذه المعاني التي أشرنا إليها هي معانٍ تقتضيها معانٍ قد تضمنتها المقالات السبع.

فمن ذلك أنه بيّن النسبة التي يقسم بها الخط المماسّ سهم القطع، وبيّن كيف نخرج خطًا يماسّ القطع ويحدث مع السهم زاوية مساوية ‹لزاوية› معلومة. وهذان المعنيان يقتضيان أن نبيّن كيف نخرج خطًا يماسّ القطع وتكون نسبته إلى ما يفصله من السهم نسبة معلومة، وأن نخرج خطًا يماسّ القطع ويكون الذي [به] يقع منه فيما بين القطع وبين السهم مثل خط معلوم. ومع ذلك فإن هذه المعاني هنّ من المعاني التي تتطلع النفوس إلى معرفتها.

2 الحسن: الحسين – 6 تقع: يقع، سنصححها ولن نشير إلى مثلها فيما بعد / العربية: الغريبة – 8 قد: مد – 9 بمعانٍ: بمعاني، ولن نشير إليها فيما بعد / يخلو: يخلوا – 11 ضمّنها: صواب محض، بمعنى أودعها (هو) / المعاني: المقالات – 12 تقتضيها: نقيضها – 13 نخرج: يخرج – 14 ‹لزاوية›: في [ح] – 15 يفصله: يفصله – 17 فإن: قام / هنّ: صواب محض لأن «المعاني» جمع تكسير لغير العاقل، فيجوز أن يعامل معاملة الإناث في رجوع الضمير إليه. ومثله قول المتنبي:
«تُباري نجومَ القذفِ في كلِّ ليلةٍ   نجومٌ له منهنّ وردٌ وأدهمُ».

ومن ذلك قوله: كيف نخرج خطًا يماسّ القطع ويحدث مع القطر الذي يخرج من موضع التماسّ زاوية حادّة مساوية لزاوية مفروضة؟ وهذا المعنى أيضًا يقتضي أن نخرج خطًا يماس القطع وينتهي إلى السهم وتكون نسبته إلى القطر [يماس] الذي يخرج من موضع التماس نسبة معلومة.

ومن ذلك أنه تكلم في صدر المقالة السابعة على أقطار القطوع وتفصيلها وتمييزها وأشار إلى أن لها خواص تعرض مع أضلاعها القائمة. ومع ذلك فإنه يقول في صدر هذه المقالة: إن المعاني التي تليها في هذه المقالة يحتاج إليها حاجة شديدة فيما يقع من المسائل مما يجري ذكره في المقالة الثامنة ‹التي› تتضمن مسائل تتعلق بالأقطار وخواصها.

ومن ذلك قوله: كيف نخرج من نقطة مفروضة خطًا يماس القطع ويقع عليه على نقطة واحدة؟ وهذا المعنى يقتضي أن نبين كيف نخرج من نقطة مفروضة خطًا يقع على القطع على نقطتين ويكون القسم منه الذي يقع من داخل القطع مثل خط مفروض، وأن نخرج خطًا يقطع القطع وتكون نسبة قسمه الخارج إلى قسمه الداخل مثل نسبة مفروضة. /

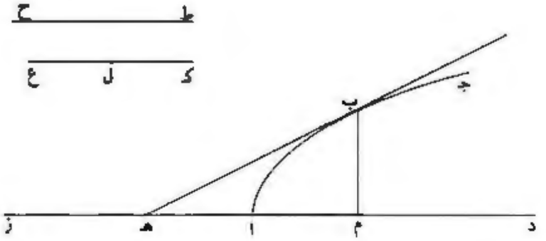
٢-و وهذه المعاني التي ذكرناها وأشرنا إليها لا يجوز أن يخلو هذا الكتاب منها، وهي معانٍ مستحسنة ليس يقصر حسنها عن حسن ما تتضمنه المقالات السبع، بل فيها ما يزيد على ما تقدم من الأشكال حسنًا ودُرّية. فالأشبه أن تكون هذه المعاني هن التي ضمنتها المقالة الثامنة، فإنما لم يذكرها قبل المقالة الثامنة لاستغنائه عن استعمالها فيما تقدمها من المقالات.

ولما [لم] تمكن هذا المعنى في اعتقادنا وقوي في نفوسنا بحسن ظننا بصاحب الكتاب، غلبنا حسن الظنّ؛ فحكمنا بأن هذه المعاني وما يشبهها هن التي تضمنتها المقالة الثامنة. ولما استقر حكمنا بذلك، شرعنا في استخراج هذه المعاني وتبيينها وجمعها في مقالة تشتمل عليها لتقوم مقام المقالة الثامنة وتكون هي التمام لكتاب *المخروطات*. ونجعل استخراجنا لهذه المعاني بالتحليل والتركيب والتحديد لتكون أكمل المقالات بيانًا.

وهذا حين نبتدئ بالمقالة ومن الله نسأل المعونة.

‹آ› إذا كان قطع صنوبريّ معلومًا، وخرج سهم القطع إلى خارج القطع، كيف نخرج خطًا يماس القطع وتكون نسبته إلى ما يفصله من السهم مما يلي القطع مثل نسبة مفروضة؟

12 قسمه (الثانية): قسمة – 14 تتضمنه: تضمنه – 15 تقدم: نقل / ودُرّية: من دُرّيّ نسبة إلى الدُرّ بصفائه ونقائه أو تشبيها بالكوكب، والمعنى مفهوم – 16 تقدمها: نقل بها – 21 والتحديد: كثيرًا ما كتبها «والتجديد»، ولن نشير إليها فيما بعد – 23 معلومًا: معلوم، وهذا جائز أيضا على تقدير أن «كان» تامة، ولكن المؤلف لم يأخذ دائمًا بهذه القاعدة.

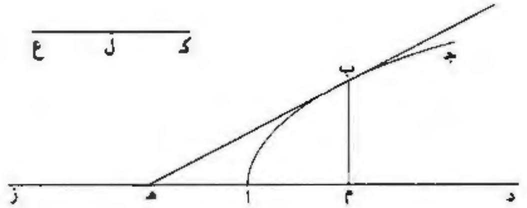


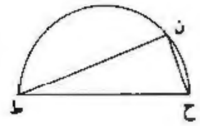
القطع أوّلاً القطع المكافئ. وليكن قطع ا ب جـ وليكن سهمه ا د، ولنخرج د ا إلى ز، ولتكن نسبة ح ط إلى كـ ل مفروضة. ونريد أن نخرج خطًا يماس القطع وينتهي إلى السهم وتكون نسبته إلى ما يفصله من السهم كنسبة ح ط إلى كـ ل. ونخرج ب م على الترتيب، فيكون م ا مثل ا هـ كما تبين في شكل له من مقالة آ. ولأن نسبة ب هـ إلى هـ م كنسبة ح ط إلى ضعف كـ ل، ونسبة ح ط إلى كـ ل معلومة، فنسبة ح ط إلى ضعف كـ ل معلومة، فنسبة ب هـ إلى هـ م معلومة. وزاوية م قائمة، فزاوية هـ معلومة، فخط ب هـ يماس القطع وهو يحيط مع السهم بزاوية معلومة؛ وذلك ممكن لما تبين في شكل نو من مقالة ب. فقد انحلت المسألة إلى أمر ممكن، وهو أن نخرج خطًا يماس القطع ويحدث مع السهم زاوية مساوية لزاوية معلومة.

وقد تبين مع ذلك أن ح ط أعظم من ضعف كـ ل، وذلك أن ب هـ أعظم من ضعف هـ ا. فينبغي أن يكون ح ط أعظم من ضعف كـ ل؛ وهذا تحديد المسألة.

– ب – فلنركب الآن هذه المسألة: وليكن القطع ا ب جـ وسهمه د ا ز والنسبة المفروضة نسبة ح ط إلى كـ ل. فنجعل ل ع مثل ل كـ، فيكون كـ ع أصغر من ح ط. ونرسم على خط ح ط نصف دائرة،/ وليكن ح ن ط. ونخرج فيها وترًا مثل كـ ع، ٢-ظ وليكن ط ن. ونخرج خطًا يماس القطع ويحدث مع السهم زاوية مساوية لزاوية ح ط ن، كما تبين من شكل نو من المقالة الثانية. وليكن المماسّ ب هـ.

1 د ا: د – 2 ز: ب – 3 ب م: ب ر – 4 له: به – 5 فنسبة: ونسبة – 6 م: هـ – 10-11 كـ ل ... ضعف (الأولى): مكررة – 14 ح ن ط: ح ر ط.

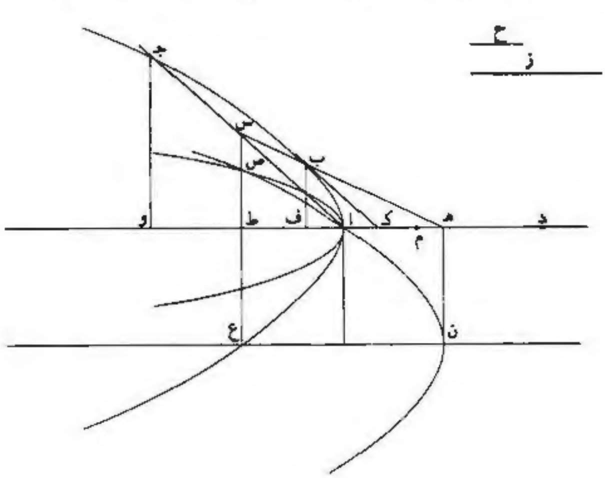




فأقول: إن نسبة ب هـ إلى هـ ا كنسبة ح ط إلى ك ل.

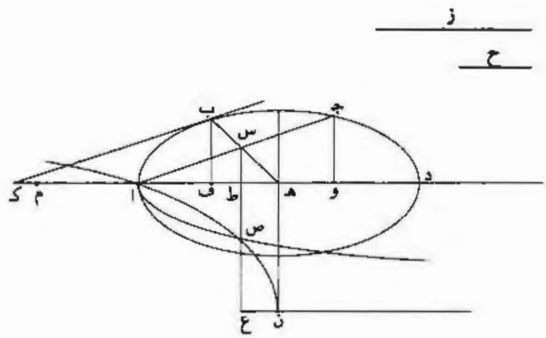
برهانه: أنا نجعل ب م على الترتيب، فتكون زاوية م قائمة، ونصل ح ن، فتكون زاوية ن قائمة؛ وزاوية هـ مثل زاوية ط، فمثلث ب هـ م شبيه بمثلث ح ط ن. فنسبة ب هـ إلى هـ م كنسبة ح ط إلى ط ن، أعني إلى ك ع، فنسبة ب هـ إلى هـ ا، الذي هو نصف هـ م، كنسبة ح ط إلى ك ل الذي هو نصف ك ع؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.

‹جـ› وليكن قطع ا ب جـ القطع الزائد أو الناقص، وسهمه و ا د، ونسبة ز إلى ح مفروضة وز أعظم من ح. ونريد أن نخرج خطًا يماس القطع وينتهي إلى السهم، وتكون نسبته إلى ما يفصله من السهم مما يلي رأس القطع كنسبة ز إلى ح.



3 زاوية ط: زاوه ط – 6 الزائد: الزائل / و ا د: و ا د ا / ز إلى: ز ا الى – 7 ح: ح و.

فنفرض ذلك على جهة التحليل وليكن ب ك. ونخرج ا جـ موازيًا للمماس، وليكن مركز القطع هـ؛ ونصل هـ ب وليقطع ا جـ على نقطة س. فيكون هـ س قطرًا للقطع لأنه خارج من المركز، ويكون ا س على الترتيب لأنه موازٍ للمماس، لما تبين في عكس شكل لب من المقالة الأولى. فخط هـ س يقسم ا جـ بنصفين على نقطة س. ونخرج خطوط جـ و س ط ب ف على الترتيب، فتكون نسبة ف هـ إلى هـ ا كنسبة ا هـ إلى هـ ك وكنسبة ف ا إلى ا ك، لما تبين في شكل لز من المقالة الأولى. ونسبة ا هـ إلى هـ ك كنسبة س ا إلى ب ك، فنسبة س ا إلى ب ك كنسبة ف ا إلى ا ك، فنسبة س ا إلى ا ف كنسبة ب ك إلى ك ا. ونسبة ب ك إلى ك ا كنسبة ز إلى ح، فنسبة س ا إلى ا ف كنسبة ز إلى ح.



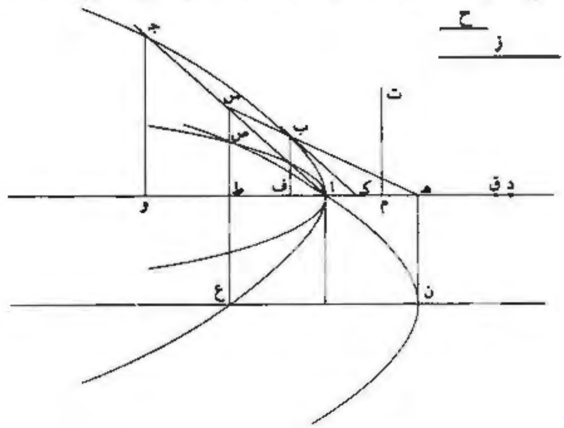
ونجعل نسبة هـ م إلى م ا كنسبة القطر المجانب إلى الضلع القائم، فيكون خط ا م نصف الشبيه النسبة، فتكون نسبة ضرب م ط في ط ا إلى مربع ا س كنسبة ‹الخط الشبيه مع ا د إلى ا د وهي كنسبة› م هـ إلى هـ ا المعلومة. ونسبة مربع ا س إلى مربع ا ف كنسبة مربع ز إلى مربع ح المعلومة، فنسبة ضرب م ط في ط ا إلى مربع ا ف معلومة. وضرب ط هـ في هـ ا مثل مربع هـ ف. ونخرج من نقطة هـ خطًا على زاوية قائمة، وليكن هـ ن؛ ونجعل هـ ن مثل هـ ا، ونخرج من نقطة ن خطًا موازيًا / ٣-و لخط هـ ط، وليكن ن ع. ونجيز على نقطة ن القطع المكافئ الذي سهمه ن ع وضلعه القائم

5 ف هـ: و هـ – 6 ونسبة: في نسبة – 7 فنسبة: ونسبة / ف ا: ب ا – 8 ا ف: ا هـ / فنسبة: ونسبة / ا ف: ا ب – 11-12 ‹الخط ... وهي كنسبة›: م دب وحـ م رب – 13 ا ف: ا ب، وعادة لا يمكن التمييز بين الفاء والباء في المخطوطة، ولن نشير إليها فيما بعد / كنسبة: فنسبة / ح ... إلى مربع: مكررة / فنسبة: ونسبة، في التكرار / م ط: ب ط، وهو صحيح في التكرار.

هـ ن، وليكن قطع ن ص. ونخرج س ط إلى ع، فيكون ص ع مثل هـ ف، ويكون ط ع مثل ا هـ لأنه مثل هـ ن، فيبقى ص ط مثل ا ف. ونسبة ضرب م ط في ط ا إلى مربع ا ف معلومة، فنسبة ضرب م ط في ط ا إلى مربع ط ص معلومة، فنقطة ص على محيط قطع زائد سهمه ا م وضلعه القائم معلوم، وليكن ذلك القطع قطع ا ص. فقطع ا ص معلوم الوضع وقطع ن ص معلوم الوضع، فنقطة ص معلومة. وص ط عمود، فنقطة ط معلومة. وخط ط س معلوم الوضع، وا س مثل س جـ، فنقطة جـ معلومة. فخط ا جـ معلوم الوضع، فنقطة س معلومة، ونقطة هـ معلومة، فقطر هـ ب س معلوم الوضع، فنقطة ب معلومة. وخط ب ك موازٍ لخط ا جـ المعلوم الوضع، فخط ب ك معلوم الوضع ونسبته إلى كـ ا كنسبة ز إلى ح المفروضة، وهو المطلوب.

‹د› وتركيب هذه المسألة يكون كما نصف.

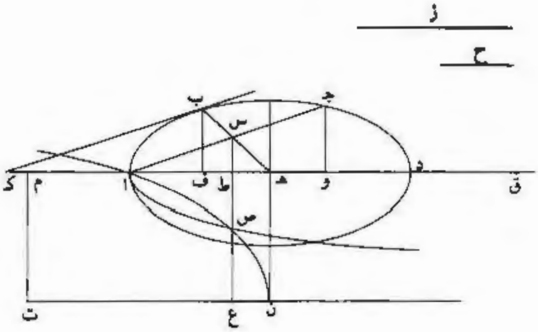
نعيد القطعين ونخرج من نقطة هـ خطًا على زاوية قائمة، وليكن هـ ن. ونجعل هـ ن مثل هـ ا، ونخرج ن ع موازيًا لسهم هـ ا، ونرسم على نقطة ن القطع المكافئ الذي سهمه ن ع وضلعه القائم ن هـ، وليكن قطع ن ص. ونجعل نسبة هـ م إلى م ا كنسبة سهم ا د إلى ضلعه القائم، فيكون خط م ا نصف الخط الشبيه. ونجعل نسبة ا هـ إلى هـ ق كنسبة مربع ز إلى مربع ح، ونجعل نسبة ا م إلى م ت كنسبة م هـ إلى هـ ق. ونرسم على نقطة ا القطع الزائد الذي سهمه ا م وضلعه القائم م ت، وليكن قطع ا ص وليقطع قطع ن ص على نقطة ص. فإما أنه يقطعه أو لا / يقطعه، فإنا نبيّنه من بعد عند تحديدنا للمسألة. ٣-ظ



3 فنسبة: ونسبة – 4 فقطع: نقطع – 5-6 فنقطة ط: فنقطتا ا ط – 9 كـ ا: كـ ل – 12 ن ع: ر ع – 13 ن ص: ر ص – 14 م ا: هـ ا / هـ ق: هـ ف – 15 م ت: الحرف الأخير مهمل، ولقد رمز المؤلف من قبل إلى الضلع القائم بـ م ت، ولهذا أخذنا بحرف التاء، مما يضطرنا فيما بعد إلى تغيير بعض الحروف.

ونخرج من نقطة ص عمود ص ط وننفذه من الجهتين، وليقطع ن ع على نقطة ع. ونجعل ط و مثل ا ط، ونخرج عمود و جـ إلى محيط القطع، ونصل ا جـ، وليقطع ص ع على نقطة س، فيكون ا س مثل س جـ. ونصل هـ س، فيكون قطرًا لقطع ا جـ، وليقطع قطع ا جـ على نقطة ب. ونخرج ب ك مماسًا للقطع.

فأقول: إن نسبة ب ك إلى ك ا كنسبة ز إلى ح.



برهانه: أنا نخرج ب ف على الترتيب. فيكون ضرب ط هـ في هـ ا مثل مربع هـ ف، وضرب ن ع في ن هـ مثل مربع ع ص؛ ون ع مثل هـ ط ون هـ مثل هـ ا، فمربع ع ص مثل مربع هـ ف، فخط ع ص مثل خط هـ ف؛ وع ط مثل هـ ا، فخط ط ص مثل خط ا ف. وتكون نسبة ضرب م ط في ط ا إلى مربع ا س كنسبة م هـ إلى هـ ا، ونسبة ضرب م ط في ط ا إلى مربع ا ف كنسبة ا م إلى م ت التي هي نسبة م هـ إلى هـ ق، ونسبة ضرب م ط في ط ا إلى مربع ا ف مؤلفة من نسبة ضرب م ط في ط ا إلى مربع ا س ومن نسبة مربع ا س إلى مربع ا ف. ونسبة ضرب م ط في ط ا إلى مربع ا س كنسبة م هـ إلى هـ ا، فنسبة مربع ا س إلى مربع ا ف كنسبة ا هـ إلى هـ ق. ونسبة ا هـ إلى هـ ق كنسبة مربع ز إلى مربع ح، فنسبة مربع ا س إلى مربع ا ف كنسبة مربع ز إلى مربع ح، فنسبة ا س إلى ا ف كنسبة ز إلى ح. ونسبة ا س إلى ا ف كنسبة ب ك إلى ك ا، فنسبة ب ك إلى ك ا كنسبة ز إلى ح؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

1 وليقطع: وليكن – 6 ب ف: فف – 9 ط ص: ع ص / وتكون: فيكون – 10 ا م: ل م – 15-14 فنسبة مربع ا س إلى مربع ... ح (الثانية): مكررة – 14 فنسبة: ونسبة، في التكرار – 15 فنسبة: ونسبة – 16 فنسبة: ونسبة.

فأما تحديد هذه المسألة، فإنه يكون كما أصف.

أما في القطع الناقص، فإن المسألة تتم على جميع الأحوال / من غير شرط. وهي ٤ و تتم في الجهة الواحدة من القطع الناقص مرة واحدة. وذلك أن القطع الزائد الذي سهمه ا م وضلعه القائم م ت، ‹فإن› نسبة سهمه إلى ضلعه القائم كنسبة م هـ إلى هـ ق التي هي نسبة ضرب م هـ في هـ ا إلى ضرب ا هـ في هـ ق ‹الذي هو› أصغر من مربع ا هـ. فهو أصغر من مربع هـ ن. فالقطع الزائد الذي [في] سهمه ا م يقطع خط هـ ن فيما بين نقطتي هـ ن. فهو يقطع محيط القطع المكافئ فيما بين نقطتي ا ن لأن القطع المكافئ يمرّ بنقطة ا: لأن العمود الذي يخرج من نقطة ا على سهم ن ع يكون مساويًا لخط هـ ن الذي هو الضلع القائم، ويفصل من السهم خطًا مساويًا لخط هـ ا الذي هو مساوٍ للضلع القائم أيضا. والقطع المكافئ يمرّ بنقطة ا. والقطع الزائد – الذي سهمه المجانب ا م ‹و›رأسه نقطة ا ومقعّره مقابل لمقعّر القطع المكافئ – فهو يقطع القطع المكافئ على نقطتين على جميع الأحوال. وإحدى النقطتين نقطة ا، فهو يقطعه على نقطة أخرى. وهذا القطع يقطع خط هـ ن، فهو يقطع محيط القطع المكافئ على نقطة فيما بين نقطتي ن ا. وليس يقطعه على نقطة أخرى غير هاتين النقطتين. فالمسألة تتم على كل حال وليس تتم إلا مرة واحدة، لأن القطعين الزائد والمكافئ ليس يتقاطعان بعد نقطة ا إلا على نقطة واحدة أخرى فقط.

‹هـ› فأما القطع الزائد، فإن المسألة ليس تتم فيه إلا بشرط وتخصيص.

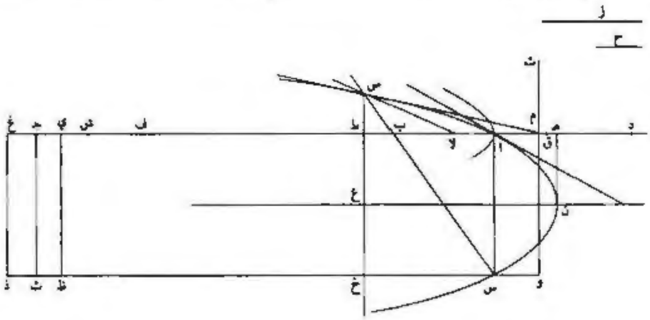
والشرط في هذا القطع هو أن تكون نسبة مربع ز إلى مربع ح ليست بأصغر من نسبة الخط المركب من ضعف القطر المجانب، الذي هو ا د، مع الخط الشبيه النسبة، الذي هو ضعف ا م، مع ثلاثة أمثال الخط الذي مربعه مثل ضرب القطر المجانب في الخط الشبيه النسبة، إلى خط م هـ.

ولنعد القطع الزائد والقطع المكافئ، ويتمم القطع المكافئ. ونخرج خط د ا على استقامة في جهة ا ونجعل ضرب د ا في ضعف ا م مثل مربع ا ب. ونخرج من نقطة ا

6 هـ ن: هـ ق – هـ ن (ثانية): ض ن – 7 نقطتي (الأولى والثانية): نقطتين – 8 يمرّ: يتم – لأن: لا ان – 10 يمرّ: يمر – 11 ومقعّره: مصدر ميمي من غير الثلاثي المجرد «قعّر». ونجد صورته كصورة اسم المفعول. ويأخذ ابن الهيثم بهذا التعبير في كتب أخرى، انظر على سبيل المثال مقالة في التحليل والتركيب، ص. ٢٣١ – 13 ن ا: زا – 20 مربعه: من بعد «في»: من.

عمودًا على سهم القطع المكافئ وننفذه إلى محيط القطع، وليكن ا س. فهذا الخط يفصل من السهم خطًا مساويًا لخط ا هـ الذي هو الضلع القائم. ونصل س ب وننفذه حتى ينتهي إلى محيط القطع المكافئ؛ وليقطع القطع المكافئ على نقطة ص. ونخرج من نقطة ص خطًا على الترتيب، وليكن ص ط خ؛ وليقطع سهم القطع على نقطة ع. فيكون ضرب الضلع القائم في الخط الذي فصله ا س من السهم مثل مربع ط ع. وضرب الضلع القائم في ن ع مثل مربع ص ع، فضرب الضلع القائم في ب ط مثل مربع ص ط. وأيضًا فإن نسبة ص ط إلى ط ب كنسبة س ا إلى ا ب، فضرب ا ب في ص ط مثل ضرب س ا في ب ط، وضرب س ا في ب ط ضعف ضرب الضلع القائم في ب ط، لأن س ا ضعف ‹الضلع› القائم، فضرب ا ب في ص ط ضعف مربع ص ط، فـ ا ب ضعف ص ط، فـ ص ط نصف ا ب. ولأن ضرب س ا في ب ط مثل ضرب / ا ب في ص ط، [و]يكون ضرب س ا في ب ط نصف مربع ا ب؛ ومربع ٤-ظ ا ب مثل ضرب د ا في ضعف ا م، فضرب د ا في ا م نصف مربع ا ب؛ ود ا مثل س ا، فضرب س ا في ب ط مثل ضرب س ا في ا م، فـ ب ط مثل ا م، ‹و›مجموع ا م ب ط مثل الخط الشبيه. ونجعل ط ف ضعف ا د ونجعل ف جـ ضعف ا ب، فيكون خط جـ م ضعف ا د وضعف ا م الذي هو الخط الشبيه النسبة وثلاثة أمثال خط ا ب الذي مربعه مثل ضرب د ا في الخط الشبيه النسبة، فخط جـ م هو الخط الذي قدمنا تحديده.

فأقول: إنه إذا كانت نسبة مربع ز إلى مربع ح كنسبة جـ م إلى م هـ أو أعظم من نسبة جـ م إلى م هـ، فإن المسألة تتم وتتم مرتين. وإن كانت نسبة مربع ز إلى مربع ح أصغر من نسبة جـ م إلى م هـ، فإن المسألة لا تتم ‹بوجه› من الوجوه. فلنبين ما ذكرناه.



3 وليقطع: وليكن – 4 وليقطع: وليكن – 5 فصله: وصله / من: في – 7 س ا: س – 8 س ا في (الثانية): س الى – 15-16 ا ب ... الشبيه النسبة: مكررة – 16 مثل: مكررة في التكرار. والنص في هذا المكان مضطرب، فلقد كرر الناسخ كلمة «مثل» وأشار إلى ذلك بوضع حرف «ز» فوقها؛ ثم عاد فكتب في الهامش «وثلثة أمثال خط ا فخط جـ م هو»، وهذا تكرار لعبارتين من نفس الجملة – 17 ح: ح رع – 19 ‹بوجه›: في [ح].

‹فليكن› أولاً نسبة مربع ز إلى مربع ح، التي هي نسبة ا هـ إلى هـ ق، كنسبة جـ م إلى م هـ. ونقسم جـ ف بنصفين على نقطة ش، فيكون ف ش مثل ا ب وا ب ضعف ص ط، فخط ف ش ضعف ص ط. وط ف ضعف خ ط، فخط ش ط ضعف خط ص خ، فضرب ش ط في ط ص مثل ضرب خ ص في ص ط مرتين. وخ ط ضعف الضلع القائم، وضرب الضلع القائم في ا ط مثل ضرب خ ص في ص ط، فضرب خ ط في ط ا مثل ضرب ش ط في ط ص. وجـ ش مثل ا ب وا ب ضعف ص ط، فضرب جـ ش في ط ص مثل ضرب خ ط في ا م. فضرب جـ ط في ط ص مثل ضرب خ ط في ط م، ونسبة جـ ط إلى ط م كنسبة خ ط إلى ط ص، ونسبة جـ م إلى م ط كنسبة خ ص إلى ص ط. ونسبة جـ م إلى ا هـ مؤلفة من نسبة جـ م إلى م ط ومن نسبة م ط إلى ا هـ، ونسبة جـ م إلى م ط كنسبة خ ص إلى ص ط، فنسبة جـ م إلى ا هـ مؤلفة من نسبة خ ص إلى ص ط ومن نسبة ط م إلى ا هـ، ‹وهذه النسبة هي› كنسبة ضرب م ط في ط ا إلى ضرب ط ا في ا هـ. وا هـ هو الضلع القائم، وضرب ط ا في الضلع القائم مثل ضرب خ ص في ص ط، فنسبة ط م إلى ا هـ كنسبة ضرب م ط في ط ا إلى ضرب خ ص في ص ط. فنسبة جـ م إلى ا هـ مؤلفة من نسبة خ ص إلى ص ط ومن نسبة ضرب م ط في ط ا إلى ضرب خ ص في ص ط. ونسبة خ ص إلى ص ط كنسبة ضرب خ ص في ص ط إلى مربع ص ط، فنسبة جـ م إلى ا هـ مؤلفة من نسبة ضرب م ط في ط ا إلى ضرب خ ص في ص ط ومن نسبة ضرب خ ص في ص ط إلى مربع ص ط، وهذه النسبة هي نسبة ضرب م ط في ط ا إلى مربع ط ص. فنسبة جـ م إلى ا هـ كنسبة ضرب م ط في ط ا إلى مربع ط ص. ونسبة جـ م إلى ا هـ هي كنسبة م هـ إلى هـ ق، فنسبة ضرب م ط في ط ا إلى مربع ط ص كنسبة م هـ إلى هـ ق، ونسبة ا م إلى م ت كنسبة م هـ إلى هـ ق، فنسبة ضرب م ط في ط ا إلى مربع ط ص كنسبة ا م إلى م ت.

فالقطع الزائد الذي سهمه المجانب ا م وضلعه / القائم م ت يمرّ بنقطة ص، ونقطة ه-و ص على محيط القطع المكافئ. فإن كانت نسبة مربع ز إلى مربع ح كنسبة جـ م إلى م هـ، فإذًا القطع الزائد الذي سهمه ا م يقطع القطع المكافئ، ويتم المسألة كما تبين في تركيب هذه المسألة.

1 ‹فليكن›: في [ح] – 2 جـ ف: خف / ش: س / ف ش: فش – 3 خ ط: ح ط – 7 خ ط (الثانية): ح ط – 12 ط ا (الأولى): ظ ا / في (الثالثة): من – 13 ص ط: ص هـ / فنسبة: ونسبة / ط ا: ظ ا – 18 فنسبة: ونسبة – 21 فنسبة: ونسبة / ط ا: ظ ا – 23 يمرّ: ثم – 24 جـ م: ح م، وأثبت الصواب تحتها.

فأقول أيضًا: إن المسألة تتم مرتين. فنخرج من نقطة ص إلى قطر ا ط خطًا على الترتيب، وليكن خط ص لا. فيكون لا ط ضعف ص ط؛ وذلك أن ص لا موازٍ للخط الذي يماسّ القطع المكافئ على نقطة آ، والخط المماسّ يفصل من السهم من خارج القطع خطًا مثل الخط الذي يفصله العمود الخارج من نقطة آ على السهم من السهم. والعمود الخارج من نقطة آ على السهم مساوٍ لما يفصله من السهم، لأن هذا العمود مساوٍ للضلع القائم. فالمماسّ الذي يخرج من نقطة آ يحدث مع السهم مثلثًا قاعدته ضعف العمود الخارج من نقطة آ. وهذا المثلث شبيه بمثلث ص لا ط، فخط لا ط ضعف خط ط ص، فهو مساوٍ لخط ا ب. فخط ا لا مساوٍ لخط ب ط وب ط مثل ا م، فخط ا لا مثل خط ا م، فخط م ص مماس للقطع.

ونخرج من نقطتي م جـ عمودين على خط س خ؛ وليكونا م و وجـ ث. فلأن نسبة جـ م إلى م ط كنسبة خ ص إلى ص ط، تكون نسبة م جـ إلى جـ ط كنسبة ص خ إلى خ ط، فضرب جـ م في ط خ، أعني م و، مثل ضرب ص خ في جـ ط، أعني خ ث. فالقطع الزائد الذي يرسم على نقطة م ويكون الخطان اللذان لا يقعان عليه خطي و ث ث جـ يمرّ بنقطة ص. فخط م ص يكون في داخل هذا القطع، وم ص مماسّ للقطع المكافئ، فليس يقع بينه وبين القطع المكافئ خط مستقيم. فالخط الذي يخرج من نقطة ص فيما بين الخط المماس للقطع الزائد وبين خط م ص، يكون في داخل القطع. وكل خط من هذه الخطوط يكون في داخل القطع المكافئ. فالقطع الزائد الذي يمر بنقطتي م ص يقطع القطع المكافئ على نقطة فيما بين نقطتي آ ص. فإذا أخرج من نقطة التقاطع عمودٌ على خط س ث، قطع خط م جـ، وتكون نسبة جـ م إلى ما ينفصل منه في جهة م كنسبة العمود إلى ما ينفصل منه فيما بين القطع وخط م جـ. فإذا سيق البرهان على الطريق الذي قد بيناه، تبين من ذلك أن القطع الزائد الذي سهمه المجانب ا م وضلعه القائم م ت يمر بالنقطة الأخرى التي فيما بين نقطتي آ ص، فتبين من ذلك أن القطع الزائد الذي سهمه ا م وضلعه القائم م ت يقطع القطع المكافئ على نقطتين سوى نقطة ‹آ›. فتبين من ذلك أن المسألة تتم مرتين.

2 ص لا: ص ل ا / لا ط: ل اط / ص لا: ص ل ا – 3 يفصل: معضل – 6 فللماس: والمماس – 10 جـ ث: تقرأ جـ ت في المخطوطة، ولكن سبق أن رمز بالتاء إلى نقطة أخرى مما اضطرنا إلى الأخذ بالثاء – 13 عليه: على – 14 يمرّ: يم / هذا: هذه – 15-16 الذي يخرج ... للقطع: مكررة – 16 يمرّ: يم – 20 كنسبة: فنسبة – 21 بيناه: بيناها؛ أخذنا بهذا لأن ابن الهيثم يُذكّر «الطريق» في هذا النص – 22 يمرّ: يم / بالنقطة: بالنقط – 24 ‹آ›: في [ح].

وإذ قد تبين ذلك في هذه النسبة، فإنا نبينه في النسبة التي هي أعظم من نسبة جـ م إلى م هـ. فنجعل غ م أعظم من جـ م ونخرج من نقطة غ عمود غ ذ. وهو بيّن أنه إذا أخرج من / نقطة م خط يماس القطع الزائد الذي يمرّ بنقطتي م ص، فإنه إذا أخرج ه-ظ في الجهتين، انتهى إلى خط ث و وإلى خط ث جـ إذا أخرج هذان الخطان على استقامة. وينقسم الخط المماس على نقطة م بنصفين. وهذا الخط المماس يكون فيما بين خطي م ص م جـ. وهذا الخط المماس إذا امتدّ على استقامة في جهة جـ، فإنه يلقى خط ذ غ على استقامة في جهة غ، ويكون القسم منه الذي بين نقطة م وبين خط ذ غ أعظم من القسم الذي بين نقطة م وبين خط ث و. فإذا امتدّ م ص على استقامة في جهة و، يصير أيضًا القسم من الخط المتصل بخط م ص الذي بين نقطة ص وبين خط ذ غ إذا امتد هذا القسم في جهة غ أعظم من القسم من هذا الخط الذي بين نقطة م وبين خط ذ و. فالقطع ‹الزائد› الذي يرسم على نقطة م ويكون الخطان اللذان لا يقعان عليه خطي ذ و [او] ذ غ يقطع الخط المماس ويقطعه في جهة غ، ويقطع أيضًا القسم من الخط المتصل بخط م ص في جهة غ ويقطعه من وراء نقطة ص. والخط المماس يقطع القطع المكافئ لأنه فيما بين خطي م ص م جـ. فالقطع الزائد الذي قد رسم على نقطة م ويكون الخطان اللذان لا يقعان عليه خطي ذ غ ذ و هو يقطع القطع المكافئ ويقطعه على نقطتين، إحداهما قبل نقطة ص والأخرى بعد نقطة ص. فإذا أخرج من نقطتي التقاطع عمودان على خط ذ و وسلك في البرهان الطريق الذي تقدم، تبين من ذلك أن المسألة تتم وتتم مرتين، أيضًا كما تبين في خط م جـ.

فقد تبين أنه إذا كانت نسبة مربع ز إلى مربع ح ‹أعظم من نسبة جـ م إلى م هـ، فإن المسألة تتم وتتم مرتين. أما إذا كانت نسبة مربع ز إلى مربع ح› أصغر من نسبة جـ م إلى م هـ، فإن المسألة لا تتم. وذلك بين كما نصف.

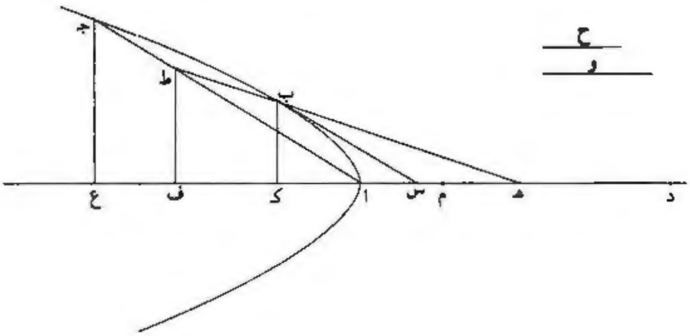
نجعل النسبة نسبة ي م إلى م هـ ونخرج عمود ي ظ، فإذا أخرج على استقامة في جهة ي، فإنه يقطع الخط المماس الذي قدمنا وصفه، أعني الذي يماس القطع الزائد الذي يمرّ بنقطتي م ص، ويفصل منه جزءًا فيما بينه وبين نقطة م، يكون أصغر من الجزء

1 نبينه: تنبيه – 2 غ ذ: أثبت الغين تحتها – 4 في: من – 8 م ص: نو – 10 في: من – 11 ‹الزائد›: في [ح] – 14 قد: لا – 15 يقعان: سعان / هو: هي – 17 عمودان: عمودين – 19-20 ‹أعظم ... ح›: في [ح] – 20 ‹أما إذا›: ‹وأقول أيضًا إنه› في [ح] – 22 ي م: ثم / ي ظ: ثط / فإذا: اذا – 23 ي: ث / وصفه: وضعه – 24 ويفصل منه: د يفصل نه.

الذي بين نقطة م وبين خط ظ و. فإذا رسم على نقطة م القطع الزائد الذي لا يقع عليه خطا ظ ي ظ و، كان ذلك القطع يقطع الخط المماس المقدّم ذكره على نقطة فيما بين نقطة م وبين خط ظ و. فهذا القطع لا يقطع القطع المكافئ. وإذا لم يقطع القطع المكافئ، لم يقطع / القطع الزائد الذي سهمه ا م وضلعه القائم م ت القطع المكافئ، ٦-و فلا تتم المسألة.

فقد تبين من جميع ما بيناه أن تحديد المسألة في القطع الزائد هو أن تكون نسبة مربع ز إلى مربع ح ليس بأصغر من نسبة جـ م إلى م هـ، وإذا كانت النسبة كذلك فإن المسألة تتم مرتين؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

– و – قطع ا ب جـ قطع زائد أو ناقص وسهمه المجانب ا د ومركزه هـ، ونسبة ح إلى و مفروضة. ونريد أن نخرج خطًّا يماسّ القطع وينتهي إلى السهم وتكون نسبته إلى ما يفصله من السهم مما يلي الطرف الأبعد كنسبة ح إلى و.

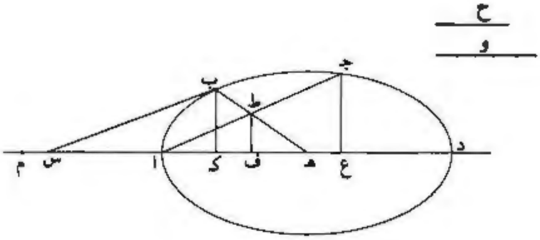


فنفرض ذلك على جهة التحليل: وليكن المماسّ ب س، فتكون نسبة ب س إلى س د كنسبة ح إلى و. ونصل هـ ب وننفذه على استقامة في جهة ب، ونخرج من نقطة ا خطًّا إلى قطر هـ ب على الترتيب؛ وليكن ا ط جـ. فيكون ا ط نصف ا جـ. ونخرج من نقط ب ط جـ أعمدة على السهم؛ ولتكن ب ك ط ف جـ ع. فتكون نسبة ضرب د ع في ع ا إلى مربع ع جـ كنسبة قطر ا د المجانب إلى ضلعه القائم، وكذلك تكون نسبة

2 خطا: خطًا / ظ ي ظ و: ظ ث ظ ذ / الخط: القطع – 3 ظ و: ط ذ – 4 القطع (الثانية): للقطع – 10 ونريد: ويزيد – 11 يفصله: يفضله – 12 فنفرض: فبقى من / فتكون: ويكون – 15 نقط: نقطة.

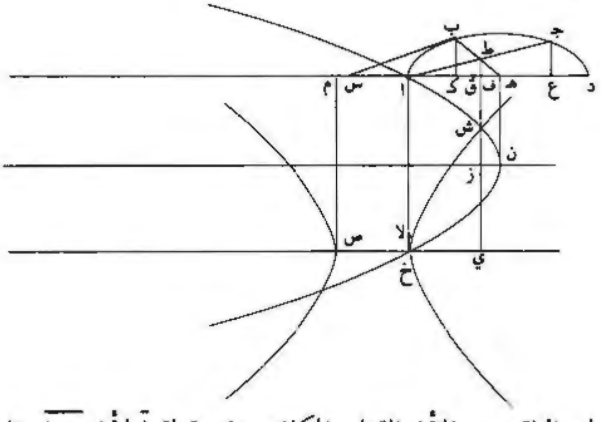
ضرب د ك في ك ا إلى مربع ك ب، كما تبين في شكل كا من المقالة الأولى. فتكون نسبة ضرب هـ ف في ف ا إلى مربع ف ط هي تلك النسبة بعينها لأن هذه الخطوط هي أنصاف تلك الخطوط. ونجعل نسبة هـ م إلى م ا كنسبة قطر ا د المجانب إلى ضلعه القائم. فيكون خط ا م نصف الخط الشبيه النسبة. فتكون نسبة ضرب م ف في ف ا إلى مربع ا ط كنسبة م هـ إلى هـ ا المعلومة كما تبين في الشكل الثاني من المقالة السابعة. ونسبة ك ا إلى ا هـ كنسبة ا س إلى س هـ ونسبة ا س إلى س هـ كنسبة ط ب إلى ب هـ التي هي نسبة ف ك إلى ك هـ، فنسبة ف ك إلى ك هـ كنسبة ك ا إلى ا هـ، فنسبة ف هـ إلى هـ ك / كنسبة ك هـ إلى هـ ا، فضرب ف هـ في هـ ا مثل مربع هـ ك. ولأن ٦-ظ نسبة ك ا إلى ا هـ كنسبة ا س إلى س هـ، تكون نسبة ك ا إلى ا س كنسبة ا هـ إلى هـ س التي هي نسبة ط ا إلى ب س، فنسبة ط ا إلى ب س كنسبة ك ا إلى ا س. فنسبة ط ا إلى ا ك كنسبة ب س إلى س ا. ولأن نسبة ب س إلى س د كنسبة ح إلى ‹و› المعلومة. تكون نسبة د س إلى س ا كنسبة ب س إلى خط نسبته إلى س ا معلومة. فنسبة د س إلى س ا كنسبة ط ا إلى خط نسبته إلى ك ا معلومة. ونسبة د س إلى س ا كنسبة د ك إلى ك ا. كما تبين في شكل لو من المقالة الأولى. فنسبة د ك إلى ك ا كنسبة ط ا إلى خط نسبته إلى ا ك نسبة معلومة. فنسبة د ك إلى ا ط معلومة؛ وكذلك نسبة مربع د ك إلى مربع ا ط معلومة. ونسبة ضرب م ف في ف ا إلى مربع ا ط معلومة. فنسبة ضرب م ف في ف ا إلى مربع د ك معلومة. وقد تبين أن ضرب ف هـ في هـ ا مثل مربع هـ ك. ولأن نسبة ضرب م ف في ف ا إلى مربع ك د معلومة وضرب ف هـ في هـ ا مثل مربع هـ ك، تكون نسبة هـ ا إلى ا ف معلومة. فيكون ا ف معلومًا لأنه يمكن أن يوجد وسنبيّن كيفية وجوده في تركيب هذه المسألة. وإذا كان ا ف معلومًا، كان ف ط معلوم الوضع. وكان ا ط جـ معلوم القدر والوضع. لأن ا ط مثل ط جـ؛ فتكون نقطة ط معلومة. فيكون هـ ب ط معلوم الوضع، فتكون نقطة ب معلومة، وخط ب س مماسّ وهو الذي يعمل المسألة وهو معلوم الوضع.

1 ك ب: كف – 3 أنصاف تلك: بعضا و تلك – 4 م ف في ف ا: مف في ا – 8 ف هـ: به / فضرب ف هـ: فيضرب به – 11 س د: س / 12 ‹و›: في [ح] / معلومة: معلوم / 15 نسبة (الأولى): نسبته – 16 م ف: مب – 17 م ف في ف ا: مف في ا – 18-19 ولأن ... هـ ك: مكررة – 18 ك د: ك ر – 19 ا ف (الثانية): ا ب – 20 ف ط: ب ط – 22 ب س: ر ب س، صححها في الهامش.



– ز – وتركيب هذه المسألة يكون كما نصف.

نعيد القطعين، ونجعل نسبة ا هـ إلى هـ ق كنسبة مربع ح إلى مربع و، ونخرج من نقط هـ م ا أعمدة على السهم؛ ولتكن هـ ن م ص ا خ. ونجعل هـ ن مثل هـ ا وم ص مثل د ا، ونخرج من نقطتي ن ص خطين موازيين لخط هـ ا وليكونا ن ز ص خ ي، فيكون ص خ مثل م ا. ونجعل نسبة ص خ إلى خ لا كنسبة م هـ إلى هـ ق، ونرسم على نقطة خ القطع الزائد الذي سهمه المجانب ص خ / وضلعه القائم خ لا، ونرسم على نقطة ٧-و ن القطع المكافئ الذي رأسه نقطة ن وسهمه ن ز وضلعه القائم هـ ا، فهذان القطعان يتقاطعان على كل حال.



أما في القطع الناقص، فلأن القطع المكافئ يمرّ بنقطة ا لأن هـ ا مثل الضلع القائم، وإذا تمّ القطع المكافئ، فهو يمرّ بنقطة خ، فيكون بعض القطع الزائد في داخل القطع المكافئ، ومقعراهما متقابلان، فهما يتقاطعان على كل حال ويكون تقاطعهما في الجهة الواحدة على نقطة واحدة فقط.

1 نصف: وصفنا – 2 ح: خ / نقط: نقطة – 4 ن: ر – 7 ن ز: ر – 9 يمرّ: ثم – 11 متقابلان: مقابلان.

وأما في القطع الزائد، فلأن الخط الذي لا يقع على القطع الزائد الذي سهمه ص خ يقطع خط ن ز الذي هو سهم القطع المكافئ وهو يقطعه من بعد نقطة ن – لأنه يخرج من وسط خط ص خ ويحيط مع خط ص خ بزاوية حادّة مما يلي نقطة خ. فإذا قطع خط ن ز دون نقطة ن، فهو يقع في داخل القطع المكافئ، فهو يقطع محيط القطع المكافئ. فإذا كان محيط القطع المكافئ يقطع الخط الذي لا يقع على القطع الزائد، فهو يقطع القطع الزائد لأن القطع الزائد يقرب أبدًا من الخط الذي ‹لا› يقع عليه والقطع المكافئ يبعد أبدًا من الخط المستقيم الذي يقطعه.

فالقطع المكافئ والقطع الزائد يتقاطعان على كل حال. فليتقاطعا على نقطة ش وليكن القطع المكافئ ن ش والقطع الزائد خ ش.

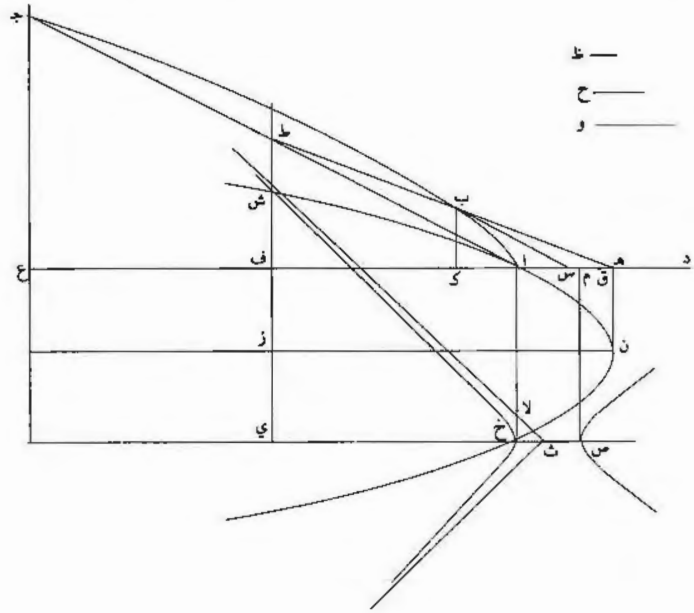
ونخرج من نقطة ش ‹عمود ش› ف ز ي ونجعل ف ع مثل ف ا ونخرج عمود ع جـ إلى القطع المفروض. ونصل ا جـ، ونخرج ش ف حتى يلقى ا جـ وليلقه على نقطة ط، فيكون ا ط مثل ط جـ. ونصل هـ ط، فيكون قطرًا للقطع وليقطع محيط القطع على نقطة ب. ونخرج ب س موازيا لـ ط ا، فيكون مماسًا للقطع، كما تبين في شكل يز من المقالة الأولى.

فأقول: إن نسبة ب س إلى س د كنسبة ح إلى و.

وبرهانه: أنا نخرج عمود ب ك، فيكون ضرب ف هـ في هـ ا مثل مربع هـ ك، كما تبين في التحليل. وف هـ مثل ن ز، وضرب ن ز في هـ ا مثل مربع ز ش لأن هـ ا هو الضلع القائم للقطع المكافئ، فخط هـ ك مثل ز ش، وز ي مثل هـ د لأن ف ي مثل ا د وز ي نصف ف ي، فخط ي ش مثل خط ك د. ونسبة ضرب ص ي في ي خ إلى مربع ي ش كنسبة ص خ إلى خ لا التي هي كنسبة م هـ إلى هـ ق. فنسبة ضرب ص ي في ي خ إلى مربع ي ش مؤلفة من نسبة م هـ إلى هـ ا ومن نسبة ا هـ إلى هـ ق. ونسبة م هـ إلى هـ ا كنسبة ضرب م ف في ف ا إلى مربع ا ط، كما تبين في التحليل، ونسبة ا هـ إلى هـ ق كنسبة مربع ح إلى مربع و. فنسبة ضرب م ف في ف ا إلى مربع ي ش مؤلفة من نسبة ضرب م ف في ف ا إلى مربع ا ط ومن نسبة مربع ح إلى مربع و. ونسبة ضرب م ف في ف ا إلى مربع ي ش مؤلفة من نسبة ضرب م ف في

4 ن ز: ير – 6 ‹لا›: في [ح] – 8 فالقطع: والقطع – 10 نقطة ش ‹عمود ش› ف ز ي. نقط س هـ و ز ي، ‹عمود ش› ف ز ي في [ح] – 11 ونصل: وفصل / ش ف: س هـ – 13 ونخرج: نخرمع – 15 س د: سر – 17 وضرب: فضرب ز ش: هش – 18 ف ي: ف ق / د: ن – 24 ح: خ.

ف ا إلى مربع ا ط ومن نسبة مربع ا ط إلى مربع ي ش، فنسبة مربع ا ط إلى مربع / ي ش كنسبة مربع ح إلى مربع و. وي ش مثل كـ د، فنسبة مربع ا ط إلى مربع كـ د ظ-٧ كنسبة مربع ح إلى مربع و، ونسبة ا ط إلى كـ د كنسبة ح إلى و. فتكون نسبة د كـ إلى كـ ا كنسبة ط ا إلى خط نسبته إلى ا كـ كنسبة ط ا إلى كـ د التي هي نسبة ح إلى و. ونسبة ط ا إلى ا كـ كنسبة ب س إلى س ا. ونجعل نسبة خط ظ إلى س ا كنسبة ح إلى و، فتكون نسبة س ا إلى ظ كنسبة و إلى ح. ونسبة س ا إلى ظ كنسبة س ا في ا ط إلى ا ط في ظ، فنسبة س ا في ا ط إلى ا ط في ظ كنسبة و إلى ح. لكن س ا في ا ط مثل ب س في ا كـ، فنسبة ب س في ا كـ إلى ا ط في ظ كنسبة و إلى ح. ولذلك تكون نسبة ب س إلى ظ كنسبة ط ا إلى الخط الذي نسبته إلى ا كـ كنسبة ح إلى و التي هي نسبة د كـ إلى كـ ا. فنسبة ب س إلى س د كنسبة ظ إلى س ا ونسبة ظ إلى س ا كنسبة ح إلى و، فنسبة ب س إلى س د كنسبة ح إلى و؛ وذلك ما أردنا أن نبين.



3 د كـ: ا كـ – 4 ط ا (الثانية): هـ ا – 6 و ... ظ كنسبة: مكررة، وكتب بعدها «س ا في ا ط إلى ا ط فنسبة» وأشار إلى ذلك التكرار بوضع «ز» و«إلى» فوقها – 7 فنسبة ... ظ: أثبتها في الهامش مع «صح» – 9 ولذلك: وكذلك / تكون: فيكون، في التكرار / ح: ط، وكتب ح في التكرار – 9-10 تكون ... إلى و: مكررة – 10 س د: س ز / س ا: شا – 11 ب س : د س / و: ف.

وليس يحتاج في هذه المسألة إلى تحديد لأنه قد تبين أن قطعي ن ش خ ش يتقاطعان على كل حال. فالمسألة تتمّ على كل حال بغير شرط وتتمّ مرة في الجهة الواحدة، لأن قطع ن ش ليس يقطع قطع خ ش في الجهة الواحدة إلا على نقطة واحدة.

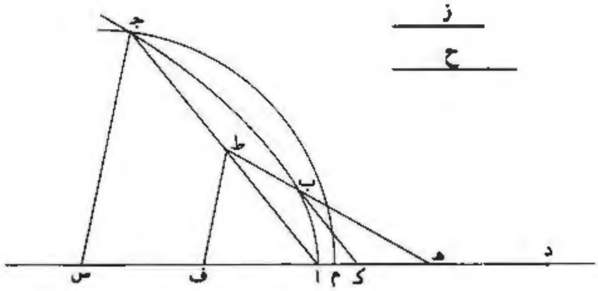
أما في القطع الناقص، فلأن مقعريهما متقابلان. وأما في القطع الزائد، فلأن كل خط مستقيم يقطع القطع الزائد على نقطتين. فإنه إذا أخرج على استقامة في الجهتين، فإنه يقطع الخطين اللذين لا يقعان / على القطع ويوتر الزاوية التي يحيطان بها التي مما ٨ و
يلي القطع، لما تبين في شكل ح من مقالة ب. فإذا قطع قطع ن ش المكافئ قطع خ ش الزائد، فإن النقطتين تكونان في داخل الزاوية التي يحيط بها الخطان اللذان لا يقعان على القطع، أعني الزاوية التي ‹مما يلي› القطع من بعد النقطة التي عليها يقطع القطع المكافئ الخط الذي لا يقع على القطع الزائد. فإذا وصل بين النقطتين بخط مستقيم، كان ذلك الخط يقطع القطعين جميعًا. فإذا أخرج هذا الخط على الاستقامة، فإنه يقطع الخط الذي لا يقع على القطع الزائد من فوق النقطة التي عليها تقاطع هذا الخط والقطع المكافئ. فالخط الذي يمرّ بالنقطتين ليس يقطع الخط الآخر من الخطين اللذين لا يقعان على القطع الزائد، أعني أنه لا يوتر الزاوية التي تحيط بالقطع الزائد. فليس يتقاطع القطع المكافئ والقطع الزائد، الذي سهمه ص خ على نقطتين في جهة واحدة. وقد تبين أنهما يتقاطعان على كل حال، فهما يتقاطعان ‹في جهة واحدة› على نقطة واحدة فقط؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وقد تبين مما بيناه في التركيب كيف وجد خط ا ف وهو الذي ادعيناه في التحليل ‹أنه› سيتبين من وجوه في التركيب.

– ح – قطع ا ب جـ قطع زائد معلوم وسهمه ا د ومركزه هـ، ونسبة ز إلى ح نسبة مفروضة، وز أصغر من ح. ونريد أن نخرج خطًا يماسّ القطع وينتهي إلى سهمه، وتكون نسبته إلى ‹نصف› القطر الذي يخرج إلى موضع التماس كنسبة ز إلى ح.

3 لأن ... الوحدة: مكررة – 6 فإنه: وانه – 9 النقطتين: النقطتين / تكونان: يكون – 11 النقطتين: القطعين – 12 الخط (الثانية): القطع – 13 القطع (الأولى): الخط – 15 يوتر: يوتر / الزاوية: مكررة، وأشار إليها بحرف «ز» فوقها / تحيط: يحيط، وهذا أيضا جائز على أساس ما بعدها – 17 ‹في جهة واحدة›: في [ح] – 19 ا ف: ا و – 22 ونريد: ونريد

فنفرض ذلك على جهة التحليل: وليكن خط ب ك. ونصل هـ ب، فتكون نسبة هـ ب إلى ب ك معلومة. ونخرج هـ ب على استقامة ونخرج من نقطة ا إليه خطًا على الترتيب، وليكن ا ط جـ. فيكون ا ط مثل ط جـ وتكون نسبة هـ ط إلى ط ا كنسبة هـ ب إلى ب ك المعلومة. ونجعل زاوية هـ ط ف مثل زاوية ط ا ف، فيكون مثلث ا ط ف شبيهًا بمثلث هـ ط ف، فتكون نسبة هـ ف إلى ف ط كنسبة ف ط إلى ف ا، فضرب هـ ف في ف ا مثل مربع ف ط، فخط ف ط أعظم من خط ف ا. ونسبة هـ ف إلى ف ا كنسبة مربع هـ ف إلى مربع ف ط التي هي نسبة مربع هـ ط إلى مربع ط ا المعلومة، فنسبة هـ ف إلى ف ا معلومة وهـ ا معلوم، فخط ا ف معلوم وخط ف ط معلوم.



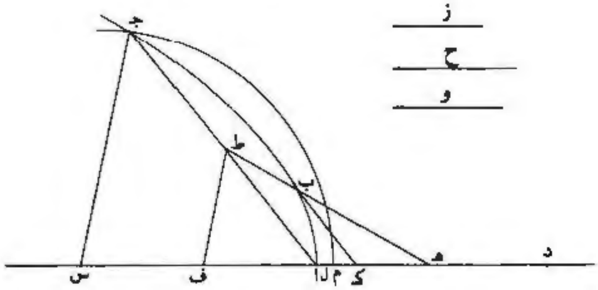
ونخرج من نقطة جـ خطًا موازيًا لخط ط ف، وليكن جـ س. فيكون جـ س ضعف ط ف وس ا ضعف ا ف. وط ف معلوم وا ف معلوم، فـ جـ س معلوم وس ا معلوم، فنقطة س معلومة. وس جـ أعظم من س ا، لأن ط ف أعظم من ف ا. فنجعل س م مثل س جـ، فتكون نقطة م خارجًا عن نقطة ا. فنجعل نقطة س مركزًا ونذير ببعد س م دائرة، ولتكن جـ م. فهذه الدائرة / تكون معلومة القدر والوضع لأن مركزها معلوم ٨ - ظ الوضع، فنقطة جـ معلومة، فخط ا جـ معلوم القدر والوضع، فنقطة ط معلومة، فخط هـ ط معلوم الوضع، فنقطة ب معلومة وهي التي تعمل المسألة.

– ط – فأما تركيب هذه المسألة، فإنا نعيد القطع ونجعل نسبة ز إلى و كنسبة ح إلى ز. فتكون نسبة ح إلى و كنسبة مربع ح إلى مربع ز. ونجعل نسبة هـ ف إلى ف ا

6 ف ط، فخط ف ط: فظ سحط فظ – 7 ف ط: هـ ط – 13 س: س هـ – 18 ز (الثانية): و.

كنسبة ح إلى و، ونجعل س ف مثل ف ا، ونجعل ضرب هـ ف في ف ا مثل مربع ف ل. ونجعل نقطة س مركزًا وندير ببعد مثل ضعف ف ل قوسًا من دائرة، وليكن قوس م جـ. ونصل ا جـ ونقسمه بنصفين على نقطة ط. ونصل هـ ط، فهو يقطع القطع لأن نقطة ط في داخل القطع؛ وليقطع القطع على نقطة ب، ونخرج ب ك مماسًا للقطع.

فأقول: إن نسبة ك ب إلى ب هـ كنسبة ز إلى ح.

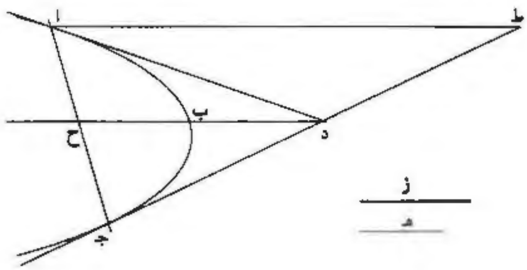


برهانه: أنا نصل س جـ ف ط، فيكونا متوازيين، فيكون جـ س ضعف ط ف. فيكون ضرب هـ ف في ف ا مثل مربع ف ط، فتكون نسبة هـ ف إلى ف ط كنسبة ط ف إلى ف ا، فيكون مثلثا هـ ف ط ا ف ط متشابهين، فتكون نسبة هـ ف إلى ف ط كنسبة ط ف إلى ف ا ‹وكنسبة هـ ط إلى ط ا›. فتكون نسبة هـ ف إلى ف ا كنسبة مربع هـ ف إلى مربع ف ط. ونسبة هـ ف إلى ف ا كنسبة ح إلى و التي هي نسبة مربع ح إلى مربع ز، فنسبة مربع هـ ف إلى مربع ف ط كنسبة مربع ح إلى مربع ز، فنسبة هـ ف إلى ف ط كنسبة ح إلى ز. ونسبة هـ ف إلى ف ط كنسبة هـ ط إلى ط ا ونسبة هـ ط إلى ط ا كنسبة هـ ب إلى ب ك ‹فنسبة هـ ب إلى ب ك› كنسبة ح إلى ز، فنسبة ك ب المماس إلى ب هـ كنسبة ز إلى ح؛ وذلك ما أردنا أن نبين./

وليس نحتاج هذه المسألة إلى تحديد لأنها تصح على كل حال. ٩-و

– ي – قطع ا ب جـ صنوبريّ وخط جـ د مماسّ له ونسبة هـ إلى ز معلومة. ونريد أن نخرج خطًا آخر مماسًا للقطع يلقى جـ د وتكون نسبته إلى ما يفصله من خط جـ د كنسبة هـ ‹إلى› ز.

3 ونصل: وفصل / ط: أ – 6 فيكونا: صواب محض، تضمين الشرط – 11 ف ط: هـ ط – 12 ف ط: فظ / ز: و – 13 ‹فنسبة ... ب ك›: في [ح] – 18 ‹إلى›: في [ح].



فنفرض ذلك على جهة التحليل: وليكن خط ا د، وليكن قطع ا ب أولاً القطع المكافئ. ونصل ا جـ ونقسمه بنصفين على نقطة ح ونصل د ح، وليقطع القطع على نقطة ب. فيكون د ح قطرًا للقطع لأنه يقطع جـ ا بنصفين ولأن المماسين يلقيانه على نقطة واحدة. فيكون ا جـ على الترتيب ويكون د ب مثل ب ح. فإن كان هـ مثل ز، فـ ا د مثل د جـ. وا ح مثل ح جـ، فزاوية ح قائمة، فـ د ح سهم القطع، فهو معلوم الوضع. وخط جـ د معلوم الوضع بالفرض، فنقطة د معلومة. فإذا أُخرج من نقطة د خط يماس القطع، كان مساويًا لـ د جـ، وهو المطلوب.

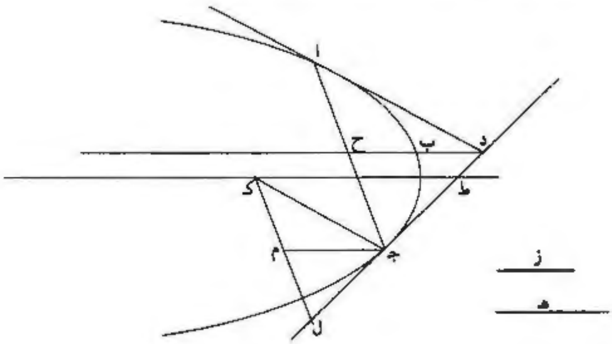
وإن كان هـ غير مساوٍ لـ ز، فـ ا د غير مساوٍ لـ د جـ، فزاوية ح غير قائمة، ولأن القطع مكافئ تكون أقطاره كلها متوازية وموازية لسهمه، وسهمه معلوم الوضع وخط جـ د معلوم الوضع، فهو يلقى السهم على زاوية معلومة. فخط جـ د يلقى كل واحد من أقطار القطع على مثل تلك الزاوية، وخط د ح قطر، فزاوية جـ د ح معلومة. ونخرج من نقطة ا خطًا موازيًا لخط ح د؛ وليكن ا ط. ونخرج جـ د حتى يلقاه، وليلقه على نقطة ط، فتكون زاوية ط مثل زاوية ح د جـ المعلومة ويكون ط د مثل د جـ، ونسبة د جـ إلى د ا معلومة، فنسبة ط د إلى د ا معلومة. وزاوية ط معلومة، فمثلث ا ط د معلوم الصورة وزاوية ا د ط معلومة /، فزاوية ا د جـ معلومة. ونسبة ا د إلى د جـ معلومة، فمثلث ا د جـ معلوم الصورة، فزاوية د جـ ا ‹معلومة› وخط جـ د معلوم الوضع، فخط جـ ا معلوم الوضع، فنقطة ا معلومة وخط د ا مماس. ٩-ظ

3 ب: د / المماسين: المماس – 4 هـ: ب هـ – 5 فـ ا د: فـ ا حـ / فـ د ح: فـ ز ح – 6 د: و / د خط: حـ حطا – 7 المطلوب: المطلوب هـ – 8 لـ ز ... مساو: مكررة – 9 مكافئ: مكاف – 12 يلقاه وليلقه: يلقاه ز ليلقه – 15 معلومة (الثانية والثالثة): معلوم / فمثلث ... معلوم: أثبتها في الهامش – 16 ‹معلومة›: في [ح] – 17 معلومة: معلوم.

– يا – وتركيب هذه المسألة يكون على ما نصف.

نخرج سهم القطع وليكن ط ك، فهو يلقى خط جـ د، فليلقه على نقطة ط. ونجعل نسبة ط جـ إلى خط ما كنسبة ز إلى هـ، ونخرج جـ ك مثل ذلك الخط، ونخرج ط جـ على استقامة في جهة جـ، ونفصل جـ ل مثل جـ ط ونصل ل ك، ونخرج من نقطة جـ خطًا موازيًا لخط ل ك، وليكن جـ ا. فهذا الخط يقطع القطع على نقطة أخرى لأنه يقطع السهم، فهو يقطع جميع الأقطار، فليقطع القطع على نقطة ا. ونقسم جـ ا بنصفين على نقطة ح ونخرج من نقطة ح خطًا موازيًا للسهم، فهو يلقى خط جـ د، وليكن خط ح ب د. فيكون هذا الخط قطرًا ويكون ا جـ على الترتيب لهذا القطر، فيكون د ب مثل ب ح لأن جـ د مماس وجـ ح على الترتيب. ونصل ا د، فيكون مماسًا لأن د ب مثل ب ح.

فأقول: إن نسبة ا د إلى د جـ كنسبة هـ إلى ز.

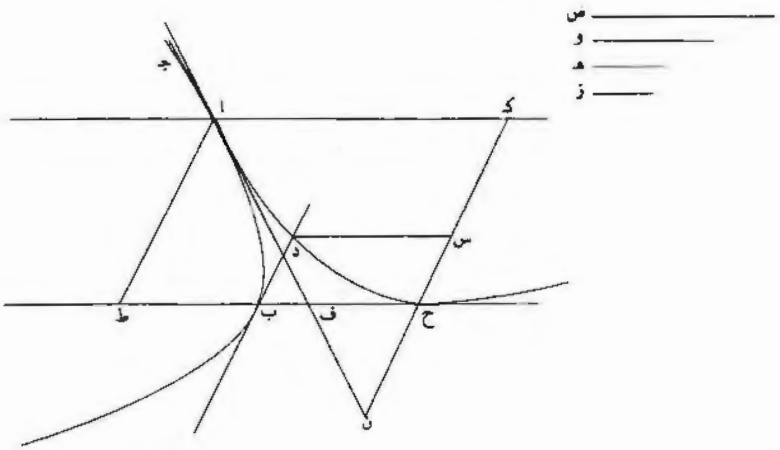


برهانه: أنا نقسم ل ك بنصفين على نقطة م ونصل جـ م، فيكون موازيًا لـ ط ك لأن ط جـ مثل جـ ل، فخط جـ م موازٍ لخط د ح، و‹خط› جـ ح موازٍ لخط ل م. فمثلث د جـ ح شبيه بمثلث جـ ل م. فنسبة د جـ إلى جـ ح كنسبة جـ ل إلى ل م. ونسبة جـ ح إلى جـ ا كنسبة م ل إلى ل ك، فنسبة د جـ إلى جـ ا كنسبة جـ ل إلى ل ك، فمثلث د جـ ا شبيه بمثلث جـ ل ك. فنسبة جـ د إلى د ا كنسبة ل جـ إلى جـ ك، أعني نسبة ط جـ إلى جـ ك التي هي نسبة ز إلى هـ. فنسبة ا د إلى د جـ كنسبة هـ إلى ز؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

3 هـ: ا هـ – 6 فليقطع: فليكن / جـ ا: قا – 11 ز: قد تقرأ د – 13 جـ ل: د ل / جـ ح: حـ ك – 17 هـ (الأولى): هـ د.

وتحديد هذه المسألة أن تكون نسبة هـ / إلى ز ليست بأصغر من نسبة العمود الواقع ١٠-و من نقطة جـ على السهم إلى خط جـ ط، لأن نسبة هـ إلى ز كنسبة كـ جـ إلى جـ ط وزاوية جـ ط كـ حادّة، لأنها الزاوية التي يحيط ‹بها› الخط المماس والسهم، فليس تكون إلا حادة. فلذلك تكون نسبة كـ جـ إلى جـ ط ليست بأصغر من نسبة العمود الواقع من نقطة جـ على السهم إلى خط جـ ط. فلذلك تكون نسبة هـ إلى ز ليست بأصغر من نسبة العمود الواقع من نقطة جـ على السهم إلى خط جـ ط؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

– يب – وليكن قطع ا ب جـ قطعًا زائدًا أو ناقصًا؛ وخط ب د مماس ونسبة هـ إلى ز معلومة. ونريد أن نخرج خطًا آخر يماس القطع ويلقى خط ب د وتكون نسبته إلى ما يفصله من خط ب د كنسبة هـ إلى ز.

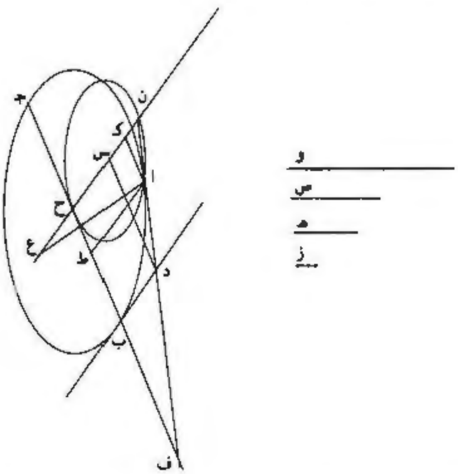


فنفرض ذلك على جهة التحليل: وليكن الخط المماس المطلوب خط ا د. فتكون نسبة ا د إلى د ب معلومة. وليكن مركز القطع نقطة ح. ونصل ح ب، فيكون قطرًا معلوم الوضع. ونخرج من نقطة ا خطًا على الترتيب، وليكن ا ط. ونخرج ا د على استقامة في جهة د، فهو يلقى ح ب، فليلقه على نقطة ف. فيكون ضرب ط ح في ح ف مثل مربع ح ب، لما تبين في شكل لز من المقالة الأولى. ونخرج من نقطة ح خطًا موازيًا لخطوط الترتيب، وليكن ح كـ ن. وننفذه في الجهتين. ونخرج من نقطة ا خطًا موازيًا لـ ح ط؛ وليكن ا كـ. فهو يلقى ح كـ، فليلقه على نقطة كـ. ونخرج ا ف على استقامة حتى يلقى كـ ح، فليلقه على نقطة ن. فلأن ا ط على الترتيب وا ف مماس، تكون نسبة ضرب

3 ‹بها›: في [ح] – 11 نقطة: بقطع – 14 ح ب: ح ف.

ح ط في ط ف إلى مربع ا ط كنسبة ح ب إلى نصف الضلع القائم التي هي نسبة معلومة، كما تبين في شكل لز من المقالة الأولى. فنسبة ضرب ح ط في ط ف إلى مربع ا ط معلومة. وضرب ح ط في ح ف مثل مربع ح ب، فنسبة ح ف إلى ف ط كنسبة مربع ح ب المعلوم إلى مربع نسبته إلى مربع ا ط معلومة، لأن نسبة ح ف إلى ف ط كنسبة ضرب ح ف في ح ط الذي هو مثل مربع ب ح، إلى ضرب ح ط في ط ف؛ ونسبة ضرب ح ط في ط ف إلى مربع ا ط معلومة. ونسبة ح ف إلى ف ط كنسبة ن ح إلى ا ط، فنسبة ن ح إلى ا ط كنسبة مربع ح ب إلى مربع نسبته إلى مربع ا ط معلومة، فهي كنسبة مربع معلوم إلى مربع ا ط. فضرب ن ح في ا ط مثل مربع خط معلوم نسبته إلى ح ب معلومة. فنسبة ضرب ن ح في ح ك إلى مربع ح ب معلومة، لأن نسبة ن ح إلى ا ط كنسبة سطح ما إلى مربع ا ط، فنسبة مربع ح ب إلى المربع الذي نسبته إلى مربع ا ط معلومة كنسبة ذلك السطح إلى مربع ا ط. وإذا بدلنا، ظهر لنا ما أردنا.

فنسبة ضرب ن ح في ح ك إلى ضرب ط ح في ح ف معلومة، فنسبة ك ح إلى خط نسبته إلى ح ط معلومة كنسبة ف ح إلى ح ن، فنسبة ح ك إلى خط نسبته إلى ا ك معلومة كنسبة ا ك إلى ك ن، / فنسبة ضرب ن ك في ك ح إلى مربع ك ا معلومة. ١٠-ظ
ونجعل نسبة ك ح إلى ص كنسبة ضرب ن ك في ك ح إلى مربع ك ا، فتكون نسبة ك ح إلى ص معلومة، ويكون ضرب ص في ك ن مثل مربع ك ا، ويكون ضرب ص في ح ن مثل مربع ح ب لأن ا ك مثل ح ط.



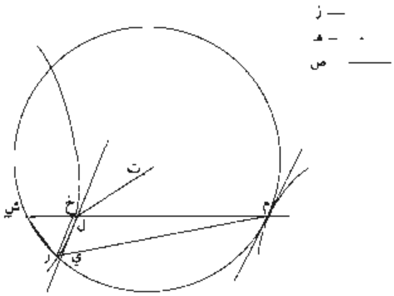
3 ح ب: ح ف / ف ط: رط – 4 ف ط: ح ط – 5 ط ف: هـ ف – 6 ف ط: خط – 13 ف ح: ط ح – 15 ص: ض، وهو يرمز بـ «ص» لهذا الخط من قبل – 17 ح ب: ح ف / ا ك: لك.

ونرسم على نقطة ح القطع الزائد الذي قطره المجانب ن ح وضلعه القائم خط تكون نسبة ن ح إليه كنسبة ك ح إلى ص، فهو يمرّ بنقطة ا التي على قطع ا ب جـ الزائد. ونرسم على خط ن ح من قطع ا ب جـ الناقص قطعًا ناقصًا يكون قطره ن ح وضلعه القائم خطٌ تكون نسبة ن ح إليه كنسبة ك ح إلى ص، فهو يمرّ بنقطة ا التي على محيط قطع ا ب جـ الناقص. ونجعل ضرب و في ن ك مثل مربع ا ن. فتكون نسبة و إلى ص كنسبة مربع ن ا إلى مربع ا ك. ونخرج من نقطة د خط د س موازيا لـ ك ا. و د ب مماس فهو موازٍ لـ ح ك؛ وضرب ط ح في ح ف مثل مربع ح ب. فضرب ا ن في ن ف مثل مربع ن د وضرب ك ن في ن ح مثل مربع ن س. فتكون نسبة ا ن إلى ن د كنسبة ا د إلى د ف. فضرب ا ن في د ف مثل ضرب ا د في د ن. ونسبة و إلى ا ن كنسبة ا ن إلى ن ك التي هي نسبة د ن إلى ن س وكنسبة د ف إلى س ح. فنسبة و إلى ا ن كنسبة د ف إلى س ح. فضرب ا ن في د ف مثل ضرب و في س ح. فضرب ا د في د ن مثل ضرب و في س ح. أعني د ب؛ فنسبة ا د إلى د ب كنسبة و إلى د ن. فنسبة و إلى د ن معلومة. ونسبة و إلى ص كنسبة مربع ن ا إلى مربع ا ك، فهي كنسبة مربع ن د إلى مربع د س. وضرب ص في ح ن مثل مربع د س لأنه مثل مربع ح ب. فضرب و في ح ن مثل مربع ن د. فنسبة و إلى ن د كنسبة ن د إلى ن ح؛ ونسبة و إلى ن د كنسبة ا د إلى د ب، فنسبة د ن إلى ن ح كنسبة ا د إلى د ب. أعني نسبة ‹ا د إلى› ح ‹س›. وكنسبة ا ن إلى ن س، فنسبة ا ن إلى ن س كنسبة ا د إلى د ب التي هي نسبة هـ إلى ز المعلومة، فنسبة ا ن إلى ن س معلومة. وضرب ك ن في ن ح مثل ‹مربع› ن س، فنسبة ضرب ك ن في ن ح إلى مربع ن ا معلومة وهي نسبة ح ن إلى و. ونجعل ن ع مثل و. فيكون ضرب ك ن في ن ع مثل مربع ن ا. ونصل ا ع، فيكون مثلث ا ن ع شبيهًا بمثلث ا ن ك. فتكون زاوية ن ا ع مثل زاوية ا ك ن، وزاوية ا ك ن معلومة لأنها زاوية الترتيب لقطر ح ب. فزاوية ن ا ع معلومة. فإذا كان خط ن ح معلوم القدر والوضع، وكان قطع ح ا معلوم الوضع. [و]كان خط ن ع معلوم القدر، وكانت / نقطة ا على ١١-و محيط قطعة دائرة معلومة الوضع ‹و›تكون نقطة ‹ا› معلومة. ويكون خط ا ن معلوم الوضع، فتكون زاوية ا ن ح معلومة وتكون زاوية ن ف ح معلومة. فخط ا ف يماس القطع ويحيط مع قطر ح ف بزاوية معلومة. فنقطة ا معلومة.

4 ك ح: بح – 7 ح ب: ح ف – 9 كنسبة ا ن: أثبتها في الهامش – 11-12 فضرب ا د ... س ح: أثبتها في الهامش – 12 د ن: ص – 13 فهي: فهو – 14 ح ب: ح ف – 15 ن د: ن – 16 ا د (الأولى): ا ك – 16-17 ‹ا د إلى› ح ‹س›: في [ح] – 18 ‹مربع›: في [ح] – 20 ن ع (الأولى): ن ح – 22 ح ب: ح ف.

– يجـ – وتركيب هذه المسألة يكون على ما نصف.

نعيد القطع والنسبة ونفرض خطين معلومين عليهما ل م ل ت، ونجعل نسبة ل م إلى ل ت كنسبة ‹نصف› الضلع القائم لقطر ح ب إلى قطر ح ب. ونرسم على نقطة ل من



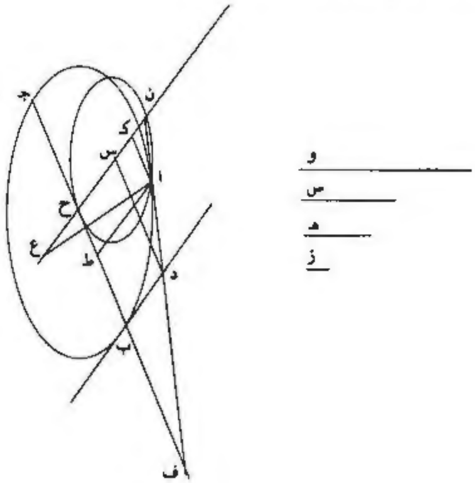
أحد الخطين القطع الزائد الذي قطره المجانب ل م وضلعه القائم ل ت وزاوية ترتيبه زاوية ترتيب قطر ح ب من قطع ا ب جـ الزائد، وليكن قطع ل ر. ونرسم على خط ل م الآخر القطع الناقص الذي قطره ل م وضلعه القائم ل ت وزاوية ترتيبه زاوية ترتيب قطر ح ب من قطع ا ب جـ الناقص، وليكن قطع ل ر م. ونجعل نسبة ل م إلى م ش كنسبة مربع ز إلى مربع هـ. ونرسم على خط ش م قطعة دائرة تقبل زاوية مثل زاوية ترتيب قطر ح ب، ولتكن قطعة م ر ش. فهذه القطعة تقطع قطع ل ر على تصاريف الأحوال، فلتقطعه على نقطة ر. ونصل ر م، فتكون زاوية م معلومة؛ ونصل ر ش ونخرج ر خ على الترتيب، فتكون زاوية ر خ م مثل زاوية م ر ش، فيكون مثلث م ر ش شبيهًا بمثلث م ر خ، فأضلاعهما متناسبة، فضرب خ م ‹في م ش مثل مربع م ر، فنسبة ضرب خ م› في م ل إلى مربع م ر كنسبة ل م إلى م ش التي هي نسبة مربع ز إلى مربع هـ. وتكون نسبة ضرب م خ في خ ل إلى مربع خ ر كنسبة م ل إلى ل ت التي هي كنسبة الضلع القائم لقطر ح ب إلى قطر / ح ب. ونخرج من نقطة ل خطًا على الترتيب، وليكن ل ي. ١١ – ظ فتكون زاوية ل ي م معلومة لأن زاويتي ل م معلومتان. وقد تبين في الشكل السابع والخمسين والشكل التاسع والخمسين من المقالة الثانية من كتاب *المخروطات* كيف نخرج

2 ونفرض: ويفرض – 3 ‹نصف›: في [ح] / لقطر: لقطع – 4 ل م: ل م ع – 5 ا ب جـ: ا كـ / ل ر: ر – 7 ا ب جـ: ا ب حـ د – 12 فأضلاعهما: فاضلاعها / ‹في ... خ م›: في [ح] 13 م ش: منش – 14 خ ل: ح – 14-15 كنسبة الضلع القائم لقطر ح ب إلى قطر ح ب: في هذا النص اختصر التعبير هكذا، والمقصود هو نصف الضلع القائم لنصف القطر الذي هو ح ب، وسنتركها على ما هي – 15 ل ي: لب – 16 ل ي م: ل ب م.

خطًا يماس القطع ويحيط مع سهم القطع بزاوية مثل زاوية معلومة. فنبين من هذه الحال كيف نخرج خطًا يماس القطع ويحيط مع القطر المعلوم الوضع بزاوية معلومة، وذلك لأن السهم يحيط مع كل قطر معلوم الوضع بزاوية معلومة. فنخرج خطًا يماس قطع ا ب جـ ويحيط مع قطر ح ب بزاوية مساوية لزاوية ل ي م، وهو خط ا ف. ونخرج ا ط على الترتيب، ونخرج ا كـ موازيًا لقطر ط ح ونخرج من نقطة ح خطًا موازيًا لخطوط الترتيب. وليكن ح كـ ن. وليقطع خط ا كـ على نقطة كـ، وليلق ا ف على نقطة ن. ونجعل نسبة ح ن إلى ن ح كنسبة ش م إلى م ل التي هي نسبة مربع هـ إلى مربع ز، ونصل ا ع. فلأن كـ ح موازٍ لخطوط الترتيب وا كـ موازٍ لـ ط ح، تكون زاوية كـ مساوية لزاوية ط ولزاوية ف ح ن. وزاوية ف ح ن مساوية لزاوية ي ل م وزاوية ف مساوية لزاوية ي. فتبقى زاوية ن مساوية لزاوية م. فيكون مثلث ن ا كـ شبيهًا بمثلث م ر خ ومثلث ن ف ح شبيهًا بمثلث م ي ل. ونسبة ضرب م خ في خ ل إلى مربع خ ر كنسبة م ل إلى ل ت التي هي نسبة الضلع القائم لقطر ح ب إلى قطر ح ب. فهي كنسبة مربع ا ط إلى ضرب ح ط في ط ف، كما تبين في شكل لز من مقالة ا. فالنسبة المؤلفة من نسبة م خ إلى خ ر ومن نسبة ل خ إلى خ ر هي النسبة المؤلفة من نسبة ا ط إلى ط ف ومن نسبة ا ط إلى ط ح؛ ونسبة م خ إلى خ ر كنسبة م ل إلى ل ي التي هي نسبة ن ح إلى ح ف التي هي نسبة ا ط إلى ط ف. فتبقى نسبة ل خ إلى خ ر كنسبة ا ط إلى ط ح التي هي نسبة ح كـ إلى كـ ا، فنسبة ح كـ إلى كـ ا كنسبة ل خ إلى خ ر. فنسبة ضرب ن كـ في كـ ح إلى مربع كـ ا كنسبة ضرب م خ في خ ل إلى مربع خ ر، التي هي نسبة م ل إلى ل ت التي هي نسبة الضلع القائم لقطر ح ب إلى قطر ح ب. ونسبة ا كـ إلى كـ ن كنسبة ر خ إلى خ م. فنسبة ح كـ إلى كـ ن كنسبة ل خ إلى خ م، فنسبة كـ ن إلى ن ح كنسبة خ م إلى م ل. ونسبة ح ن إلى ن ع كنسبة ل م إلى م ش، فنسبة كـ ن إلى ن ع كنسبة خ م إلى م ش. ونسبة خ م إلى م ش كنسبة مربع خ م إلى مربع م ر، فنسبة كـ ن إلى ن ع كنسبة مربع خ م إلى مربع م ر التي هي نسبة مربع كـ ن إلى مربع ن ا. فضرب كـ ن في ن ع مثل مربع ن ا. ونجعل نسبة ح كـ إلى ص كنسبة الضلع القائم لقطر ح ب إلى قطر ح ب، فتكون نسبة ضرب ن كـ في كـ ح / إلى ضرب ن كـ في ص كنسبة ١٢-و

1 بزاوية: زوية – 4 ل ي م: لب م | ف: ب – 6 ح كـ ن: ح كـ ن | وليقطع: وليكى – 7 ن ح: ن ع – 8 وكـ: ول كـ / لـ ط ح: نعد تحتها الـ كـ ح | 9 مساوية ... ف: مكررة | ي ل م: ب ل م – 10 ن ف ح: ن ف خ – 11 ح ن: خ ن، ولن نشير إليها فيما بعد – 12 لقطر: لقطع – 15 ن ح: ن خ – 18 كـ: كـ ل – 19 كـ ن: كو – 21 خ م: ح م | ح ن: خ ن – 23 فضرب: مضرب.

الضلع القائم لقطر ح ب إلى قطر ح ب. وقد كانت نسبة ضرب ن ك في ك ح إلى مربع ا ك كنسبة الضلع القائم لقطر ح ب إلى قطر ح ب، فضرب ن ك في ص مثل مربع ك ا، فتكون نسبة مربع ن ا إلى مربع ا ك كنسبة ن ع إلى ص. ونسبة ك ن إلى ن ح كنسبة ا ك إلى ف ح، التي هي نسبة ط ح إلى ح ف، التي هي نسبة مربع ط ح إلى مربع ح ب، أعني نسبة مربع ا ك إلى مربع ب ح. فنسبة ضرب ن ك في ص إلى ضرب ن ح في ص كنسبة مربع ا ك إلى مربع ح ب. وضرب ن ك في ص مثل مربع ا ك، فضرب ن ح في ص مثل مربع ح ب.



ونخرج د س موازيًا لـ ك ا، فيكون د س موازيًا لـ ح ب، ولأن ضرب ط ح في ح ف مثل مربع ح ب، يكون ضرب ا ن في ن ف مثل مربع ن د، ويكون ضرب ك ن في ن ح مثل مربع ن س. ونسبة ع ن إلى ن ح كنسبة ش م إلى م ل التي هي نسبة مربع هـ إلى مربع ز، فنسبة ع ن إلى ن ح كنسبة مربع هـ إلى مربع ز، فنسبة ح ن إلى ن ع كنسبة مربع ز إلى مربع هـ. لكن نسبة ح ن إلى ن ع كنسبة ضرب ح ن في ن ك إلى ضرب ن ك في ن ع، الذي هو مثل مربع ن ا، فنسبة ضرب ك ن في ن ح إلى مربع ن ا كنسبة مربع ز إلى مربع هـ. وضرب ك ن في ن ح مثل مربع ن س، فنسبة مربع ن س إلى مربع ن ا كنسبة مربع ز إلى مربع هـ، فنسبة مربع ا ن إلى مربع ن س كنسبة

2 ا ك: ل ك / إلى قطر ح ب: أثبتها في الهامش – 4 ط ح (الثانية): ظ حـ – 15 ن ا ... ن س: أثبتها في الهامش.

مربع هـ إلى مربع ز. فنسبة ا ن إلى ن س كنسبة هـ ‹إلى› ز. ولأن ضرب ع ن في ن ك مثل مربع ن ا، تكون نسبة ع ن إلى ن ا كنسبة ا ن إلى ن ك التي هي نسبة ف ن إلى ن ح، فنسبة ع ن إلى ن ا كنسبة ف ن إلى ن ح. فضرب ع ن في ن ح مثل ضرب ا ن في ن ف الذي هو مربع ن د. فضرب ع ن في ن ح مثل مربع ن د، فنسبة ع ن إلى ن ح كنسبة مربع د ن إلى مربع ن ح. ونسبة ع ن إلى ن ح كنسبة مربع هـ إلى مربع ز، فنسبة مربع د ن إلى مربع ن ح كنسبة مربع هـ إلى مربع ز. ونسبة مربع ا ن إلى مربع ن س كنسبة مربع هـ إلى مربع ز، فنسبة مربع ا ن إلى مربع ن س كنسبة مربع د ن إلى مربع ن ح، فنسبة ا ن إلى ن س كنسبة د ن إلى ن ح وكنسبة الباقي، وهو ا د، إلى الباقي، وهو ح س؛ فنسبة ا د ‹إلى› د ب كنسبة ا ن إلى ن س التي هي نسبة هـ إلى ز. فنسبة ا د إلى د ب كنسبة هـ إلى ز؛ وذلك ما أردنا أن نبين – والله أعلم./

١٢-ظ وتحديد هذه المسألة إذا كان خطا هـ ز مختلفين هو أن نفرض خطين نسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة مربع هـ إلى مربع ز مثل الخطين اللذين هما في الصورة خطا ش م ل م؛ ونجعل أصغرهما قطرًا للقطع الزائد النظير لقطع ل ر. وليس يحتاج في عمل القطع الزائد إلى زيادة شرط آخر.

فأما في القطع الناقص، فينبغي أن نجعل أيضًا أصغر الخطين قطرًا للقطع الناقص النظير لقطع ل ر م. فإن كان قطر القطع الناقص قطرًا لا سهمًا، فينبغي أن نجعل زيادة الخط الأعظم على الخط الأصغر النظيرة لخط ل ش مما يلي طرف القطر الذي يكون الخط الذي يخرج منه مماسًا للقطع يحيط مع ‹قطر› القطع بزاوية حادة، ليكون الطرف الآخر من القطر طرفًا لقاعدة قطعة الدائرة ‹ويكون الخط المماس لقطعة الدائرة› على هذا الطرف الآخر يقع في داخل القطع الناقص لأنه يحيط مع قاعدة القطعة بزاوية حادة، لأن القطعة في القطع الناقص تقبل زاوية منفرجة وهي في القطع الزائد تقبل زاوية حادة. والمماس للقطع الناقص على هذا الطرف يحيط مع قاعدة القطعة بزاوية منفرجة. فيلزم من ذلك أن يكون هذا الطرف من القطعة في داخل القطع الناقص. والطرف الآخر من القطعة الذي هو طرف الخط الأعظم خارجًا عن القطع، فتكون القطعة قاطعة لمحيط القطع. وتبين من ذلك أن القطعة تقطع محيط القطع الناقص على نقطة واحدة، فتكون المسألة تتم مرة واحدة.

1 ‹إلى›: في [ح] – 2 ف ن: فن – 4 ن د (الأولى): ب د – 9 ‹إلى›: في [ح] – 10 والله أعلم: ربما زاد الناسخ هذه العبارة آليا عند النقل، فمن نهجه لا ينهي البرهين بمثلها، لا في هذا الكتاب ولا في كتبه الأخرى – 17 النظيرة: نظيرة – ل ش: لش – 19 ‹ويكون ... الدائرة›: في [ح].

فإن كان القطر سهمًا وكان السهم الأقصر، فإن القطعة تكون نصف دائرة ويكون الخط المماس للقطعة مماسًا للقطع أيضًا. فإن كان الوتر الذي يفصل / من هذه الدائرة ١٣-و قطعة تقبل زاوية مساوية للزاوية التي تحدث عند طرف السهم الأصغر التي يحيط بها الخطان الخارجان من طرفي السهم الأعظم مساويًا للسهم الأعظم، فإن محيط القطعة يمرّ بطرف السهم الأعظم والطرف الآخر من القطعة خارجًا عن القطع؛ فالمسألة تتم.

وإن كان هذا الوتر أصغر من السهم الأعظم، فإن القطعة تقطع سهم القطع في داخل القطع، فهي تقطع محيط القطع في الجهة التي تلي الطرف الخارج، ‹و›ليس تقطعه في الجهة التي تلي المماس، لأن كل دائرة تعمل على هذا القطر. ويكون الوتر الذي حددناه فيها أصغر من السهم الأعظم وتكون الدائرة أعظم من الدائرة الأولى، فهي تماس الدائرة الأولى من خارجها وتماس القطع من داخله، فالقطعة التي هي نصف دائرة تقطع القطع على نقطة واحدة، فالمسألة تتم مرة واحدة.

وإن كان هذا الوتر أعظم من السهم الأعظم، فليس تتم المسألة في القطع الناقص، لأن قطعة الدائرة تماس القطع على طرف السهم وتقطع السهم الأعظم خارج القطع وطرفها الآخر خارج القطع؛ فيكون جميع القطعة خارج القطع. فليس تقطع محيط القطع، فليس تتم المسألة.

وإن كان قطر القطع هو السهم الأعظم، فليس تتم المسألة أيضًا لأن جميع القطعة يقع خارج القطع.

فأما إن كان خطا $\overline{\text{هـ ز}}$ متساويين، فطريق العمل هو أن نخرج سهم القطع الزائد والناقص، فهو يقطع خط $\overline{\text{ب د}}$ المماس. فإن قطعه على نقطة غير نقطة $\overline{\text{ب}}$، فنخرج من نقطة التقاطع خطًا آخر مماسًا للقطع، فيكون مساويًا للأول، فقد تمت المسألة.

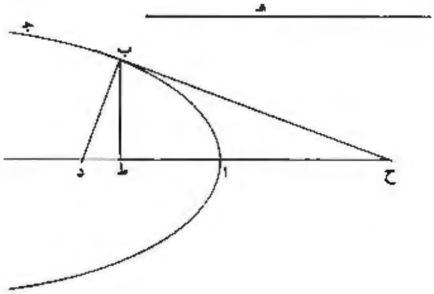
فإن كان السهم يمرّ بنقطة $\overline{\text{ب}}$، فليس يخرج خط آخر يماس القطع ويكون مساويًا لما يفصله من خط $\overline{\text{ب د}}$؛ وذلك أن القطر الذي يخرج إلى موضع التقاء ‹الخطين› المتماسين هو يقسم الخط الذي يصل بين نقطتي التماس بنصفين – لأن ذلك يتبين من عكس الشكل التاسع والعشرين والثلاثين من المقالة الثانية من كتاب *المخروطات*– وليس يكون هذا القطر عمودًا على الخط الواصل بين نقطتي التماس لأنه ليس هو السهم، فليس يكون

2 يفصل: يفضل – 5 لآخر: لاخير – 7 ‹و›: في [ح] – 9 تماس: تمام – 16 القطعة: القطع – 18 خطا: خطًا ؛ فطريق: بطريق – 19 قطعه: قطعة / فنخرج: اخرج – 22 يفصله: يفضله.

الخطان المتماسان متساويين. فإذا كان خطا هـ ز متساويين، فليس تتم المسألة إلا إذا كانت نقطة ب خارجة عن السهم. فقد استوفينا تحديد هذه المسألة؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

‹يد› إذا كان قطع مكافئ معلومًا، كيف نخرج خطًا يماسه وينتهي إلى سهمه ويكون مساويًا لخط مفروض.

فليكن القطع ا ب جـ، وسهمه ا د وخط هـ مفروض. ونريد أن نخرج خطًا يماس القطع ويكون ما ينتهي منه إلى السهم مساويًا لخط هـ.

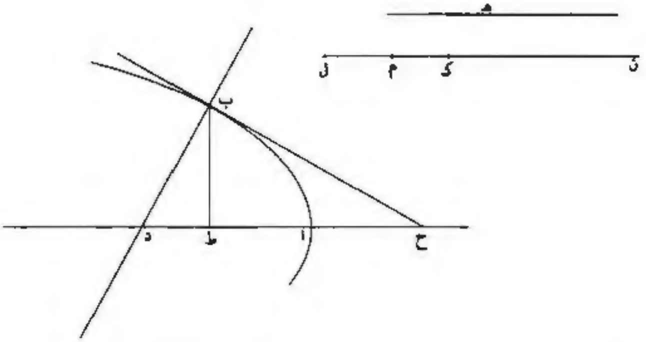


فنفرض ذلك على جهة التحليل: وليكن خط ب ح، ونخرج ب ط على الترتيب ونجعل زاوية ح ب د / قائمة. فيكون ضرب د ح في ح ط مثل مربع ب ح ويكون ضرب د ط في ط ح مثل مربع ب ط. وب ط على الترتيب وب ح مماس، فخط ح ا مثل خط ا ط، كما تبين في شكل له من المقالة الأولى. وضرب الضلع القائم للسهم في ا ط مثل مربع ب ط، فخط د ط هو نصف الضلع القائم للسهم. والضلع القائم للسهم معلوم، فخط د ط معلوم وضرب د ح في ح ط مثل مربع ح ب. وح ب معلوم، فضرب د ح في ح ط معلوم. ود ط معلوم، فخط ح ط معلوم. ونقطة ا معلومة، فنقطة ح معلومة. وقد خرج منها خط ح ب مماس للقطع، فنقطة ب معلومة، لما تبين في شكل نا من المقالة الثانية. ١٣-ظ

‹يه› وتركيب هذه المسألة يكون هكذا: نعيد القطع والخط المفروض؛ وليكن الضلع القائم لسهم القطع كـ ل ونقسمه بنصفين على نقطة م. ونجعل ضرب م ن في ن كـ مثل مربع هـ. ونجعل ا ح مثل نصف كـ ن ونخرج من نقطة ح خطًا مماسًا للقطع، وليكن ح ب.

فأقول: إن ح ب مثل هـ.

3 معلومًا: معلوم – 5 وسهمه: وسهم – 12 د ح (الأولى): د ط – 14 ب: ا / الثانية: الثالثة؛ انظر التعليق – 17-16 م ن ... نصف: مكررة.

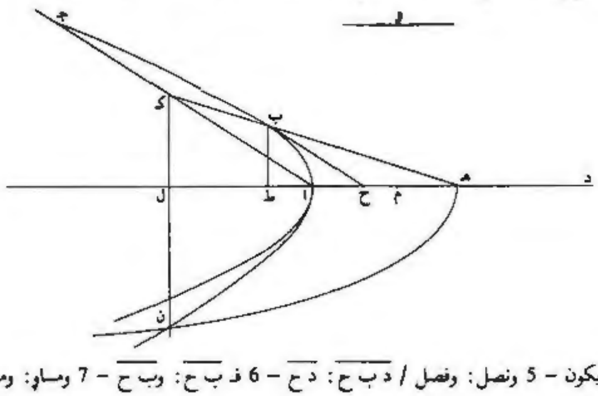


برهانه: أنا نخرج ب ط على الترتيب، فيكون ط ا مثل ا ح، فيكون ط ح مثل ك ن. ونجعل ط د مثل م ك، فيكون ضرب د ح في ح ط مثل ضرب م ن في ن ك، فيكون ضرب د ح في ح ط مثل مربع هـ. فلأن د ط مثل نصف الضلع القائم، يكون ضرب د ط في ط ا مرتين مثل مربع ط ب، فضرب د ط في ط ح مثل مربع ط ب. ونصل د ب، فيكون زاوية د ب ح قائمة، فيكون ضرب د ح في ح ط مثل مربع ح ب. وضرب د ح في ح ط مثل مربع هـ، فخط ب ح مثل خط هـ، فـ ب ح مماس للقطع ومساوٍ لخط هـ؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.

وهذه المسألة لا تحتاج إلى تحديد لأنها تتم على تصاريف الأحوال.

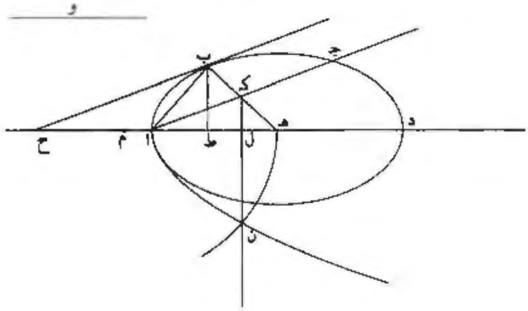
– يو – إذا كان قطع زائد أو ناقص معلومًا، كيف نخرج خطًا يماس القطع وينتهي إلى سهمه ويكون مساويًا لخط معلوم.

فليكن القطع ا ب جـ وسهمه ا د ومركزه هـ وليكن خط و معلومًا. ونريد أن نخرج خطًا يماس القطع وينتهي إلى السهم ويكون مساويًا لخط و المعلوم.



1 فيكون: ويكون – 5 ونصل: وفصل / د ب ح: د ح – 6 فـ ب ح: وب ح – 7 ومساو: ومساويًا – 9 زائد أو: زايدًا و – 11 ومركزه: ومركز.

فنفرض ذلك / على جهة التحليل: وليكن ب ح. ونخرج ب ط على الترتيب ١٤-و ونخرج من نقطة آ خط ا جـ موازيًا للمماس. ونصل هـ ب وننفذه حتى يلقى ا جـ، وليلقه على نقطة كـ. ونخرج كـ ل على الترتيب، ونجعل نسبة هـ م إلى م ا كنسبة د ا إلى ضلعه القائم، فيكون م ا نصف الخط الشبيه وتكون نسبة ضرب م ل في ل ا إلى مربع ا كـ كنسبة م هـ إلى هـ ا. ولأن ب ح معلوم وا هـ معلوم، يكون ضرب ا هـ في ب ح معلومًا. وضرب ا هـ في ب ح مثل ضرب كـ ا في ح هـ، لأن نسبة كـ ا إلى ب ح كنسبة ا هـ إلى هـ ح، فضرب كـ ا في هـ ح معلوم. وقد تبين من قبل أن نسبة ط هـ إلى هـ ا كنسبة ا هـ إلى هـ ح وضرب ط هـ في هـ ح مثل مربع ا هـ المعلوم، فنسبة ضرب كـ ا في هـ ح إلى ضرب ط هـ في هـ ح معلومة وهي كنسبة كـ ا إلى ط هـ. ونسبة ضرب م ل في ل ا إلى مربع كـ ا كنسبة م هـ إلى هـ ا، فنسبة ضرب م ل في ل ا إلى مربع ط هـ كنسبة م هـ إلى خط نسبته إلى ا هـ معلومة. وقد تبين أيضًا من قبل أن نسبة



ل هـ إلى هـ ط كنسبة ط هـ إلى هـ ا، فضرب ل هـ في هـ ا مثل مربع هـ ط. فنسبة ضرب م ل في ل ا إلى ضرب ل هـ في هـ ا نسبة معلومة. ونرسم على نقطة هـ ‹القطع› المكافئ الذي سهمه هـ ل وضلعه القائم هـ ا؛ وليكن قطع هـ ن. ونخرج كـ ل على استقامة حتى يلقاه؛ وليلقه على نقطة ن. ونرسم على نقطة آ القطع الزائد الذي سهمه م ا وضلعه القائم ‹هو› الذي نسبة م ا إليه مؤلفة من نسبة م هـ إلى هـ ا ومن نسبة مربع ح ب إلى مربع هـ ا؛ وليقطع قطع هـ ن على نقطة ن. فإما أنه يقطعه أو لا يقطعه، فإنا

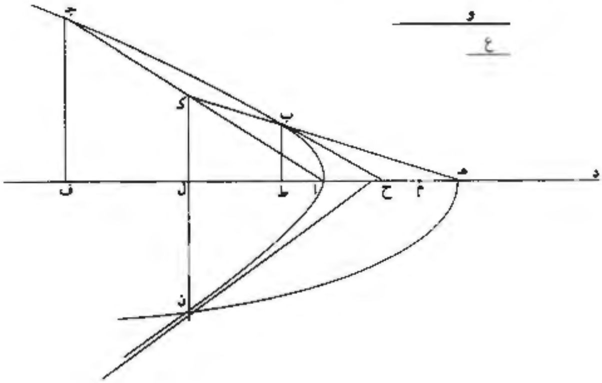
2 خط ا جـ: خطا آخر / ونصل: وفصل – 4 م ل: ب ل – 5 في ب ح: و ب ح – 6 في ب ح: و ب ح – 8 ا هـ: ا ح – 9 هـ ح (الثانية): هـ ط – 10 كنسبة: لنسبة – 11 ا هـ: هـ – 12 مثل: مكررة – 13 ‹القطع›: في [ح] – 16 م ا (الأولى): م ا د – 17 فإما: اما / أو لا: اولاً.

نبينه من بعد. فتكون نقطة ن على تقاطع قطعين معلومي الوضع، فنقطة ن معلومة. ون ل عمود، فنقطة ل معلومة وخط ن ل معلوم الوضع، وقد خرج على استقامة، فخط ل ك معلوم الوضع، وا ك مثل ك جـ، فخط ا جـ معلوم الوضع، لأنا إذا فصلنا من السهم مثل ا ل وأخرجنا من موضع الفصل خطًا على الترتيب، انتهى إلى نقطة جـ، فتكون نقطة جـ معلومة، فيكون خط ا جـ معلوم الوضع. وخط ل ك معلوم الوضع، فنقطة ك معلومة ونقطة هـ معلومة، فخط هـ ك معلوم / الوضع، وقطع ا ب جـ معلوم الوضع، فنقطة ب معلومة وخط ب ح مماس. ١٤-ظ

فقد انتهى التحليل إلى أن نخرج من نقطة معلومة على محيط القطع خطًا مماسًا.

– يز – وتركيب هذه المسألة يكون كما نصف.

ليكن القطع ا ب جـ وسهمه ا د ومركزه هـ، وخط و مفروض. ونريد أن نخرج خطًا يماس القطع وينتهي إلى السهم ويكون مساويًا لخط و.

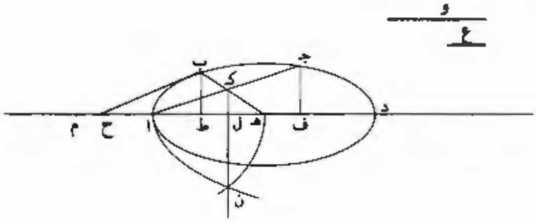


فنجعل نسبة هـ م إلى م ا كنسبة د ا إلى ضلعه القائم، فيكون خط م ا نصف الخط الشبيه. ونجعل نسبة خط م ا إلى خط ع مؤلفة من نسبة م هـ إلى هـ ا ومن نسبة مربع و إلى مربع هـ ا. ونرسم على نقطة ا القطع الزائد ‹الذي› سهمه المجانب م ا وضلعه القائم ع؛ وليكن قطع ا ن. ونرسم على نقطة هـ القطع المكافئ الذي سهمه هـ ا وما يتصل به وضلعه القائم ا هـ؛ فهو يقطع قطع ا ن، فليقطعه على نقطة ن، وليكن قطع هـ ن. فإما

2 استقامة فخط: انه قامه بخط – 6 معلوم (الأولى): كررها في الورقة السابقة – 9 نصف: وصف – 10 ونريد: ونزيد – 13 خط (الأولى): سهم – 14 ‹الذي›: في [ح] – 16 فليقطعه: فلقطعه.

أنه يقطعه أو لا يقطعه، فإنا نبينه من بعد. ونخرج من نقطة ن عمود ن ل، فتكون نقطة ل في داخل قطع ا ب جـ الزائد؛ وذلك أنها في داخل قطع ا ن وسهم القطعين خط واحد. فأما في القطع الناقص، فإن نقطة ل فيما بين نقطتي هـ ا؛ وذلك أن سهم ا هـ مشترك لقطعي ا ن هـ ن. ونجعل ل ف مثل ل ا، ونخرج ف جـ على الترتيب ونصل ا جـ، ونخرج ن ل على الاستقامة وليلق خط ا جـ على نقطة ك. ونصل هـ ك؛ وليقطع محيط القطع على نقطة ب. ونخرج من نقطة ب خط ب ح مماسًا للقطع.

فأقول: إن خط ب ح مثل خط و.



برهان ذلك: أنا نخرج ب ط على الترتيب، فيكون ضرب ل هـ في هـ ا مثل مربع هـ ط، وضرب ل هـ في هـ ا مثل مربع ن ل، ‹فخط ن ل› مثل خط هـ ط. ونسبة ضرب م ل في ل ا إلى مربع ل ن كنسبة م ا إلى خط ع التي هي نسبة مؤلفة من نسبة م هـ إلى هـ ا ومن نسبة مربع و إلى مربع هـ ا، فنسبة ضرب م ل في ل ا إلى مربع هـ ط مؤلفة من نسبة م هـ إلى هـ ا ومن نسبة مربع و إلى مربع هـ ا. ونسبة ضرب م ل في ل ا إلى مربع هـ ط مؤلفة من نسبة ضرب م ل في ل ا إلى مربع ا ك ومن نسبة مربع ا ك إلى مربع هـ ط. ونسبة ضرب م ل في ل ا إلى مربع ا ك كنسبة م هـ إلى هـ ا، فتبقى نسبة مربع / ا ك إلى مربع هـ ط كنسبة مربع و إلى مربع هـ ا، فنسبة ا ك إلى هـ ط كنسبة و إلى هـ ا. فنسبة ضرب ا ك في هـ ح إلى ضرب ط هـ في هـ ح كنسبة و إلى هـ ا. وضرب ا ك في هـ ح مثل ضرب ب ح في ا هـ، ‹فنسبة ضرب ب ح في ا هـ› إلى ضرب ط هـ في هـ ح كنسبة و إلى هـ ا. وضرب ط هـ في هـ ح هو مربع هـ ا، فنسبة ضرب ب ح في ا هـ إلى مربع ا هـ كنسبة و إلى هـ ا. ونسبة ضرب ب ح ١٥-و

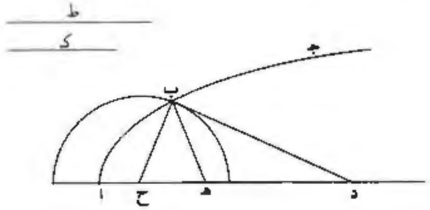
2 أنها: انهما – 4 ونصل: وفصل – 5 ن ل: ن ك – 6 القطع: الدائرة / ونخرج من نقطة ب: أثبتها في الهامش / خط: خطًا – 9 مثل: من / ‹فخط ن ل›: في [ح] – 10 ل ن: لر – 16 إلى ضرب ط هـ إلى هـ ح: مكررة – 17-18 ‹فنسبة ... ا هـ›: في [ح] – 19 و: هـ.

في ا هـ إلى مربع ا هـ هي نسبة ب ح إلى ا هـ، فنسبة ب ح إلى ا هـ هي نسبة و إلى ا هـ، فخط ب ح مثل خط و؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وتحديد هذه المسألة هو أن قطعي ا ن هـ ن يتقاطعان على كل حال. أما في القطع الناقص، فهو بيّنٌ لأن مقعريهما متقابلان وسهمهما مشترك. وأما في القطع الزائد، فإن الخط الذي لا يقع على القطع الذي يخرج من مركز القطع الذي هو وسط خط م ا، هو يقطع قطع هـ ن المكافئ ويخرج عنه، ثم يبعد عنه بلا نهاية. وقطع ا ن الزائد يقرب أبدًا من الخط الذي يقع عليه ‹قطع هـ ن›، فهو يقطع قطع هـ ن المكافئ قبل أن يقرب من الخط الذي لا يقع عليه. فالقطعان يتقاطعان لا محالة وهما يتقاطعان في الجهة الواحدة على نقطة واحدة. فالمسألة تتم على تصاريف الأحوال بغير اشتراط وتتم في الجهة الواحدة مرة واحدة فقط؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

– يح – إذا كان قطع صنوبري معلومًا وفرض على سهمه نقطتان، كيف نخرج من تينك النقطتين خطين يلتقيان على محيط القطع وتكون نسبة أحدهما إلى الآخر مثل نسبة / مفروضة. ١٥ - ظ

فليكن القطع ا ب جـ وسهمه د ا هـ والنقطتان د هـ والنسبة المفروضة نسبة ط إلى ك. ونريد أن نخرج من نقطتي د هـ خطين يلتقيان على محيط القطع وتكون نسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة ط إلى ك.



فنفرض ذلك على جهة التحليل: وليكونا خطي د ب هـ ب. ونجعل زاوية د ب ح مثل زاوية ب هـ ح، فيكون مثلثا ح ب هـ د ح ب متشابهين، فتكون نسبة د ح إلى ح ب كنسبة ب ح إلى ح هـ وكنسبة د ب إلى ب هـ. فنسبة د ح إلى ح هـ كنسبة مربع د ح إلى مربع ح ب وكنسبة مربع د ب إلى مربع ب هـ. فنسبة د ح إلى ح هـ كنسبة

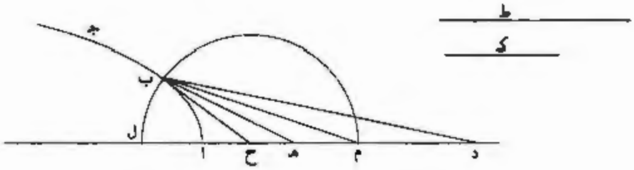
5 من: مكررة – 8 فالقطعان: والقطعان – 11 معلومًا: معلوم – 17 فنفرض: فبقى من – 20 ح ب: ب / ب هـ: فط.

مربع ط إلى مربع ك المعلومة. فنقطة ح معلومة، وضرب د ح في ح هـ معلوم. وضرب د ح في ح هـ مثل مربع ح ب، فخط ح ب معلوم؛ ونقطة ح معلومة، فنقطة ب معلومة لأن نقطة ب على محيط دائرة معلومة مركزها ح ونصف قطرها معلوم، وهي على محيط القطع الذي هو معلوم الوضع.

فقد انتهى التحليل إلى وجود نقطة معلومة هي النقطة التي عليها يلتقي الخطان المطلوبان؛ وهو المطلوب.

– يط – وتركيب هذا يكون هكذا: ليكن القطع ا ب جـ والنسبة نسبة ط إلى ك. ونجعل نسبة د ح إلى ح هـ كنسبة مربع ط إلى مربع ك ونجعل ضرب د ح في هـ ح مثل مربع ح م. ونجعل ح مركزًا وندير ببعد ح م دائرة، ولتقطع محيط القطع على نقطة ب، ولتكن دائرة ل ب م. ونصل د ب ب هـ.

فأقول: إن نسبة د ب إلى ب هـ كنسبة ط إلى ك.



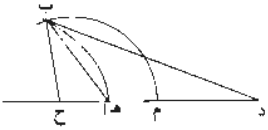
برهانه: أنا نصل / ح ب، فيكون ضرب د ح في هـ ح مثل مربع ح ب، فتكون ١٦-و
نسبة د ح إلى ح ب كنسبة ب ح إلى ح هـ، فيكون مثلثا د ح ب ح ب هـ متشابهين، فتكون نسبة د ب إلى ب هـ كنسبة د ح إلى ح ب. فنسبة مربع د ب إلى مربع ب هـ كنسبة مربع د ح إلى مربع ب ح. ونسبة مربع د ح إلى مربع ح ب كنسبة د ح إلى ح هـ، التي هي كنسبة مربع ط إلى مربع ك، فنسبة د ب إلى ب هـ كنسبة ط إلى ك؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وأما تحديد هذه المسألة، فيكون كما نصف.

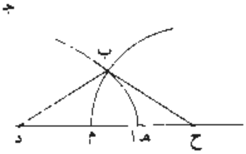
أما إذا كان ط أعظم ‹من ك› وكانت إحدى النقطتين هي رأس القطع والأخرى خارجة من القطع كما في الصورة الأولى، فإن المسألة تتم على كل حال بغير اشتراط،

13 ح ب: ح ط / ب ح: ب د – 16 ط (الثانية): هـ – 20 بغير: بعد، ثم صححها عليها.

لأن نقطة ح تكون في داخل القطع ونقطة م تكون خارجة ‹من› القطع ويكون مقدم النسبة يلي خارج القطع.

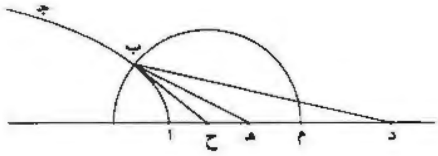


فإن كانت النقطتان إحداهما رأس القطع والأخرى في داخل القطع كما في الصورة الثانية، فإن المسألة أيضا تتم على كل حال. لأن نقطة ح تكون خارجة من القطع ونقطة م تكون في داخل القطع ويكون مقدم النسبة يلي داخل القطع.



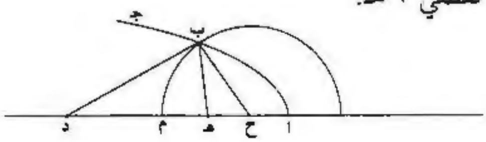
فإن كانت النقطتان خارج القطع كما في الصورة الثالثة، فليس تتم المسألة إلا بزيادة شرط وهو أن تكون نسبة د ه إلى ه ا ليست بأصغر من النسبة المفروضة. لأنا إذا جعلنا نسبة د ح إلى ح ه كنسبة مربع ط إلى مربع ك. كانت نقطة ح إما في / داخل القطع ١٦ ظ وإما على محيط القطع وإما خارج القطع. ونقطة م أبدا فيما بين نقطتي د ه. فإن كانت نقطة ح في داخل القطع أو على محيط القطع، فهو بيّنٌ أن المسألة تتم لأنه يكون مركز الدائرة في داخل القطع أو على محيط القطع ومحيط الدائرة خارج القطع، فالدائرة تقطع القطع. فإن كانت نقطة ‹ح› خارج القطع، فهي فيما بين نقطتي ه ا. إذا كان مقدم النسبة يلي نقطة د. ونسبة د ه إلى ه ا ليست بأصغر من نسبة ط إلى ك. فتكون نسبة د ح إلى ح ا أعظم من نسبة ط إلى ك. فتكون نسبة د ح إلى ح م أصغر من نسبة د ح إلى ح ا. فيكون خط ح م أعظم من خط ح ا. فتكون الدائرة التي مركزها ح ونصف قطرها ح م تقطع القطع، فتتم المسألة.

1 ‹من›: في [ح] – 8 ظ: هـ – 9 على: في – 11 فالدائرة: والدائرة – 12 ‹ح›: في [ح] – 16 فتتم: ويتم.



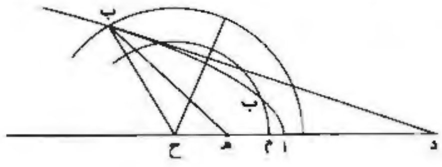
فإن كان مقدم النسبة يلي نقطة هـ وهو الأعظم، فليس تتم المسألة بوجه لأن نقطة ح تكون أبعد من القطع من نقطة د وتكون نقطة م فيما بين نقطتي د هـ.

فإن كانت النقطتان داخل القطع كما في الصورة الرابعة، فإن تحديد هذه الصورة مثل تحديد الصورة الثالثة، وهو أن نقطة ح إما أن تكون خارج القطع وإما على محيط القطع وإما فيما بين نقطتي ا هـ.



فإن كانت نقطة ح إما خارج القطع ‹وإما على محيط القطع›، فإن المسألة تتم على كل حال، وإن كانت نقطة ح فيما بين نقطتي هـ ا، فتحديد المسألة هو أن تكون نسبة د هـ إلى هـ ا ليست بأصغر من نسبة ط إلى ك ويكون مقدم النسبة داخل القطع.

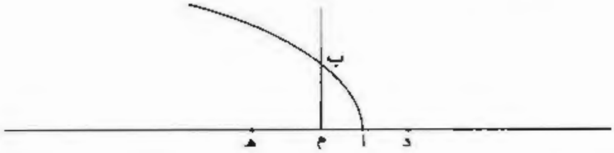
وإن كانت النقطتان إحداهما خارج القطع والأخرى في داخل القطع كما في الصورة الخامسة، فتحديد هذه المسألة هو ‹إما› أن يكون خط ح ا أصغر من خط ح م ويكون مقدم النسبة مما يلي داخل القطع، وإما أن يكون ح م ليس بأصغر من الخط الأقصر الذي يخرج من نقطة ح إلى القطع ويكون مقدم النسبة مما يلي خارج القطع.



وإن كان ط ك متساويين، فتحديد هذه المسألة هو أن تكون النقطتان في داخل القطع، ‹أو تكون إحداهما في داخل القطع› والأخرى على محيط القطع، أو تكون

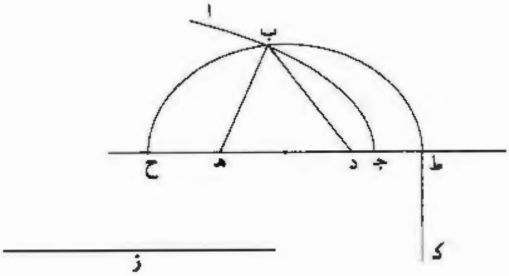
2 دَ (الأولى): د هـ – 6 ‹وإما ... القطع›: في [ح] – 11 داخل: خارج / ح م: ح ا – 12 خارج: داخل – 14 ‹أو ... القطع›: في [ح].

إحداهما في داخل القطع والأخرى خارج القطع، ويكون الذي في داخل القطع من خط د هـ أعظم من نصف د هـ. وهو بيّنٌ أن المسألة تتم على هذه الوجوه الثلاثة؛ وهذا تحديد جميع أوضاع هذه المسألة؛ وذلك ما أردنا أن نبين.



– كـ – إذا كان قطع صنوبريّ معلومًا، وفرض على سهمه نقطتان، كيف نخرج من تينك النقطتين خطين يلتقيان على محيط القطع ويكون مجموعهما مساويًا لخط مفروض.

فليكن القطع ا ب جـ والنقطتان د هـ والخط المفروض ز. ونريد أن / نخرج من ١٧-و
نقطتي د هـ خطين يلتقيان على محيط القطع ويكون مجموعهما مثل خط ‹ز›.



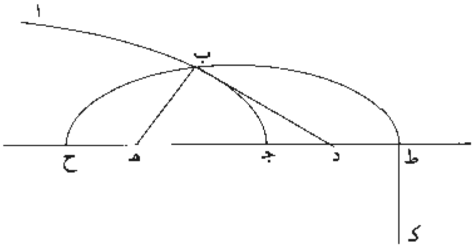
فنفرض ذلك على جهة التحليل: وليكونا خطي د ب هـ ب. ونجعل كل واحد من هـ ح د ط مثل نصف زيادة ز على خط د هـ، ونجعل ضرب ح ط في ط ك أربعة أمثال ضرب ح د في د ط. ونرسم على نقطتي ح ط القطع الناقص الذي سهمه ح ط وضلعه القائم ط ك، فهو يمرّ بنقطة ب كما تبين في شكل نب من المقالة الثالثة، فليكن ذلك القطع قطع ح ط ب. وخط د هـ معلوم القدر والوضع، فخط ح ط معلوم القدر وضرب ح د في د ط معلوم القدر، فخط ط ك معلوم القدر وقطع ح ط ب معلوم الوضع؛ وقطع ا ب جـ معلوم الوضع، فنقطة ب معلومة. فقد انتهى التحليل إلى وجود نقطة معلومة؛ وهي التي تعمل المسألة.

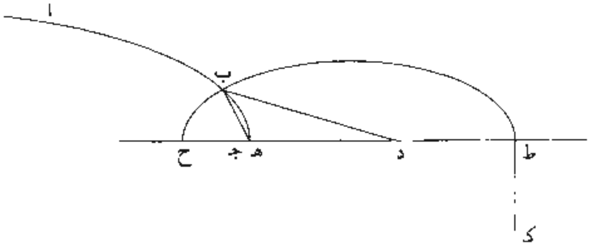
4 معلومًا: معلوم – 7 ‹ز›: في [ح] – 9 مثل: أقل – 11 ب: ر.

– كا – وتركيب هذه ‹المسألة› بأن ننقص من ز ‹مثل خط د هـ›، فما بقي نأخذ نصفه، ونضيف إلى د هـ مثل النصفين عن د هـ وليكونا هـ ح د ط، فيكون ح ط مثل ز. ونجعل ضرب ح ط في ط ك مثل ضرب ح د في د ط أربع مرات، ونرسم على خط ح ط القطع الناقص الذي سهمه ح ط وضلعه القائم / ط ك؛ وليقطع قطع ا ب جـ ١٧ – ظ على نقطة ب. فإما أنه يقطعه أو لا يقطعه، فإنا نبينه من بعد. ونصل د ب ب هـ، فيكون مجموعهما مثل خط ح ط كما تبين في شكل نب من المقالة الثالثة. وح ط مثل خط ز، فخطا د ب ب هـ مثل خط ز؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

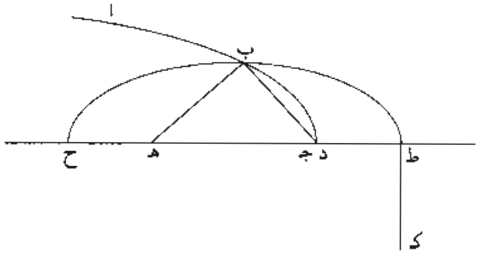
فأما تحديد هذه المسألة، فإنه يكون كما أصف. وذلك أنه يجب أن يكون خط ز في جميع الأوضاع أعظم من خط د هـ.

فإن كانت إحدى نقطتي د هـ خارج القطع والأخرى في داخل القطع، أو كانت إحدى النقطتين خارج القطع والأخرى على رأس القطع، أو كانت إحداهما في داخل القطع والأخرى على رأس القطع، فإن المسألة تتم على كل حال من غير زيادة شرط، لأنه يعرض من ذلك أن تكون نقطتا ح ط إحداهما في داخل القطع والأخرى خارج القطع، فيكون القطع الناقص يقطع القطع المفروض على كل حال.

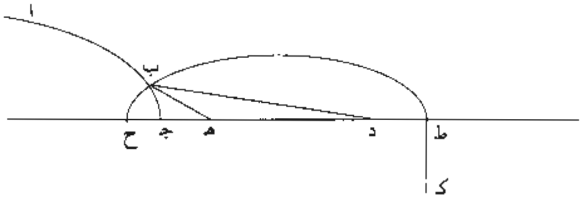




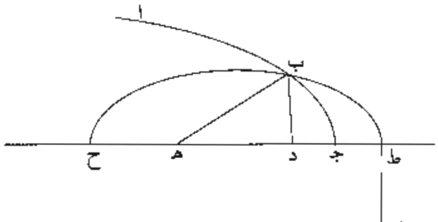
1 المسألة: في [ج] – ننقص من ز: ينقص من ز – ‹مثل د هـ›: في [ج] – 2 هـ ح د ط: ح ط – 4 القائم: كررها في الورقة السابقة – 5 ونصل: فنصل – 6 نب: لب – 7 ب هـ: د هـ – 13 من: أثبتها تحت السطر.



فإن كانت نقطتا د هـ جميعًا خارج القطع، وكان الخط الذي بين أقربهما من القطع وبين رأس القطع أصغر من نصف زيادة خط ز على خط د هـ، فإن المسألة أيضًا تتم من غير زيادة شرط، لأن أحد طرفي ‹سهم› القطع الناقص يكون في داخل القطع والطرف الآخر خارجه. فإن كان الخط الذي بين رأس القطع وبين أقرب النقطتين إليه ليس بأصغر من نصف زيادة خط ز على خط د هـ، فإن المسألة لا تتم لأن جميع القطع الناقص يقع خارجًا عن القطع.



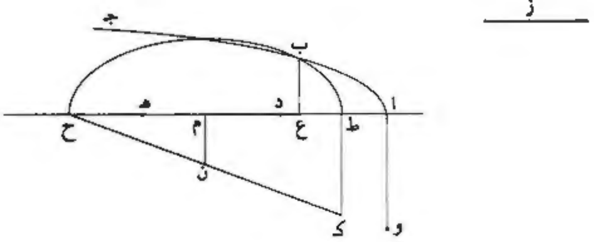
وإن كانت نقطتا د هـ جميعًا في داخل قطع ا ب جـ، وكان الخط الذي بين رأس القطع وبين أقرب النقطتين إليه أصغر من نصف زيادة خط ز على خط د هـ، فإن المسألة أيضًا تتم من غير زيادة شرط، لأنه يصير أحد طرفي سهم القطع الناقص خارج القطع والآخر في داخله.



3 ‹سهم›: في [ح] – 8 القطع: الخط – 10 والآخر: والاخرى.

- كب - وإن كانت نقطتا د هـ في داخل قطع ا ب جـ، وكان الخط الذي بين رأس القطع وبين أقرب النقطتين إليه ‹ليس› بأصغر من نصف زيادة خط ز على خط د هـ، فإن المسألة لا تتم إلا بزيادة شرط. وذلك الشرط هو إن كان القطع المفروض قطعًا مكافئًا، فتكون نسبة مربع نصف قطر القطع الناقص إلى ضرب الخط الذي بين مركز القطع الناقص وبين رأس القطع المكافئ في الضلع القائم للقطع المكافئ ليست بأصغر من نسبة قطر القطع الناقص إلى ضلعه القائم.

ولنعد الشكل، ونقسم خط ح ط بنصفين على نقطة م، ونصل ح ك ونخرج م ن موازيًا لـ ط ك؛ وليكن الضلع القائم للقطع المكافئ و ا.

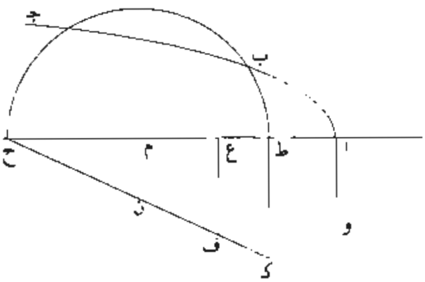


فإن كانت نسبة مربع ح م إلى ضرب م ا في و ا كنسبة ح ط إلى ك ط، فإن نسبة مربع ح م إلى ضرب م ا في و ا كنسبة ح م إلى م ن. ونسبة ح م إلى م ن كنسبة ضرب ح م في م ط إلى ضرب م ن في م ط، فنسبة مربع ح م إلى ضرب م ن في م ط كنسبة مربع ح م إلى ضرب م ا في و ا، فضرب م ن في م ط مثل ضرب / م ا في و ا. ١٨-و
وضرب م ن في م ط هو مربع خط الترتيب الذي يخرج من نقطة م إلى محيط القطع الناقص، وضرب م ا في و ا هو مربع خط الترتيب الذي يخرج من نقطة م إلى محيط القطع المكافئ، فخط الترتيب الذي يخرج من نقطة م إلى محيط القطع المكافئ ‹مساوٍ لخط الترتيب الذي يخرج من نقطة م إلى محيط القطع الناقص›. فالقطع الناقص يلقى القطع المكافئ على طرف لخط الترتيب الذي يخرج من نقطة م الذي هو السهم القائم.

وإن كانت نسبة مربع ح م إلى ضرب م ا في و ا أعظم من نسبة ح ط إلى ط ك، فنسبة بعض مربع ح م إلى ضرب م ا في و ا كنسبة ح ط إلى ط ك؛ فليكن ذلك

2 ‹ليس›: في [ح] – 4 نصف: أثبتها في الهامش – 5 رأس: مركز – 8 و ا: و – 12 و ا (الأولى والثانية): و – 14 وضرب: مضرب / و ا: و – 15 فخط: بخط – 17 لخط: بخط – 18 و ا: و – 19 و ا: و.

البعض ضرب ح ع في ع ط. فتكون نسبة ضرب ح ع في ع ط إلى ضرب م ا في و ا كنسبة ح ط إلى ط ك. ونخرج عمود ع ف، فتكون نسبة ضرب ح ع في ع ط ‹إلى ضرب ع ف في ع ط› كنسبة ح ط إلى ط ك. فتكون نسبة ضرب ح ع في ع ط إلى ضرب م ا في و ا كنسبة ضرب ح ع في ع ط إلى ضرب ف ع في ع ط، فضرب ف ع في ع ط مثل ضرب م ا في و ا. وضرب م ا في و ا أعظم من ضرب ع ا في و ا. فضرب ف ع في ع ط أعظم من ضرب ع ا في و ا. وضرب ف ع في ع ط هو مربع خط الترتيب الذي يخرج من نقطة ع إلى محيط القطع الناقص وضرب ع ا في و ا هو مربع خط الترتيب الذي يخرج من نقطة ع إلى محيط القطع المكافئ. فخط الترتيب الذي يخرج من نقطة ع إلى محيط القطع الناقص أعظم من خط الترتيب الذي يخرج من نقطة ع إلى محيط القطع المكافئ. فالقطع المكافئ يقطع خط ترتيب القطع الناقص الذي يخرج من نقطة ع في داخل القطع الناقص، فهو يقطع محيط القطع الناقص قبل أن يقطع خط الترتيب. فإذا كان يقطع محيط القطع الناقص قبل أن يقطع خط الترتيب، فهو يقطعه على نقطة أخرى بعد خط الترتيب.



وأقول أيضًا: إن القطع المكافئ إذا كان يلقى القطع الناقص على طرف السهم القائم، فإنه يقطع القطع الناقص على نقطة أخرى قبل طرف السهم القائم.

وبرهان ذلك: أنا نجعل ضرب ا م في م ع مثل مربع م ط، فتكون نسبة ا م إلى م ع كنسبة مربع م ط إلى مربع م ع. فإذا قلبنا ‹وركبنا› النسبة، كانت نسبة م ا إلى ا ع كنسبة مربع م ط، الذي هو ضرب ح ه في ه ط، إلى ضرب ح ع في ع ط. ونسبة م ا إلى

1 و ا: و – 4 و ا: و / ف ع في ع ط: ف ع ط – 5 و ا (الأولى والثانية والثالثة): و – 6 ف ع في ع ط: ف ع ط / و ا: و – 7 و ا: و – 8 القطع: القاطع – 14 يلقى: يلى – 15 فإنه ... القائم: أثبتها في الهامش – 16 مربع: ضرب.

ا ع كنسبة مربع خط الترتيب الذي يخرج من نقطة ‹م› إلى محيط القطع المكافئ إلى مربع خط الترتيب الذي يخرج من نقطة ع إلى محيط القطع المكافئ. ونسبة / ضرب ح م في م ط إلى ضرب ح ع في ع ط كنسبة مربع خط الترتيب الذي يخرج من نقطة م إلى محيط القطع الناقص إلى مربع خط الترتيب الذي يخرج من نقطة ع إلى محيط القطع الناقص. فنسبة خط الترتيب الذي يخرج من نقطة م إلى محيط القطع الناقص ‹إلى خط الترتيب الذي يخرج من نقطة م إلى محيط القطع المكافئ› كنسبة خط الترتيب الذي يخرج من نقطة ع إلى محيط القطع الناقص ‹إلى خط الترتيب الذي يخرج من نقطة ع إلى محيط القطع المكافئ›. وخط الترتيب الذي يخرج من نقطة م إلى محيط القطع المكافئ مساوٍ لخط الترتيب الذي يخرج من نقطة م إلى محيط القطع الناقص، فخط الترتيب الذي يخرج من نقطة ع إلى محيط القطع المكافئ مساوٍ لخط الترتيب الذي يخرج من نقطة ع إلى محيط القطع الناقص. فالقطع المكافئ يقطع القطع الناقص على طرف خط الترتيب الذي يخرج من نقطة ع. ظ-١٨

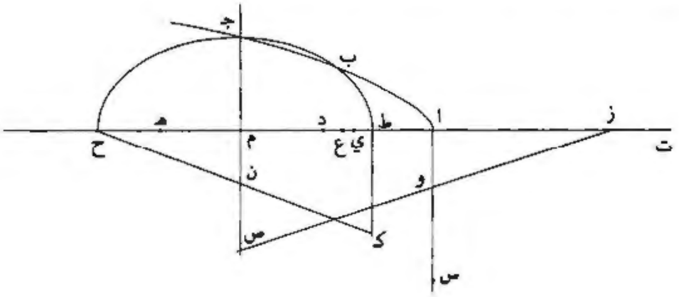
فإذا كان نسبة مربع ح م إلى ضرب م ا في و ا ليست بأصغر من نسبة ح ط إلى ط ك، فإن القطعين يلتقيان على جميع الأحوال، فالمسألة تتم مرتين على جميع الأحوال؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

– **كج** – وإن كان القطع المفروض قطعًا زائدًا، فتحديد المسألة هو أن تكون نسبة مربع نصف القطر ‹للقطع› الناقص إلى ضرب الخط الذي هو بين مركز القطع الناقص وبين رأس القطع الزائد في الخط الذي بين مركز القطع الناقص وبين الطرف الأبعد من سهم القطع الزائد ليست بأصغر من النسبة المؤلفة من نسبة قطر القطع الناقص إلى ضلعه القائم ومن نسبة الضلع القائم لسهم القطع الزائد إلى القطر المجانب له.

ولنعد الشكل، ونقسم خط ح ط بنصفين على نقطة م. وليكن سهم القطع الزائد ا ز وضلعه القائم ا و، ونصل ح ك وز و، ونخرج م ن موازيًا لـ ط ك وننفذه، وننفذ ز و حتى يلتقيا على نقطة ص. ونجعل نسبة س ا إلى ا و كنسبة ح ط إلى ط ك، فتكون نسبة س ا إلى ا ز مؤلفة من نسبة ح ط إلى ط ك ومن نسبة و ا إلى ا ز.

1 ‹م›: في [ح] – 2 مربع خط: خط مربع 11 القطع (الثانية): الخط – 13 و ا: و – 17 ‹للقطع›: في [ح] – 20 القطر: قطع – 21 ا ز: ا ت – 22 ز و: وو – 23 ا و: ا ر – 24 و ا: و.

فأقول: إنه إن كانت نسبة مربع ح م إلى ضرب ا م في م ز ليست بأصغر من نسبة س ا إلى ا ز، فإن المسألة تتم؛ وإن كانت نسبة مربع ح م إلى ضرب ا م في م ز أصغر من نسبة س ا إلى ا ز، فإن المسألة لا تتم.



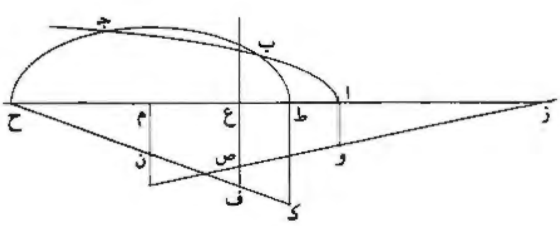
برهان ذلك: إن كانت نسبة مربع ح م إلى ضرب ا م في م ز كنسبة س ا إلى ا ز، فإن نسبة مربع ح م إلى ضرب م ا في م ز، تكون مؤلفة من نسبة ضرب ح م في م ط إلى ضرب ن م في م ط ومن نسبة ضرب ن م في م ط إلى ضرب م ا في م ز. ونسبة ضرب ح م في م ط إلى ضرب ن م في م ط هي كنسبة ح ط إلى ط ك التي هي نسبة س ا إلى ا و، فتكون نسبة ضرب ن م في م ط إلى ضرب م ا في م ز كنسبة و ا إلى ا ز التي هي كنسبة ص م إلى م ز التي هي نسبة ضرب ص م في م ا إلى ضرب م ا في م ز. فنسبة ضرب / ١٩-و ن م في م ط إلى ضرب م ا في م ز كنسبة ضرب ص م في م ا إلى ضرب م ا في م ز، فضرب ن م في م ط هو مثل ضرب ص م في م ا. وضرب ن م في م ط هو مربع خط الترتيب الذي يخرج من نقطة م إلى محيط القطع الناقص، الذي هو السهم القائم، وضرب ص م في م ا هو مربع خط الترتيب الذي يخرج من نقطة م إلى محيط القطع الزائد. فخط الترتيب الذي يخرج من نقطة م إلى محيط القطع الزائد هو خط الترتيب الذي يخرج من نقطة م إلى محيط القطع الناقص، فالقطعان يلتقيان على طرف السهم القائم.

وإن كانت نسبة مربع ح م إلى ضرب م ا في م ز أعظم من نسبة س ا إلى ا ز، فإن نسبة س ا إلى ا ز هي كنسبة بعض مربع ح م إلى ضرب م ا في م ز؛ فليكن ذلك البعض ضرب ح ع في ع ط. فتكون نسبة ضرب ح ع في ع ط إلى ضرب م ا في م ز

3 ا ز: ا ب – 4 ا م: ا و – 5 م ا: سا – 8 ن م: ح م ن م / و ا: د ا – 10 ن م: ل م.

كنسبة س ا إلى ا ز. وضرب م ا في م ز أعظم من ضرب ع ا في ع ز، فنسبة ضرب ح ع في ع ط إلى ضرب ع ا في ع ز أعظم من نسبة س ا إلى ا ز. ونخرج ع ف موازيًا لخط ط ك، فتكون نسبة ضرب ح ع في ع ط إلى ضرب ع ا في ع ز مثل النسبة المؤلفة من نسبة ضرب ح ع في ع ط إلى ضرب ف ع في ع ط ومن نسبة ضرب ف ع في ع ط إلى ضرب ع ا في ع ز. لكن نسبة ضرب ح ع في ع ط إلى ضرب ف ع في ع ط ‹هي كنسبة ح ع إلى ع ف، التي هي كنسبة ح ط› إلى ط ك التي هي نسبة س ا إلى ا و. فتكون نسبة ضرب ف ع في ع ط إلى ضرب ع ا في ع ز أعظم من نسبة و ا إلى ا ز، التي هي نسبة ص ع إلى ع ز التي هي نسبة ضرب ص ع في ع ا إلى ضرب ع ا في ع ز. فنسبة ضرب ف ع في ع ط إلى ضرب ع ا في ع ز أعظم من نسبة ضرب ص ع في ع ا إلى ضرب ع ا في ع ز، فضرب ف ع في ع ط أعظم من ضرب ص ع في ع ا. وضرب ف ع في ع ط هو مربع خط الترتيب الذي يخرج من نقطة ع إلى محيط القطع الناقص، وضرب ص ع في ع ا هو مربع خط الترتيب الذي يخرج من نقطة ع إلى محيط القطع الزائد، فخط الترتيب الذي يخرج من نقطة ع إلى محيط القطع الناقص أعظم من خط الترتيب الذي يخرج من نقطة ع إلى محيط القطع الزائد.

فالقطع الزائد يقطع خط الترتيب الذي يخرج من نقطة ع في داخل القطع الناقص، فهو إذن يقطع محيط القطع الناقص قبل أن ينتهي إلى خط الترتيب، وإذا قطع محيط القطع الناقص قبل أن ينتهي إلى خط الترتيب [وإذا قطع محيط القطع الناقص] مثل خط الترتيب الذي يخرج من نقطة ع، فهو يقطع محيط القطع الناقص على نقطة أخرى عند خروجه من القطع الناقص. فالقطع الزائد يقطع القطع الناقص في هذا الوضع على / نقطتين. ١٩ - ظ



فأقول أيضًا: إن القطع الزائد إذا قطع القطع الناقص على طرف السهم القائم، فإنه يقطعه على نقطة أخرى قبل طرف السهم القائم.

19 فالقطع: والقطع.

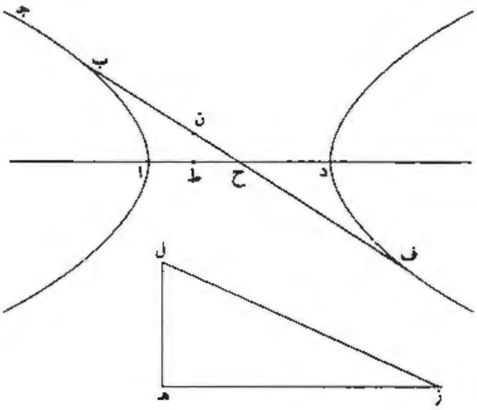
وذلك أنا إذا جعلنا نسبة ط م إلى م ع كنسبة ا م إلى م ط، كانت نسبة ا ط إلى ط ع كنسبة ا م إلى م ط. فتكون نسبة ع ط إلى ط ا كنسبة ط م إلى م ا. ونسبة ط م إلى م ا أعظم من النسبة المؤلفة من نسبة ط م إلى م ا ومن نسبة ط م إلى م ز التي هي نسبة مربع ط م، أعني ح م، إلى ضرب م ا في م ز التي هي نسبة س ا إلى ا ز. فنجعل نسبة ع ي إلى ي ا كنسبة س ا إلى ا ز. ولأن نسبة ع م إلى م ط كنسبة ط م إلى م ا، تكون نسبة ع م إلى م ز مؤلفة من نسبة ط م إلى م ا ومن نسبة ط م إلى م ز التي هي نسبة س ا إلى ا ز. فتكون نسبة ع ي إلى ي ا كنسبة ع م إلى م ز. ونجعل ز ت مثل ي ا. فتكون نسبة ي م إلى م ت كنسبة س ا إلى ا ز التي هي نسبة مربع ط م إلى ضرب م ا في م ز. ونسبة ي م إلى م ت هي كنسبة مربع ي م إلى ضرب ي م في م ت. فنسبة مربع ي م إلى ضرب ي م في م ت هي كنسبة مربع ط م إلى ضرب م ا في م ز. وضرب ي م في م ت هو زيادة ضرب م ا في م ز على ضرب ي ا في ي ز، فتكون نسبة مربع ط م إلى ضرب م ا في م ز كنسبة مربع ي م إلى ضرب ي م في م ت، وكنسبة الباقي من مربع ط م، الذي هو ضرب ح ي في ي ط، إلى الباقي من ضرب م ا في م ز، الذي هو ضرب ي ا في ي ز. فنسبة مربع ح م الذي هو مثل ضرب ح م في م ط، إلى ضرب م ا في م ز كنسبة ضرب ح ي في ي ط إلى ضرب ي ا في ي ز. فنسبة مربع خط الترتيب الذي يخرج من نقطة م إلى محيط القطع الناقص إلى مربع خط الترتيب الذي يخرج من نقطة ي إلى محيط القطع الناقص كنسبة ضرب م ا في م ز إلى ضرب ي ا في ي ز، التي هي نسبة مربع خط الترتيب الذي يخرج من نقطة م إلى محيط القطع الزائد إلى مربع خط الترتيب الذي يخرج من نقطة ي إلى محيط القطع الزائد. فنسبة خطي ترتيب القطع الناقص اللذين يخرجان من نقطتي م ي، أحدهما إلى الآخر، هي كنسبة خطي ترتيب القطع الزائد اللذين يخرجان من نقطتي م ي، أحدهما إلى الآخر. ‹و›خط ترتيب القطع الناقص الذي يخرج من نقطة م مساوٍ لخط ترتيب القطع الزائد الذي يخرج من نقطة م، فخط ترتيب القطع الناقص الذي يخرج من نقطة ي مساوٍ لخط ترتيب القطع الزائد الذي يخرج من نقطة ي. فالقطعان يلتقيان / على خط الترتيب الذي يخرج من نقطة ي. ٢٠-و

5 ع ي: ع ب – 6 ع م: ك م – 7 ع ي إلى ي ا: ع ف إلى ب ا – 11 وضرب ... م ز: مكررة – 14 ي ا في ي ز: يا في ي ا – 21 ي: ص – 22 ‹و›: في [ح] – 25 يلتقيان: كررها في الورقة السابقة.

فقد تبين مما بيناه أنه إذا كانت نسبة مربع ح م إلى ضرب م ا في م ز ليست بأصغر من نسبة س ا إلى ا ز، فإن القطعين يتقابلان على نقطتين. وإذا كان القطعان يلتقيان على نقطتين، فالمسألة تتم مرتين؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

فإن كان القطع المفروض قطعًا ناقصًا، فطريق استخراج المسألة من الطريق الذي ذكرنا في القطع الزائد وتحديدها هو تحديد القطع الزائد من غير زيادة ولا نقصان.

– كد – قطع ا ب جـ قطع زائد ومركزه ح؛ ونريد أن نجد قطر القطع الذي يحيط مع ضلعه القائم بسطح معلوم.



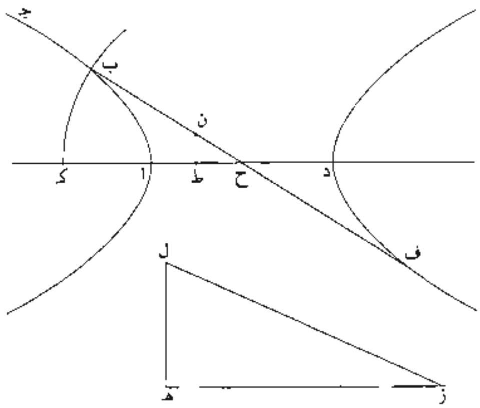
فنفرض ذلك ‹على› جهة التحليل: وليكن القطر المطلوب ب ف والسطح المعلوم مربع هـ ز، فيكون ضرب ب ف في ضلعه القائم مثل مربع هـ ز، فيكون هـ ز هو القطر القائم المزاوج لقطر ب ف. ونجعل ا ط هو الضلع القائم للسهم، فيكون ضرب ا د في د ط هو فضل ما بين مربعي السهمين. ونقيم على نقطة هـ خط هـ ل عمودًا على هـ ز ونجعل مربعه مثل ضرب ا د في د ط، ونصل ل ز، ونجعل ف ن هو الضلع القائم لقطر ب ف، فيكون ضرب ب ف في ف ن مثل مربع هـ ز ويكون ضرب ف ب في ب ن هو فضل ما بين مربعي القطرين المزدوجين، وفضل ما بين مربعي كل قطرين مزدوجين من أقطار القطع الزائد هو فضل ما بين مربعي سهميه، كما تبين في شكل يجـ من المقالة السابعة. فضرب

2 س ا: شا – 8 ‹على›: في [ح] / والسطح: فالسطح – 9 في: و – 11 ونقيم: ونعلم – 12 ونصل: وفضل – 13 ف ن: ف ر / هـ ز: هـ.

ب ف في ب ن مثل مربع هـ ل، فمربع ب ف مثل مربع ل ز. ول ز معلوم، فقطر ف ب معلوم، فـ ح ب معلوم، فنقطة ب معلومة. وضرب ب ف في ف ن مثل مربع هـ ز المعلوم، فخط ف ن معلوم وهو الضلع القائم لقطر ب ف؛ وهو / المطلوب. ٢٠-و

– كه – وتركيب هذه ‹المسألة› يكون كما نصف.

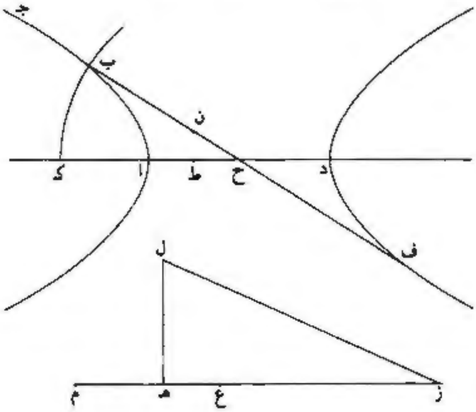
ليكن القطع الزائد ا ب جـ، وسهمه ا د وضلعه القائم ا ط، وخط هـ ز مفروض. ونريد أن نجد قطر القطع الذي يحيط مع ضلعه القائم بسطح مساوٍ لمربع هـ ز. فنقيم على نقطة هـ من خط هـ ز عمود هـ ل، ونجعل مربع هـ ل مثل ضرب ا د في د ط ونصل ل ز. فيكون مربع ل ز مثل مربعي ز هـ هـ ل، فيكون مربع ل ز يزيد على مربع هـ ز بالسطح الذي يحيط به خطا ا د د ط. ونجعل ح ك مثل نصف ز ل ونجعل ح مركزًا وندير ببعد ح ك قوسًا من دائرة، وليكن ك ب؛ وليقطع محيط القطع على نقطة ب. ونصل ح ب وننفذه في جهة ح إلى ف ونجعل ف ح مثل ح ب، فيكون ف ب مثل ز ل. ونجعل ضرب ب ف في ف ن مثل مربع هـ ز، فيبقى ضرب ف ب في ب ن مثل مربع هـ ل، فضرب ف ب في ب ن هو فضل ما بين مربع ب ف ومربع القطر ‹القائم› المزاوج له، فخط ف ن هو الضلع القائم لقطر ب ف. وضرب ب ف في ف ن مثل مربع هـ ز؛ وذلك ما أردنا أن نبين.



1 ب ن: ب ر – 3 هـ ز: هـ ن – 4 ‹المسألة›: في [ح] – 7 عمود هـ ل: كتب أولاً «عمودا ل»، ثم صحّح عليها – 11 ح إلى ف: ب الى فب – 12 فيبقى: فبقى – 14 ف ن (الثانية): بن.

وتحديد هذه المسألة هو أن يكون مربع هـ ز أعظم من السطح الذي يحيط به خطا د ا ا ط. فيعرض من ذلك أن يكون مربع ز ل أعظم من مربع د ا، فيكون نصف ز ل أعظم من ح ا، فيكون نقطة كـ في داخل القطع، فيكون قوس كـ ب يقطع محيط القطع على كل حال، فتتم المسألة على كل حال بعد اشتراط عظم هـ ز، أعني زيادة مربعه على ضرب د ا في ا ط الذي هو مربع السهم القائم. فإن كان السهم أصغر من ضلعه القائم، ‹فإن كل قطر من أقطاره أصغر من ضلعه القائم›، كما تبين في شكل كب من المقالة السابعة. وكل قطر فهو أعظم من السهم، فخط هـ ز يجب أن يكون أعظم من السهم القائم. ونفصل من خط هـ ز خطًا يكون مربعه مثل زيادة مربع ز هـ على ضرب ا د في د ط، وليكن ز ع. ونجعل ضرب م ز في ز ع مثل مربع ز هـ، فتكون نسبة م ز إلى ز ع كنسبة مربع هـ ز إلى مربع ز ع الذي هو زيادة مربع هـ ز على ضرب ا د في د ط، فنسبة ز م إلى م ع كنسبة مربع هـ ز إلى ضرب ا د في د ط، فيكون ز ع هو القطر وز م هو الضلع القائم؛ وتمام العمل على مثل ما تقدم.

وتحديد المسألة هو أن يكون ز ع أعظم من السهم.



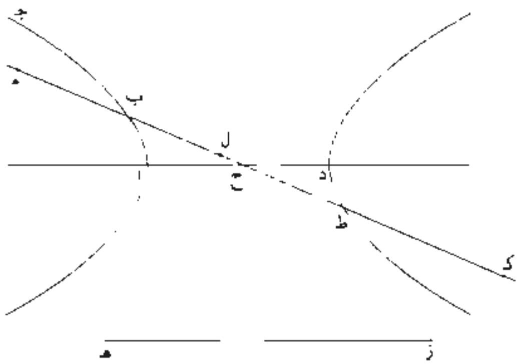
وإن كان السهم مساويًا لضلعه القائم، فإن كل قطر مساوٍ لضلعه القائم / كما تبين في ٢١-و
شكل كج من المقالة السابعة، فنقسم هـ ز بنصفين ويكون النصف هو ‹نصف› القطر، ويكون تحديد المسألة هو أن يكون هـ ز أعظم من [ضعف] السهم.

1 خطا: خطًا – 6 ‹فإن كل قطر أصغر من ضلعه القائم›: في [ح] – 7 هـ ز: هـ ر ا – 14 فإن ... القائم: مكررة – 15 فنقسم: ينقسم – 16 السهم: الهضم.

وهذا المعنى، أعني أن يكون ضرب القطر المجانب في ضلعه القائم معلومًا، فهو ممكن في القطع الناقص؛ والطريق إليه أسهل منه في القطع الزائد. وذلك أن مربعي كل قطرين مزدوجين من أقطار القطع الناقص مساويان مجموعهما لمربعي سهميه، وقد تبين ذلك في شكل يب من مقالة ز. فإذا كان ضرب القطر في ضلعه القائم معلومًا أو مربع القطر القائم معلومًا، ومربعا القطرين مجموعين معلومان لأن السهمين معلومان، فيبقى مربع القطر المجانب معلومًا، فوجوده ممكن متسهل.

وتحديد هذه المسألة هو أن يكون خط هـ ز أعظم من السهم الأصغر.

– كو – قطع ا ب جـ قطع زائد معلوم وسهمه ا د وخط هـ ز معلوم. ونريد أن نجد قطر القطع الذي هو ‹مع› ضلعه القائم مثل خط هـ ز.

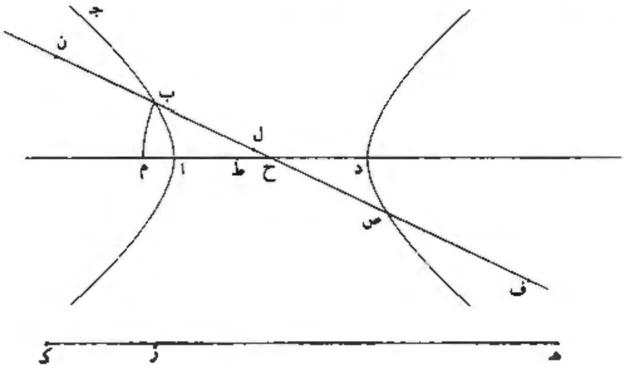


فنفرض ذلك على جهة التحليل: وليكن ذلك القطر خط ب ح ط وليكن ضلعه القائم ط ك. فيكون ب ك معلومًا. ونجعل ط ل مثل ط ك. فيكون ضرب ط ب في ب ل هو فضل ما بين مربعي القطرين المزدوجين لأن ضرب ب ط في ط ل هو مربع القطر القائم. فيكون ضرب ط ب في ب ل معلومًا لأنه مساوٍ لفضل ما بين مربعي السهمين المزدوجين، كما تبين في شكل يجـ من المقالة ز. ونجعل ب م مثل ب ل. فيكون ك م ضعف ط ب؛ وضرب ط ب في ب ل معلوم، فضرب ك م في ب م معلوم لأنه ضعف ضرب ط ب في ب ل، وك ب معلوم فخط ك م معلوم، فنصفه معلوم، فـ ط ب معلوم، فـ ح ب معلوم، فنقطة ب معلومة.

2 مربعي: مربع – 4 أو مربع: ومربع – 5 معلومان: معلوم – لسهمين: السهم – 9 ‹مع›: في [ج] – 11 فيكون (الثانية): ويكون – 13 ط ب: لب – 14 ب م: ي م – 16 ضعف: يضعف.

– كز – وتركيب هذه المسألة على ما نصف.

ليكن القطع ا ب جـ وسهمه ا د ومركزه ح والخط المعلوم هـ ز. و‹نريد أن نجد قطر القطع الذي هو مع› ضلعه القائم مثل خط هـ ز.



فنجعل ا ط مثل الضلع القائم للسهم ونجعل ضرب هـ كـ في كـ ز مثل ضعف ضرب ا د في د ط، ونجعل ح م ربع هـ كـ ونجعل ح مركزًا وببعد ح م ندير قوسًا من دائرة، ولتكن م ب. ونصل ح ب وننفذ ح ب في الجهتين ونجعل ب ف مثل هـ ز.

فأقول: إن ب ف مساوٍ للقطر والضلع القائم معًا.

برهان ذلك: أنا نفصل ب ن مثل ز كـ، فيكون ف ن مثل هـ كـ. ونفصل ح ص مثل ح ب ونجعل ب ل مثل ب ن، فيبقى ل ص مثل ص ف. فيكون ضرب ص ب في ب ل نصف ضرب ف ن في ن ب ‹الذي هو› مثل ضرب هـ كـ في كـ ز / الذي هو ٢١-ظ ضعف ضرب ا د في د ط، فضرب ص ب في ب ل مثل ‹ضرب› ا د في د ط، فضرب ص ب في ب ل هو فضل ما بين مربع ص ب ومربع القطر القائم المزاوج له، فضرب ب ص في ص ل هو مربع القطر المزاوج لقطر ص ب، فخط ص ل هو الضلع القائم لقطر ص ب. وص ل مثل ص ف، فـ ص ف هو الضلع القائم لقطر ص ب، فخط ب ف هو قطر ب ص مع ضلعه القائم. وب ف مثل هـ ز، فقطر ب ص مع ضلعه القائم مساوٍ لخط هـ ز؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.

1 كز: كو – 2 ح: هـ ح – 2-3 ‹نريد ... مع›: في [ح] – 5 وببعد: وننعد – 5-6 دائرة ولتكن: دائرة هـ ز ليكن – 6 م ب: مت – 9 فيكون: ويكون – 10 ف ن: نجد «من» تحتها / ‹الذي هو›: في [ح] – 11 ‹ضرب›: في [ح] – 14 ص ب: ص د / فـ ص ف: فـ صب.

وتحديد هذه المسألة هو أن يكون خط هـ ز أعظم من مجموع السهم مع ضلعه القائم، لأن كل قطر من أقطار القطع الزائد فهو أعظم من السهم المجانب وضلعه القائم أعظم من الضلع القائم للسهم. أما أن كل قطر فهو أعظم من السهم، فذلك بيّنٌ. وأما أن الضلع القائم للقطر أعظم من الضلع القائم للسهم، فلأنه قد تبين من شكل كا من مقالة ز أن نسبة كل قطر من أقطار القطع الزائد إلى ضلعه القائم أصغر من نسبة السهم إلى ضلعه القائم.

فإن كان السهم أصغر من ضلعه القائم، قسم هـ ز بقسمين على نقطة ض حتى يكون ضرب هـ ض في ض ز مثل ضرب ا د في د ط مرتين. ونجعل ح م ربع هـ ض، وتمام العمل على مثل ما تقدم: فيكون ف ص مثل ص ن ويكون ص ن هو الضلع القائم.

وإن كان السهم مثل الضلع القائم، قسم هـ ز بنصفين وكان النصف هو القطر، لأنه إذا كان السهم مثل ضلعه القائم، كان كل قطر من أقطار القطع مثل ضلعه القائم.

وتحديد المسألة في جميع الأقسام هو أن يكون هـ ز أعظم من مجموع السهم مع ضلعه القائم.

وهذا المعنى، أعني أن يكون القطر المجانب مع ضلعه القائم مجموعين مساويين لخط معلوم، ممكن في القطع الناقص متسهل. وذلك أن مربعي كل قطرين مزدوجين من أقطار القطع الناقص مساويان – مجموعهما – لمربعي السهمين. ومربعا السهمين معلومان، فمربع القطر المجانب مع ضربه في الضلع القائم معلوم، فضرب مجموع القطر المجانب مع ضلعه القائم في القطر المجانب معلوم. فإذا كان ‹ضرب› مجموع القطر المجانب مع ضلعه القائم في القطر المجانب معلومًا، كان القطر المجانب معلومًا؛ / فيكون وجوده ٢٢-و ممكنًا متسهلاً.

وتحديد هذه المسألة أن يكون الخط المعلوم أعظم من مجموع السهم الأطول مع ضلعه القائم.

ويتبين أيضًا بسهولة كيف يوجد قطر القطع الزائد الذي نسبته إلى ضلعه القائم نسبة معلومة.

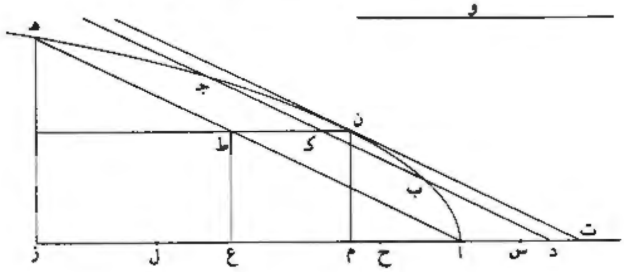
11 من: مكررة – 17 معلومان: معلوم – 18 ‹ضرب›: في [ح] – 22 القائم: وتتمة هذا الشرط ما يلي «وأصغر من ضرب مجموع السهم الأطول مع ضلعه القائم في جذر نسبة السهم الأطول إلى ضلعه القائم».

وذلك أن فضل ما بين مربعي القطرين المزدوجين من كل قطع زائد مساوٍ لفضل ما بين مربعي سهميه، كما تبين في شكل يجـ من مقالة ز. فإذا كان القطع معلومًا، كان سهماه معلومين وكان فضل ما بين مربعيهما معلومًا، فيكون فضل ما بين ‹مربع› القطر وبين ضربه في ضلعه القائم معلومًا، لأن ضرب القطر في الضلع القائم مساوٍ لمربع القطر القائم المزاوج له. وفضل ما بين مربع القطر وبين ضربه في الضلع القائم له هو ضرب القطر في الفاضل الذي بينه وبين الضلع القائم. فإذا كانت نسبة القطر المجانب إلى ضلعه القائم نسبة معلومة، كانت نسبة القطر المجانب إلى الفاضل بينه وبين ضلعه القائم نسبة معلومة. وضربه في هذا الفاضل معلوم، فالقطر المجانب يكون معلومًا؛ فوجوده ممكن متسهل.

وكذلك القطع الناقص يتبين بسهولة كيف يوجد قطره الذي نسبته إلى ضلعه القائم نسبة معلومة.

وذلك أن ‹مجموع› مربعي كل قطرين مزدوجين من أقطار القطع الناقص معلوم لأنه مساوٍ لمربعي سهميه، كما تبين في شكل يب من مقالة ز. فمربع القطر المجانب مع ضربه في ضلعه القائم معلوم. وإذا كانت نسبة القطر المجانب إلى ضلعه القائم معلومة، وكان ضربه فيه ‹مع مربع القطر المجانب› معلومًا، كان كل واحد منهما معلومًا. فالقطر الذي نسبته إلى ضلعه القائم معلومة يكون معلومًا، فوجوده ممكن متسهل.

‹كح› قطع ا ب قطع مكافئ معلوم وسهمه ا د ونقطة د على سهمه خارجة من القطع وخط و مفروض. ونريد أن نخرج من نقطة د خطًا يقطع القطع على نقطتين، ويكون الجزء منه الذي يقع في داخل القطع مثل خط و المفروض.



2 كما: لما / سهماه: سهمًا ه – 3 ‹مربع›: في [ح] – 12 فمربع: فربع – 15 معلومًا: معلومة – 17 يقطع: يقع.

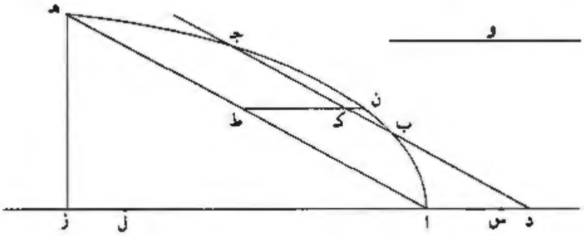
فنفرض ذلك على جهة التحليل: وليكن د ب جـ، وليكن ب جـ مثل خط و. ونخرج خط ا هـ موازيًا لخط د ب جـ ونخرج هـ ز على الترتيب، ونقسم ا هـ بنصفين على نقطة ط. ونخرج من نقطة ط خطًا موازيًا للسهم، وليكن ط كـ ن؛ فيكون قطرًا للقطع كما تبين في شكل مو من مقالة ا. ونخرج م ن على الترتيب، فيكون ا م مثل ن ط، وذلك أن الخط المماس الذي يخرج من نقطة ن يفصل من السهم من خارج القطع خطًا مساويًا لخط ا م، كما تبين في شكل لحـ من مقالة ا. وهذا الخط الذي يفصله المماس مساوٍ لخط ن ط لأن المماس موازٍ / لخط ا هـ، فخط ا م مثل خط ن ط. وكـ ط مثل ا د، ٢٢-ظ فنفصل ا ح مثل ا د، فيبقى ح م مثل ن كـ. ونجعل ا س مثل الضلع القائم للسهم، فيكون ضرب س ز في ز ا مثل مربع ا هـ، كما تبين في شكل ا من مقالة ز. ونخرج عمود ط ع. فيكون ع م مثل ط ن؛ وط ن مثل ا م، فـ ع م مثل م ا، فـ ع ا ضعف ا م، وز ا ضعف ا ع، فـ ز ا أربعة أمثال ا م، فـ ز ا أربعة أمثال ن ط. فضرب س ز في ن ط مثل مربع ا ط، فـ س ز هو الضلع القائم لقطر ن ط. وا ط مثل د كـ، فضرب س ز في ن ط مثل مربع د كـ. ولأن ن ط قطر وب جـ موازٍ لـ ا هـ، يكون ن ط يقسم ب جـ بنصفين، فيكون ضرب جـ د في د ب مع مربع ب كـ مثل مربع د كـ. فضرب س ز في ن ط مثل ضرب جـ د في د ب مع مربع ب كـ. وضرب س ز في ن كـ مثل مربع ب كـ، لأن ن كـ قطر وس ز هو ضلعه القائم. فيبقى ضرب س ز في ط كـ مثل ضرب جـ د في د ب. فيكون ضرب س ز في ا ح مثل ضرب جـ د في د ب. وضرب س ز في ا م مثل مربع د كـ، فيبقى ضرب س ز في ح م مثل مربع ب كـ. ونجعل ا ل أربعة ‹أمثال› ا ح، فيبقى ل ز أربعة أمثال ح م. وضرب س ز في ح م مثل مربع ب كـ، فضرب س ز في ز ل مثل مربع ب جـ المعلوم. وا ح معلوم، فـ ا ل معلوم وا س معلوم، فـ س ل معلوم وضرب س ز في ز ل معلوم، فنقطة ز معلومة. وز هـ عمود، فهو معلوم الوضع. والقطع معلوم الوضع، فنقطة هـ معلومة، فخط ا هـ معلوم القدر والوضع، فنصفه معلوم، فنقطة ط معلومة. وخط ط كـ معلوم الوضع والقدر، فنقطة كـ معلومة، فخط د كـ معلوم الوضع والقدر؛ وب كـ معلوم القدر، فنقطة ب معلومة.

3 للقطع: لقطع – 4 ن ط: ر ط – 5 يفصل: بفصل – 6 لحـ: بحـ – 8 فنفصل: فيفصل / ن كـ: ر كـ – 10 فـ ع ا: فـ ع – 13 في ن ط: ون ط / ولأن: ولو / لـ ا هـ: له – 15 ب كـ: ن كـ – 16 ب كـ: ن كـ – 17 فيكون ... د ب: مكررة – 19 ‹أمثال›: في [ح] – 20 ب كـ: ن كـ – 23 ط كـ: ط ف.

– كط – وتركيب هذه المسألة يكون كما نصف.

نجعل ا ل أربعة أمثال ا د ونجعل ا س هو الضلع القائم للسهم ونجعل ضرب س ز في ز ل مثل مربع و. ونخرج عمود ز هـ ونصل ا هـ ونقسمه بنصفين على نقطة ط. ونخرج ط ن موازيًا للسهم، فيكون ط ن قطرًا للقطع. ونخرج من نقطة د خطًا موازيًا لخط ا هـ، فهو يقطع القطع على تصاريف الأحوال، لأنه يحيط مع السهم بزاوية حادة مما يلي القطع. ولأنه يقطع القطع ويقطع السهم، فهو يقطع / القطع على نقطتين، لأن كل خط ٢٣-و يقطع القطع ويقطع قطرًا من أقطار القطع، فهو يقطع القطع على نقطتين كما تبين في شكل كز من مقالة ا، فليكن خط د ب جـ.

فأقول: إن ب جـ مثل و.



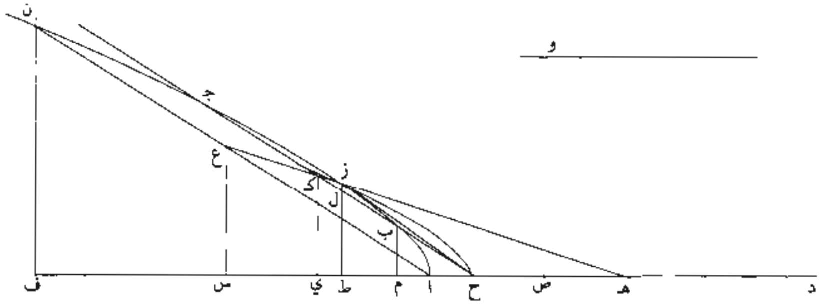
برهان ذلك: أن خط ب جـ يقطع القطع على نقطتين وهو موازٍ لخط ا هـ، فقطر ط ن يقطعه بنصفين، فليقطعه على نقطة كـ. ويتبين كما تبين في التحليل أن خط ا ز أربعة أمثال خط ط ن. وضرب س ز في ز ا مثل مربع ا هـ، فضرب س ز في ن ط مثل مربع ا ط. وخط ن ط قطر، فخط س ز هو الضلع القائم لقطر ن ط، فضرب س ز في ن كـ مثل مربع ب كـ. وا ز أربعة أمثال ن ط وا ل أربعة أمثال ط كـ، لأنه مساوٍ لـ د ا، فـ ل ز أربعة أمثال ن كـ، وضرب س ز في ز ل مثل مربع ب جـ، وضرب س ز في ز ل مثل مربع و، فخط ب جـ مساوٍ لخط و؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.

وليس يحتاج في هذه المسألة إلى تحديد لأن ضرب س ز في ز ل يمكن أن يكون مساويًا لـ ‹مربع› خط معلوم، أي خط كان.

– ل – قطع ا ب جـ قطع زائد معلوم وسهمه ا د ومركزه هـ، وخط و مفروض ونقطة ح مفروضة على سهم القطع فيما بين مركزه ورأسه. ونريد أن نخرج من نقطة ح خطًا

1 كـ ط: كـ ظ – 4 ا هـ: هـ – 13 فخط: بخط – 14 ن كـ: بكـ / وا ز: وا ب – 15 فـ ل ز: على – 18 ‹مربع›: في [ح] – 20 ورأسه: وزاوية.

يقطع القطع على نقطتين ويكون الجزء منه الذي يقع في داخل القطع مثل خط و المفروض.



فنفرض ذلك على جهة التحليل: وليكن خط ح ب جـ، فيكون ب جـ مثل خط و المفروض. ونقسم ب جـ بنصفين على نقطة ك ونصل هـ ك ونخرجه على استقامة، ونخرج من نقطة ا خطًا موازيًا لخط ح ك، فهو يلقى القطع؛ فليلقه على نقطة ن وليقطع هـ ك على نقطة ع، فيكون ا ع نصف ا ن. ونخرج خطوط ن ف ع س ك ي ب م على الترتيب. فيكون مثلثا ا ع س ك ح ي متشابهين، فتكون نسبة ع س إلى ك ي كنسبة س ا إلى ي ح وكنسبة ع ا إلى ك ح. ونسبة ع ا إلى ك ح كنسبة ا هـ إلى هـ ح التي ‹هي› نسبة معلومة لأن كل واحد من خطي ا هـ ح هـ معلوم. فنسبة ع س إلى ك ي معلومة، ونسبة س ا إلى ي ح معلومة وهي كنسبة ا هـ إلى هـ ح. فنسبة س هـ إلى هـ ي معلومة، ونسبة ضرب هـ س في س ا إلى مربع س ع كنسبة ضرب هـ ي في ي ح إلى مربع ي ك. وف ا ضعف ا س ود ا ضعف ا هـ وف ن ضعف س ع، فنسبة ضرب هـ س في س ا / إلى مربع س ع كنسبة ضرب د ف في ف ا إلى مربع ف ن، فنسبة ضرب هـ ي في ي ح إلى مربع ي ك كنسبة ضرب د ف في ف ا إلى مربع ف ن التي هي نسبة د ا إلى ضلعه القائم، التي هي نسبة معلومة، فنسبة ضرب هـ ي في ي ح إلى مربع ي ك كنسبة د ا إلى ضلعه القائم. ونخرج من نقطة ح خطًا يماس القطع، وليكن ح ز. ونخرج ز ط على الترتيب، فهو يقطع خط ح جـ؛ فليقطعه على نقطة ل. فلأن نقطة ح على السهم، يكون الخط المماس الذي يخرج من نقطة ح إلى الجهة الأخرى من القطع مساويًا

٢٣-ظ

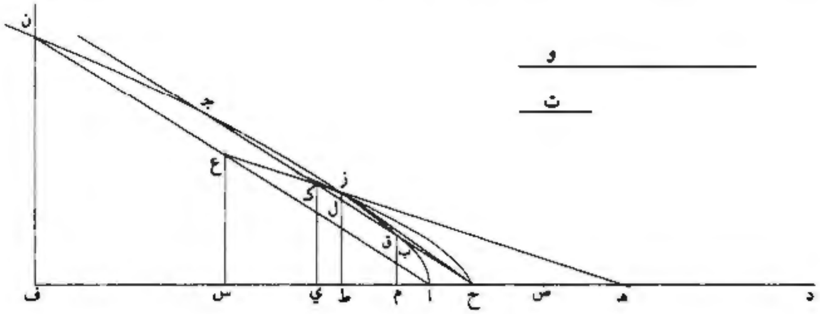
4 هـ ك: هـ ط – 6 ك ي: ك ب – 7 ك ح ي: ك ح ز / ك ي: ك ب – 8 ي ح: ن ح – 9 ك ي: ك ز.

لخط ح ز، ويكون الخط الذي يصل بين نقطتي التماس عموداً على السهم. فهو على الترتيب. فخط ز ط هو الذي ينتهي إلى نقطة التماس التي في الجهة الأخرى. فنسبة جـ ح إلى ح ب كنسبة جـ ل إلى ل ب. كما تبين في شكل لز من مقالة جـ. وجـ ح أعظم من ح ب، فـ جـ ل أعظم من ل ب؛ فنقطة ل فيما بين نقطتي ب ك. ولأن ز ح مماس وز ط على الترتيب، تكون نسبة ضرب هـ ط في ط ح إلى مربع ط ز كنسبة ا د إلى ضلعه القائم. كما تبين في شكل لز من مقالة ا. فنسبة ضرب هـ ط في ط ح إلى مربع ط ز كنسبة ضرب هـ ي في ي ح إلى مربع ي ك. فالقطع الزائد الذي سهمه هـ ح وضلعه القائم الخط الذي نسبة هـ ح إليه كنسبة ا د إلى ضلعه القائم، يمرّ بنقط ح ز ك. فليكن ذلك القطع قطع ح ز ك. ونجعل نسبة هـ ص ‹إلى› ح ص كنسبة ا د إلى ضلعه القائم التي هي نسبة سهم هـ ح إلى ضلعه القائم، فتكون نقطة ص معلومة، ويكون ص ح الخط الشبيه النسبة، كما تبين في الشكل الثاني من المقالة السابعة. فتكون نسبة ضرب ص ي في ي ح إلى مربع ح ك كنسبة ص هـ إلى هـ ح. كما تبين في الشكل الثاني من المقالة السابعة. ونسبة ص هـ إلى هـ ح معلومة، فنسبة ضرب ص ي في ي ح إلى مربع ح ك معلومة. ولأن نسبة جـ ح إلى ح ب كنسبة جـ ل إلى ل ب، تكون نسبة جـ ح مع ح ب إلى ح ب كنسبة جـ ب إلى ب ل، وتكون أنصافها كذلك. فنسبة ك ح إلى ح ب كنسبة ك ب إلى ب ل. فنسبة ح ك إلى ك ب كنسبة ب ك إلى ك ل، فضرب ح ك في ك ل مثل مربع ك ب. فضرب ح ي في ي ط مثل مربع ي م. ونسبة مربع ح ك إلى مربع ك ب كنسبة مربع ح ي إلى مربع ي م. ونسبة مربع ح ي إلى مربع ي م كنسبة ح ي إلى ي ط. فنسبة مربع ح ك إلى مربع ك ب كنسبة ح ي إلى ي ط. ونسبة ح ي إلى ي ط كنسبة ضرب ص ي في ي ح إلى ضرب ص ي في ي ط، فنسبة ضرب ص ي في ي ح إلى / ضرب ص ي في ي ط كنسبة مربع ح ك إلى مربع ٢٤ – و
ك ب، فنسبة ضرب ص ي في ي ح إلى مربع ح ك كنسبة ضرب ص ي في ي ط إلى مربع ك ب. ونسبة ضرب ص ي في ي ح إلى مربع ح ك معلومة. لأنها كنسبة ‹ص هـ إلى هـ ح. فنسبة› ضرب ص ي في ي ط إلى مربع ك ب نسبة معلومة. وك ب معلوم لأنه نصف و، فضرب ص ي في ي ط معلوم؛ وخط ص ط معلوم، فنقطة ي معلومة.

4 ح ب ... من: مكررة – هـ جـ ل: هـ جـ ل – 7 ي ك: ل ك – 8 يمر: يمـ – 9 ‹إلى›: في [ج] – ح ص: د ص – 19 ي م (الأولى): ب ط – 20 ي ط (الأولى): ط – 21 ي ط: نقط – 22 ك ب: ك ي – 23 ك ب: ك ي – 23-24 ‹ص هـ ... فنسبة›: في [ج] – 24 ك ب (الأولى والثانية): ك ي.

فخط ي ك معلوم الوضع، وقطع ح ك معلوم الوضع، فنقطة ك معلومة، فخط ح ك معلوم الوضع، فنقطتا ب جـ معلومتان، وخط ب ح معلوم؛ وهو المطلوب.

‹لآ› وتركيب هذه المسألة يكون على ما نصف.



نخرج من نقطة ح خطًا يماس قطع ا ب جـ، وليكن ح ز. ونخرج ز ط على الترتيب، فتكون نسبة ضرب هـ ط في ط ح إلى مربع ط ز كنسبة قطر ا د إلى ضلعه القائم، كما تبين في شكل لز من مقالة آ. ونرسم على نقطة ح القطع الزائد الذي سهمه هـ ح وضلعه القائم الخط الذي نسبة هـ ح إليه كنسبة ا د إلى ضلعه القائم؛ وليكن قطع ح ك. فقطع ح ك يمر بنقطة ز لأن نسبة ضرب هـ ط في ط ح إلى مربع ط ز كنسبة قطر هـ ح إلى ضلعه القائم. فقطع ح ك يقطع قطع ا ب جـ على نقطة ز. ونجعل نسبة هـ ص إلى ص ح كنسبة قطر هـ ح إلى ضلعه القائم، فيكون خط ص ح هو الخط الشبيه النسبة. ونجعل نسبة مربع ت إلى ربع مربع و كنسبة هـ ص إلى هـ ح ونجعل ضرب ص ي في ي ط مثل مربع ت. ونخرج من نقطة ي خطًا على الترتيب إلى محيط قطع ح ك، وليكن ي ك. فتكون نقطة ك في داخل قطع ا ب جـ لأن نقطة ز على محيط ا ب جـ. ونصل ح ك، وليقطع خط ز ط على نقطة ل. فيكون نسبة ضرب ص ي في ي ح إلى مربع ح ك كنسبة ص هـ إلى هـ ح، كما تبين في شكل ب من مقالة ز، فهي كنسبة مربع ت إلى ربع مربع و. فنسبة ضرب ص ي في ي ح إلى مربع ح ك كنسبة ضرب ص ي في ي ط إلى ربع مربع و. ونجعل ضرب ح ي في ي ط مثل مربع ي م

1 فخط: وخط / ي ك: ب ل – 2 ب: ي – 5 ا د: ا هـ – 8 ح ك: ح ط / فقطع: بقطع – 11 هـ ص: ص – 15 ز: ل / فهي: وبقى.

ونخرج م ب على الترتيب، فيكون ضرب ح ك في ك ل مثل مربع ك ب. ولأن نسبة ضرب ص ي في ي ط إلى ربع مربع و ‹كنسبة ضرب ص ي في ي ح إلى مربع ح ك›، تكون نسبة ضرب ص ي في ي ح إلى ضرب ص ي / في ي ط كنسبة مربع ٢٤-ظ ح ك إلى ‹ربع› مربع و، فنسبة ح ي إلى ي ط كنسبة مربع ح ك إلى ربع مربع و. ونسبة ح ي إلى ي ط كنسبة مربع ح ي إلى مربع ي م، فنسبة مربع ح ك إلى ربع مربع و كنسبة مربع ح ي إلى مربع ي م التي هي كنسبة مربع ح ك إلى مربع ك ب، فنسبة مربع ح ك إلى مربع ك ب كنسبة مربع ح ك إلى ربع مربع و، فمربع ك ب ربع مربع و، فخط ك ب نصف خط و.

ونخرج من نقطة ا خطًا موازيًا لخط ح ك، وليلق خط هـ ك على نقطة ع. ونخرج ا ع على استقامة ونجعل ع ن مثل ع ا، ونخرج ن ف ع س على الترتيب، فيكونان موازيين لخط ك ي. فيكون مثلث ا ع س شبيهًا بمثلث ح ك ي، فتكون نسبة ع س إلى ك ي كنسبة س ا إلى ي ح وكنسبة ع ا إلى ك ح. ونسبة ع ا إلى ك ح كنسبة ا هـ إلى هـ ح، فنسبة س هـ إلى هـ ي كنسبة س ا إلى ي ح وكنسبة ع س إلى ك ي. ونسبة ا س إلى س ع كنسبة ح ي إلى ي ك، فنسبة ضرب هـ س في س ا إلى مربع س ع كنسبة ضرب هـ ي في ي ح إلى مربع ي ك. ونسبة ضرب هـ ي في ي ح إلى مربع ي ك كنسبة هـ ح إلى ضلعه القائم التي ‹هي› نسبة ا د إلى ضلعه القائم، فنسبة ضرب هـ س في س ا إلى مربع س ع كنسبة ا د إلى ضلعه القائم. وا ف ضعف ا س ود ا ضعف هـ ا، فـ د ف ضعف هـ س. ون ف ضعف ع س، فنسبة ضرب د ف في ف ا إلى مربع ف ن كنسبة ا د إلى ضلعه القائم، فنقطة ن على محيط قطع ا ب جـ. فلأن نقطة ك في داخل قطع ا ب جـ وهي على قطر هـ ع وخط ح ك موازٍ لخط ا ن الذي يقسمه قطر هـ ع بنصفين، يكون خط ح ك إذا أخرج على استقامة قطع ‹قطع› ا ب جـ على نقطتين وانقسم بخط هـ ك بنصفين. فلنخرج خط ح ك على استقامة وليقطع القطع على نقطة جـ.

فأقول: إن نقطة ب هي النقطة الثانية التي على محيط قطع ا ب جـ.

1 م ب: م ي / ك ب: ك ي – 2 ي ط: بح ط – 2-3 ‹كنسبة ... ح ك›: في [ج] – 4 ‹ربع›: في [ج] – 5 ي ط: بط – 6 ك ب: ك ي – 7 ك ب (الأولى والثانية): ك ي / فخط: بخط – 8 ك ب: ك ي – 11 ا ع س: ا ع ش – 12 ع ا (الأولى والثانية): ع / هـ ح: هـ ك – 15 هـ ي: هـ ب / إلى مربع: أثبتها في الهامش / ي ك (الأولى): ر ك – 17 ا د: ا جـ – 21 ‹قطع›: في [ج] – 22 هـ ك: هـ ل / فلنخرج: ولنخرج.

فإن لم يكن كذلك، فلتكن النقطتان جـ ق. فيكون جـ ك مثل ك ق. فلأن ح ز مماس، تكون نسبة جـ ح إلى ح ق كنسبة جـ ل إلى ل ق، فنسبة جـ ح مع ح ق إلى ح ق كنسبة جـ ق إلى ق ل، ونسبة النصفين كذلك، فنسبة ك ح إلى ح ق كنسبة ق ك إلى ق ل. فضرب ح ك في ك ل مثل مربع ك ق.

وقد تبين أن ضرب ح ك في ك ل مثل مربع ك ب، فـ ك ب مثل ك ق، وهذا محال. فليس نقطة ق على محيط قطع ا ب جـ ولا غيرها من النقط غير نقطة ب. فنقطة ب على محيط قطع ا ب جـ. وهـ ك قطر فهو يقطع خط ب جـ بنصفين. فـ ب ك مثل ك جـ؛ وب ك مثل نصف خط و، فخط / ب جـ مثل خط و المفروض ٢٥-و وب جـ في داخل قطع ا ب جـ ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وليس تحتاج هذه المسألة إلى تحديد، لأن الخط الذي يخرج من نقطة ا، التي هي طرف السهم، ويكون موازيًا للخط الذي لا يقع على القطع، ليس يلقى القطع على نقطة أخرى، لأن ذلك يتبين من شكل يجـ من المقالة الثانية. وكل خط يخرج من نقطة ح فيما بين خط ح ز المماس وبين الخط الذي يخرج من رأس القطع موازيًا للخط الذي لا يقع على القطع، فهو يقطع القطع على نقطتين، لأنه قد يقطع الخطين اللذين لا يقعان على القطع. وتكون هذه الخطوط بلا نهاية وتكون الأجزاء منها التي تقع في داخل القطع، كل ما بعد منها عن الخط المماس يتعاظم إلى ما لا نهاية، وكل ما قرب منها إلى الخط المماس يتصاغر إلى ما لا نهاية. فكل خط من الخطوط المتناهية المقدار، فإنه يمكن أن يقع في داخل القطع خط مساوٍ له.

فإذا سلك في إخراج الخط من نقطة ح، الطريق الذي بيناه، كان الذي يقع منه في داخل القطع مساويًا للخط المفروض. فالمسألة تتم على كل حال، فليس تحتاج إلى تحديد؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

تمّ ما صنّفه الشيخ أبو علي الحسن بن الحسن ‹بن› الهيثم

في تمام كتاب *المخروطات*.

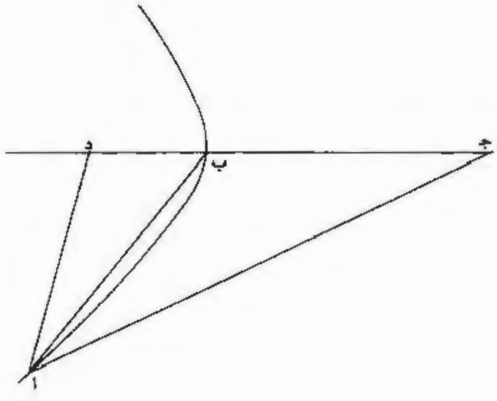
والحمد للّه وحده وصلواته على سيّدنا محمّد وآله وأصحابه وسلامه.

1 ح ز: ح ق – 3 جـ ق: ح ق / النصفين: النصف / ك ح: قح – 4 ق ل: ك ل – 6 النقط: النقطة – 13 ح ز: ح ب – 16 كل ما (الأولى والثانية): كلما – 22 الحسن (الثانية): الحسين.

‹ملحق›*

إذا أردنا أن نأخذ من زاوية معلومة ثلثها، وضعنا قطعًا زائدًا ضلعه القائم مثل قطره المجانب وزاوية ترتيبه مثل الزاوية المعلومة، وليكن قطع ا ب وقطره المجانب ب جـ. ونخط / في القطع خطًا مثل خط ب جـ، وهو خط ب ا، ونخرج خط ا د على الترتيب. ٢٥-ظ

فأقول: إن زاوية د ا ب الزاوية المعلومة.



برهانه: أن نسبة ضرب جـ د في د ب إلى مربع خط ا د كنسبة المجانب إلى القائم؛ والمجانب فرضناه مثل القائم، فضرب جـ د في د ب مثل مربع ا د، فيكون لذلك مثلث ا د ب شبيهًا بمثلث ا د جـ؛ فزاوية د ا ب مساوية لزاوية جـ، وزاوية ا ب د مثلا زاوية جـ، لأن ا ب مثل ب جـ، فزاوية ا ب د مثلا زاوية د ا ب. ولأن الزاويتين الخارجتين كل مثلث مثلا الداخلتين المقابلتين لهما، تكون لذلك زاوية د ا ب ثلث الزاوية المفروضة؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

* يتبع هذا النص في المخطوطة مقالة ابن الهيثم، وهو مجهول المؤلف – 8 د ا ب: د ا جـ / الزاويتين: الزاوية – 9 الداخلتين المقابلتين لهما: الداخلين المقابلين لها.

الفصل الثاني

تصويب شكل بني موسى في مخروطات أبلونيوس

١ ـ مقدِّمة

لقد لعب بنو موسى دوراً حاسماً في تاريخ كتاب "المخروطات" لأبلونيوس، وكذلك في تاريخ البحث في القطوع المخروطية. فَــهُم الذين جمعوا المخطوطات اليونانية وجلبوا المترجمين لنقل المقالات السبع التي وجدوها إلى العربية، وهم أيضاً الذين أشرفوا على هذه الترجمة، كما قاموا أيضاً مع تلاميذهم بتنشيط البحث في المخروطات، بعد عدّة قرون من انقطاعه. ولنتذكــَّـر أعمال الحسن، أصغرهم سنّاً، وأعمال تلميذه ثابت بن قرَّة في المخروطات[1].

يضع ابن الهيثم نفسه، على كلّ حال، كما رأينا في المجلّدين الأوّلين، ضمن هذا التقليد الذي طــُبِع بطابع بني موسى. إنّه من المستحيل أن يكون قد أهمل كتابات بني موسى في المخروطات، بل إنّه من غير الممكن أن لا يكون قد اهتمَّ بها، وذلك لأنّه كان منظــِّـراً في "المخروطات"، كما كان نسّاخاً لهذا الكتاب.

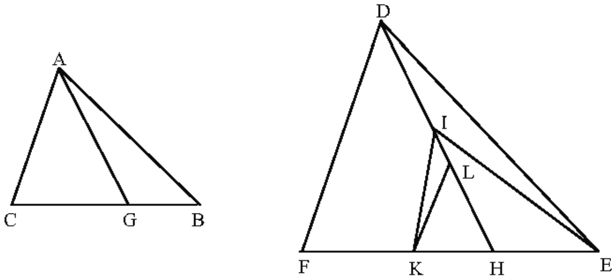
وكان بنو موسى قد حرَّروا، لأجل تسهيل دراسة كتاب "المخروطات"، رسالة سجَّلوا فيها المقدِّمات التسع الضرورية لبراهين أبلونيوس. وكانت هذه الرسالة مخصَّصة إذاً، كما هو واضح، لتــُقرأ قبل هذا الكتاب، وكانت، بالتالي، مُرفــَقة به. والمقدِّمة التاسعة –والأخيرة – لم تــُعجِب ابن الهيثم مع أنّها تتلاءم مع الحالات المعالَــجة في "المخروطات". كان ابن الهيثم يرى أنَّ هذه المقدِّمة، كما كانت معروضة، لم تكن عامَّة إلى الدرجة التي رآها بنو موسى؛ كما كان يرى، بالإضافة إلى ذلك، أنَّ برهانهم عرضَ لهم فيه سهوٌ؛ وقد يكون هذا السهو قد زاد من تماديهم

[1] انظر: المجلد الأوّل من هذه الموسوعة: المؤسِّسون والشارحون: بنو موسى، ثابت بن قرّة، ابن سنان، الخازن، القوهي، ابن السمح، ابن هود (بيروت ٢٠١١)

في خطئهم هذا. وهذا المؤلّف الصغير لابن الهيثم مكرّس، بالتحديد، لتصويب الأخطاء الواردة في هذه المقدّمة. يتعلّق هذا المؤلّف، إذاً، بنوع من الكتابات المفضّلة لدى ابن الهيثم وهي الكتابات التي يناقشُ فيها ويُصحِّحُ ما كتبه أسلافه: أقليدس، بطلميوس، ابن سنان وبني موسى في هذه المرَّة. ولكنَّ المهمّة، في هذه الحالة الأخيرة، تبقى أكثر تواضعاً إذا قورِنت بتلك التي قام بها بخصوص بطلميوس على سبيل المثال: فالأمر يتعلّق بمسألة تقنيَّة تخصُّ البرهان، وهي لا تـُثير أيّ موضوع نظريّ أساسيّ. أليست أهمّية رسالة بني موسى نفسها عائدة بشكل رئيسيّ إلى ارتباطاتها بكتاب "المخروطات"؟ وقد تكون هذه الرسالة قد أثارت اهتمام ابن الهيثم بفضل هذه الارتباطات أيضاً. والمسألة المطروحة ضمنياً في هذه الكتابة لابن الهيثم هي معرفة كيفية تصحيح منهج بني موسى للحصول على العمومية المنشودة. ولقد تصوَّر ابن الهيثم كتابه للوصول إلى هذا الهدف، فهو يبدأ بتحرير المقدِّمة المعنيّة بالأمر وبإظهار الصعوبة الموجودة فيها؛ فيتناول عندئذ المسألة من جديد ويتفحَّص بطريقة شاملة كلّ الحالات الممكنة. فيبيِّن أنَّ المقدِّمة صحيحة، في سبع حالات من بين الحالات العشر الممكنة. ولقد وردت هذه الحالات في كتاب "المخروطات"، فتكون كتابة بني موسى، في وضعها الحالي، متجاوبة مع الهدف الذي أرادوا التوصُّل إليه. ولكن، بعكس ذلك، فإنَّ المقدِّمة ليست صحيحة دائماً في الحالات الثلاث الباقية، وهي الحالات الأولى والسادسة والعاشرة. وترجع الحالة العاشرة إلى الحالة السادسة، لذلك لا يبقى سوى حالتين للمناقشة. يقترح ابن الهيثم عندئذ إضافة شرط لكي تـُصبِح المقدِّمة صحيحة بشكل دائم. وهذا يعني أنّه يُصبح لدينا، بفضل هذا الشرط الإضافيّ، كلُّ الشروط الضرورية والكافية لكي تـُصبِح المقدِّمة صحيحة بشكل دائم. لا يُبرهِن ابن الهيثم هذا القول بحدِّ ذاته. وكان قد أثبت الحالات السبع بالإضافة إلى الحالتين الأولى والسادسة. فهل هذا هو السبب الذي جعله لا يتناول من جديد البرهان العامّ؟ لنبدأ، قبل الجواب عن هذا السؤال، بتـَتـَبـُّع تحرير ابن الهيثم، نقطة بعد نقطة.

١-١ الشرح الرياضيّ

مقدِّمة بني موسى: ليكن معنا مثلّثان ABC وَ DEF؛ ولتكن G نقطة على BC وَ H نقطة على EF بحيث يكون $\widehat{D}=\widehat{A}$ وَ $\widehat{AGB}=\widehat{DHE}$ مع $\frac{BG.CG}{GA^2}=\frac{HE.HF}{HD^2}$؛ فيكون المثلّثان ABC وَ DEF متشابهين.



الشكل ١

ستكون المقدِّمة، في الواقع، صحيحة وسيُبرهَن التشابه إذا بيَّنّا أنَّ الفرضيات تؤدِّي إلى $\widehat{B}=\widehat{E}$. يُبيِّن ابن الهيثم تحديداً أنَّ المثلّثين ليسا متشابهين بالضرورة. لنتناول من جديد عرض ابن الهيثم لبرهان بني موسى.

لنفرض أنَّ المثلّثين ليسا متشابهين، فيكون $\widehat{B}\neq\widehat{E}$. لتكن I نقطة على DH بحيث يكون $\widehat{B}=\widehat{HEI}$، ولتكن K نقطة على EF بحيث يكون $\widehat{D}=\widehat{A}=\widehat{EIK}$ ؛ فيكون المثلّثان ABC وَ EIK متشابهين، من جهة، كما يكون المثلّثان BAG وَ EIH متشابهين من جهة أخرى. يكون معنا:

$$\frac{EI}{AB}=\frac{IK}{AC}=\frac{KE}{CB} \quad \text{وَ} \quad \frac{HE}{BG}=\frac{IH}{AG}=\frac{EI}{AB}\text{،}$$

فنحصل على

$$\frac{IH}{AG}=\frac{HE}{BG}=\frac{KE}{CB}=\frac{KE-HE}{CB-BG}=\frac{KH}{CG}\text{؛}$$

فنستخرج: $\frac{BC.CG}{GA^2} = \frac{EH.HK}{IH^2}$

ويكون بالتالي: $\frac{EH.HK}{IH^2} = \frac{HE.HF}{HD^2} \Leftarrow \frac{FH}{HK} = \frac{DH^2}{HI^2}$.

وإذا كانت L نقطة على DH، بحيث يكون $\frac{DH}{HL} = \frac{DH^2}{HI^2}$، نستخرج:

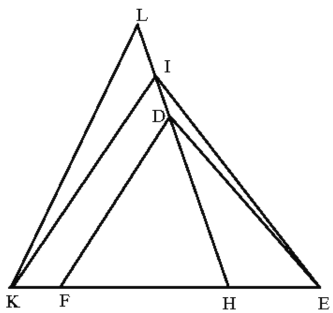
(١) $\frac{DH}{HI} = \frac{HI}{HL}$ وَ (٢) $\frac{DH}{HL} = \frac{FH}{HK}$.

ولكنَّ (٢) تعطي $DF // LK$.

لنلاحظ أنَّ وضعي النقطتين I وَ L يتغيَّران وفقاً للحالة $\widehat{B} < \widehat{E}$ أو للحالة $\widehat{B} > \widehat{E}$.

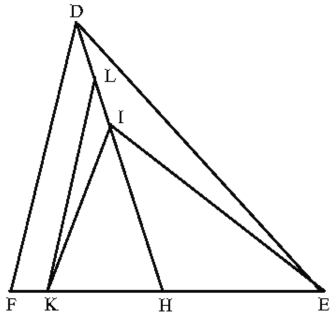
المتباينة $\widehat{B} < \widehat{E}$ تؤدِّي إلى أنَّ I موجودة بين H وَ D، فيكون $HI < HD$، وهذا ما يعطي، وفقاً لِـ (١)، $HL < HI$ ، فتكون L بين H وَ I (الشكل ١).

المتباينة $\widehat{B} > \widehat{E}$ تؤدِّي إلى أنَّ I أبعد من D، فيكون $HI > HD$، فتكون L موجودة فوق I (الشكل ٢).



الشكل ٢

فيكون شكل بني موسى (الشكل ٣) مغلوطاً، لأنَّ النقطة I موجودة بين H وَ D في الشكل ١، وتكون النقطة L فوق I، كما هي الحال في الشكل ٢.



الشكل ٣

ويعطي الاستدلال الذي يقام استناداً إلى هذا الشكل: $\widehat{FDH} < \widehat{KIH}$ وَ $\widehat{EDH} < \widehat{EIH}$ ،

فنحصل على $\widehat{EDF} < \widehat{KIE}$ ، وهذا مستحيل لأنَّ معنا وفقاً للرسم: $\widehat{EDH} = \widehat{KIH}$. ولكنَّ معنا على الشكل ١: $\widehat{FDH} > \widehat{KIH}$ وَ $\widehat{EDH} < \widehat{EIH}$ ؛ وعلى الشكل ٢: $\widehat{FDH} < \widehat{KIH}$

وَ $\widehat{EDH} > \widehat{EIH}$ ؛ فلا يمكن، إذاً، أن نحسم الأمر للزاويتين $\widehat{KIH}$ وَ $\widehat{FDF}$.

يتناول ابن الهيثم، في مواجهة هذه الصعوبة، المسألة من جديد ويبدأ بتعداد كلّ الحالات الممكنة.

جدول الحالات الممكنة

$\widehat{A} = \widehat{D} =$ زاوية قائمة — $\widehat{G} = \widehat{H} =$ زاوية قائمة (١)

$\widehat{G} = \widehat{H} =$ زاوية حادَّة (٢)

$\widehat{G} = \widehat{H} =$ زاوية منفرجة، وهذه حالة ترجع إلى (٢) (*)

$\widehat{A} = \widehat{D} <$ زاوية قائمة — $\widehat{G} = \widehat{H} = \widehat{A}$ (٣)

$\widehat{G} = \widehat{H} =$ زاوية منفرجة $< \widehat{A}$ (٤)

$\widehat{G} = \widehat{H} =$ زاوية قائمة (٥)

$\widehat{G} = \widehat{H} =$ زاوية منفرجة $> \widehat{A}$ (٦)

$\widehat{G} = \widehat{H} =$ زاوية حادَّة، وهذه حالة ترجع إلى (٤) أو (٦) (*)

زاوية قائمة $> \widehat{D}=\widehat{A}$ (٧) $\widehat{A}=\widehat{H}=\widehat{G}$

(٨) $\widehat{A} > \widehat{H}=\widehat{G}$

(٩) زاوية قائمة $= \widehat{H}=\widehat{G}$

(١٠) $\widehat{A} <$ زاوية حادّة $= \widehat{H}=\widehat{G}$

(*) (١٠) أو (٨) زاوية منفرجة، وهذه حالة ترجع إلى $= \widehat{H}=\widehat{G}$

ولقد رمزنا بـِ (*) إلى القول: إذا كانت الزاوية $\widehat{AGB}$ حادَّة تكون الزاوية $\widehat{AGC}$ عندئذ منفرجة، وإذا كانت الزاوية $\widehat{AGB}$ منفرجة تكون عندئذ الزاوية $\widehat{AGC}$ حادَّة.

وسوف ندرس حالة واحدة فقط من هذه الحالات، والحالة الأخرى يتمُّ الحصول عليها بالتبديل بين الحرفين B وَ C من جهة، والحرفين E وَ F من جهة أخرى. وهكذا يتفحَّص ابن الهيثم الحالات العشر.

الحالة الأولى: $\widehat{A}=\widehat{D}=$ زاوية قائمة وَ $\widehat{G}=\widehat{H}=$ زاوية قائمة.

يكون المثلّثان ABC وَ DEF إذاً قائمَي الزاوية، ويكون AG وَ DH ارتفاعيهما الخاصّين بالوترين. ويمكن أن نكتب دائماً، سواء أكان هذان المثلّثان متشابهين أو غير متشابهين: $GB.GC=GA^2$ وَ $HE.HF=HD^2$،

فيكون:

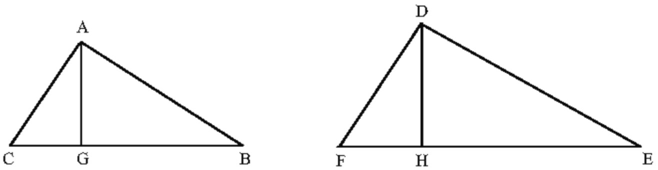
$$\frac{HE.HF}{HD^2}=\frac{GB.GC}{GA^2}. \qquad (١)$$

يُضيف ابن الهيثم عندئذ شرطاً إضافيّاً ضرورياً لكي يكون المثلّثان ABC وَ DEF متشابهين: $\frac{AG}{DH}=\frac{BC}{EF}$، فيكون:

$$\frac{BC^2}{EF^2}=\frac{AG^2}{HD^2} \qquad (٢)$$

فنحصل من (١) وَ (٢) على:

$$\frac{HE.HF}{EF^2}=\frac{GB.GC}{BC^2}. \qquad (٣)$$



الشكل ٤

ويستنتج ابن الهيثم عندئذٍ بدون تعليل المعادلة $\frac{HE}{HF}=\frac{GB}{GC}$، وبعد ذلك التشابهَ بين المثلّثين.

الحالة الثانية: $\widehat{A}=\widehat{D}=$ زاوية قائمة، $\widehat{AGB}=\widehat{DHE}\neq$ زاوية قائمة وَ

$$\frac{HE.HF}{HD^2}=\frac{GB.GC}{GA^2}. \qquad (١)$$

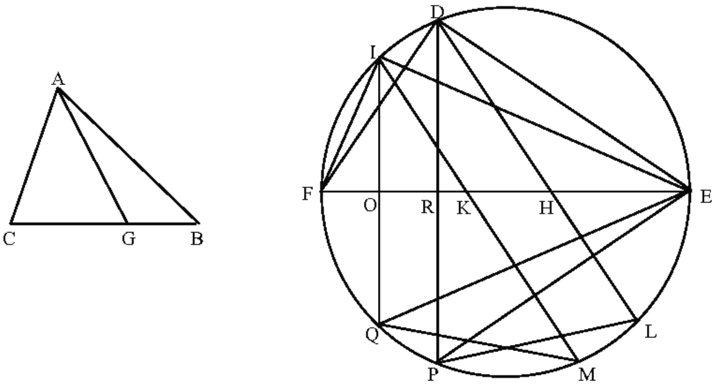
يرسم ابن الهيثم في أوّل الأمر المثلّث DEF المشابه للمثلّث ABC،($\widehat{B}=\widehat{E}$).

إذا كان $\widehat{H}=\widehat{G}$ ، يكون المثلّثان AGB وَ AGC مشابهين على التوالي للمثلّثين DHE وَ DHF وتكون العلاقة (١) مُحقّقة.

لنفترِض أنّه يوجَد مثلّث EIF ونقطة K على EF بحيث يتحقّق:

$\widehat{I}=\widehat{A}=$ زاوية قائمة، $\widehat{IKE}=\widehat{AGB}\neq$ زاوية قائمة وَ $\frac{HE.KF}{KI^2}=\frac{GB.GC}{GA^2}$.

يكون معنا عندئذ $IK \,//\, DH$ وَ $\frac{HE.HF}{HD^2}=\frac{KE.KF}{KI^2}$.



الشكل ٥

يقطع الخطّان DH وَ IK الدائرة ذات القطر EF وفقاً للترتيب على L وَ M ؛ ويكون معنا:

$$KE.KF = KI.KM \quad \text{وَ} \quad HL.HD = HE.HF \text{ ،}$$

فيكون إذاً: $\frac{HL}{HD} = \frac{KM}{KI}$، وهذا ما يؤدّي إلى $\frac{MI}{KI} = \frac{LD}{HD}$،

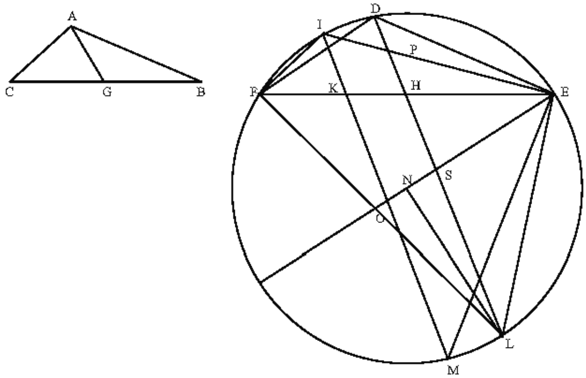
ولكنّ $\frac{MI}{IO} = \frac{LD}{DR} \Leftarrow \frac{KI}{IO} = \frac{HD}{DR}$ وَ $\frac{MI}{IQ} = \frac{LD}{DP}$؛ ويكون من جهة أخرى $\widehat{MIQ} = \widehat{LDP}$، فيكون المثلّثان LDP وَ MIQ متشابهين، ويكون $\widehat{IMQ} = \widehat{DIP}$، وهذا ما يؤدّي إلى $\widehat{IEQ} = \widehat{DEP}$؛ وهذا مستحيل لأنَّ $\frac{1}{2}\widehat{DEP} = \widehat{DEF}$ وَ $\frac{1}{2}\widehat{IEQ} = \widehat{IEF}$، فيكون معنا $\widehat{IEF} \neq \widehat{DEF}$.

وهكذا يكون المثلّثان ABC وَ DEF متشابهين، ولا يوجَد أيُّ مثلّث آخر مُحقّقٍ للشروط نفسها بدون أن يكون مشابهاً لهما.

الحالة الثالثة: $\widehat{D} = \widehat{A}$ ؛ $\widehat{DHE} = \widehat{AGB}$ > زاوية قائمة ، وَ $\frac{HE.HF}{HD^2} = \frac{GB.GC}{GA^2}$.

لنرسم على القطعة EF القوس القابلة للزاوية $\widehat{A}$.

لتكن النقطة D بحيث يكون $\widehat{B}=\widehat{DEF}$ ولتكن H بحيث يكون $\widehat{AGB}=\widehat{DHE}$. نـــبيِّن، كما فعلنا في الحالة السابقة، أنَّ العلاقة (١) مُحقّقة وأنَّ المثلّثين ABC وَ DEF متشابهان.



الشكل ٦

لنفرض أنّه يوجّد مثلّث EIF ونقطة K على EF بحيث يكون:

$$\widehat{A}=\widehat{EIF} \text{ ، } \widehat{A}=\widehat{IKE}=\widehat{AGB} \text{ ، وَ } \frac{KE.KF}{KI^2}=\frac{GB.GC}{GA^2} \text{ ،}$$

فتكون النقطة I إذاً على القوس $\widehat{EDF}$ ، ويكون $IK \,//\, DH$ وَ $\widehat{B}\neq\widehat{IEF}$.

يكون معنا: $\frac{KE.KF}{KI^2}=\frac{HE.HF}{HD^2}$.

يقطع الخطّان DH وَ IK ثانية الدائرة، حسب الترتيب، على النقطتين L وَ M؛ ويكون معنا: $HL.HD=HE.HF$ وَ $KE.KF=KI.KM$ ،
فنحصل على : $\frac{HL}{HD}=\frac{KM}{KI}$ ، فيكون بالتالي: $\frac{LD}{HD}=\frac{MI}{KI}$.

يكون معنا، وفقاً للفرضيات، $\widehat{EDF}=\widehat{EHD}$ ، فيكون $EH.EF=ED^2$. ولكنَّ $\widehat{EDF}=\widehat{EHD}$ ، فيكون $\widehat{ELF}=\widehat{EHL}$ ؛ وهذا ما يعطي $EH.EF=EL^2$. فنحصل على $ED=EL$ وَ $\widehat{EL}=\widehat{ED}$.

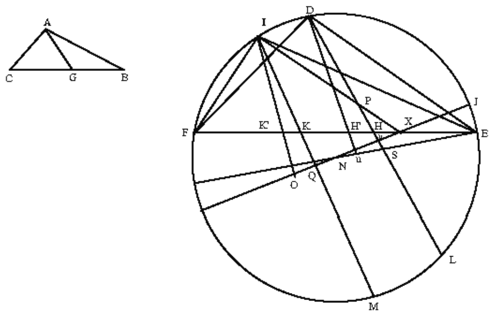
وإذا كانت النقطة N مركز الدائرة فيكون $EN \perp DL$ و $EN \perp IM$. يقطع الخطّ EN القطعتين DL وَ IM على التوالي في وسطيهما O وَ S، فيكون معنا إذاً: $\frac{SD}{DH} = \frac{OI}{IK}$.

نستخرج من ذلك: $\frac{SP}{PH} = \frac{SD}{DH}$، وهذا مستحيل لأنَّ $HD \neq HP$.

والاستدلال صالحٌ مهما كان موضِع النقطة I على القوس $\widehat{EDF}$ القابلة للزاوية $\widehat{A}$:
إذا كانت I على القوس $\widehat{DF}$، تكون النقطة P بين H وَ D مع $HD > HP$ ؛ إذا كانت I على القوس $\widehat{DE}$، تكون النقطة P أبعد من D مع $HD < HP$. ويكون المثلّثان ABC وَ DEF متشابهين، في هذه الحالة أيضاً، ولا يوجَد أيُّ مثلّث آخر مُحقّقٍ للشروط نفسها بدون أن يكون مشابهاً لهما.

الحالة الرابعة: $\widehat{AGB} = \widehat{DHE} > \widehat{A} = \widehat{D} >$ زاوية قائمة وَ $\frac{HE.HF}{HD^2} = \frac{GB.GC}{GA^2}$.

يتناول ابن الهيثم ثانية، كما فعل في الحالة السابقة، الرسم على القطعة الاختيارية EF للقوس القابلة للزاوية $\widehat{A}$، ويرسم المثلّث DEF المشابه للمثلّث ABC، ويأخذ النقطة H بحيث يكون $\widehat{AGB} = \widehat{DHE} > \widehat{A}$ ؛ وتكون العلاقة (١) مُحقّقة.



الشكل ٧

ليكن EIF مثلّثاً مُحقّقاً للفرضيات بدون أن يكون مشابهاً للمثلّث ABC. الرموز المستخدَمة هي رموز الحالة السابقة نفسها. يكون معنا:

$$\frac{KE.KF}{KI^2}=\frac{HE.HF}{HD^2}\Leftarrow\frac{DL}{HD}=\frac{MI}{IK}.$$

يكون معنا: $\widehat{A}<\widehat{DHE}$ ؛ إذا أخرجنا من D الخطّ DH' بحيث يكون $\widehat{A}=\widehat{DH'E}$ ، تكون النقطة H' عندئذ بين H وَ F ويكون الخطّ DH' عموديّاً على EN. وكذلك يكون الأمر بالنسبة إلى الخطّ IK' الموازي للخطّ DH'.

يقطع الخطُّ، الخارِجُ من N عموديّاً على DL وَ IM، القوسَ $\widehat{DE}$ على النقطة J. ويقطع هذا الخطُّ DL وَ IM ، وفقاً للترتيب، في وسطيهما U وَ Q، كما يقطع EF على X. ويقطع الخطُّ IX الخطَّ DL على النقطة P (الشكل ٧)؛ يكون معنا:

$$\frac{DL}{HD}=\frac{MI}{IK}\Leftarrow\frac{QI}{IK}=\frac{UD}{HD}.$$

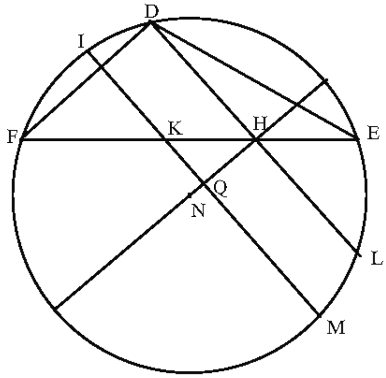
الخطّان QI وَ UD متوازيان؛ والقسمتان (P, H, U) وَ (I, K, Q) متشابهتان، فيكون إذاً: $\frac{QI}{IK}=\frac{UP}{PH}$ ، وبالتالي $\frac{UP}{HP}=\frac{UD}{HD}$.

إذا كانت X بين H وَ E ، كما هي الحال في كتابة ابن الهيثم، وإذا كانت I بين D وَ F، يكون عندئذ $UD > HD$ وَ $UP > HP$، ويمكن أن نكتب : $\frac{UP-HP}{HP}=\frac{UD-HD}{HD}$،

أيْ $\frac{UH}{HP}=\frac{UH}{HD}$؛ وهذا مستحيل لأنَّ $HD \neq HP$.

ولكن، هناك حالات أخرى ممكنة للشكل:

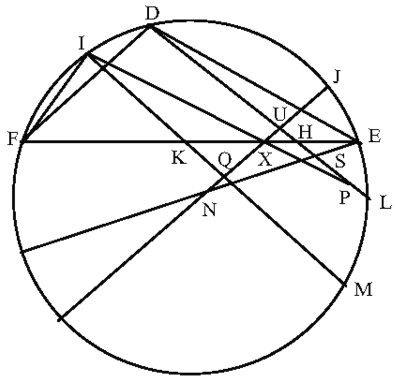
ا– يمكن أن تكون النقطة H في وسط DL، فيكون NH عندئذ عموديّاً على DL وتكون النقاط U، H، X وَ P متطابقة.



الشكل ٨

ويكون في هذه الحالة $HD^2 = HE.HF$. فينتج من ذلك أنَّ $KI^2 = KE.KF$ ؛ وهذا مستحيل، لأنّه، مهما كانت النقطة I مع $I \neq D$ ، فإنَّ النقطة K لا تكون في وسط MI.

ب) يمكن أن تكون النقطة U بين H وَ D وأن تكون النقطة X بين H وَ F. وإذا كانت K على XF (الشكل ٩)، تكون P على نصف الخطّ المستقيم HL. يكون معنا عندئذ $UD < HD$؛ ولكنَّ $HP < UP$، فتكون المعادلة $\frac{UP}{HP} = \frac{UD}{HD}$ مستحيلة لأنَّ $\frac{UD}{HD} < 1$.



الشكل ٩

جـ) يمكن أن تكون النقطة U بين H وَ D وأن تكون النقطة X بين H وَ F، ولكن مع كون النقطة K في X. ولا يقطع الخطُّ XI، في هذه الحالة، الخطَّ DL (تكون النقطة P في اللانهاية) ويكون $X=K=Q$. وتكون النقطة K في وسط MI، فيكون إذاً

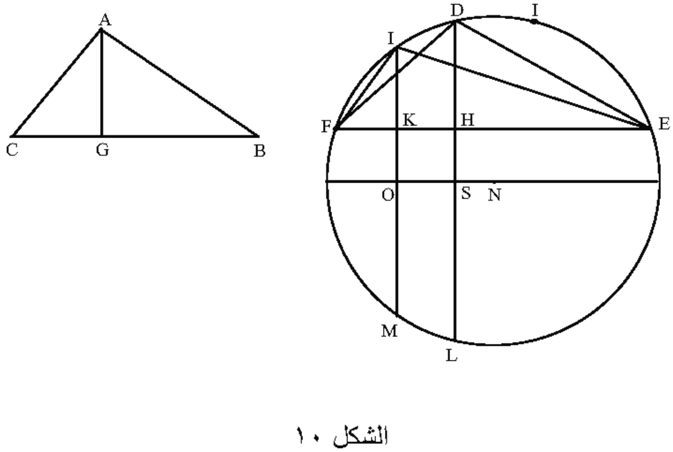
$KI^2 = KE.KF$ ؛ ولكنَّ $HD^2 \neq HE.HF$ ، فيكون من المستحيل أن نحصل على $\frac{KE.KF}{KI^2} = \frac{HE.HF}{HD^2}$.

د) يمكن، أخيراً، أن تكون النقطة U بين H وَ D وأن تكون النقطة X بين H وَ F؛ ولكنَّ K قد تكون بين X وَ H، فتكون P عندئذ على نصف الخطّ المستقيم HD وأبعد من D. فيمكن أن نحصل على: $\frac{UP}{HP} = \frac{UD}{HD}$ ، لأنَّ $D \neq P$ ولأنَّ النقطتين D وَ P موجودتان خارج القطعة UH. وهكذا نخلُــص إلى أنَّ كلَّ مثلّث يُحقق الفرضيات مشابه بالضرورة للمثلّث ABC.

الحالة الخامسة: $\widehat{A} = \widehat{D} <$ زاوية قائمة، $\widehat{G} = \widehat{H} =$ زاوية قائمة، وَ $\frac{HE.HF}{HD^2} = \frac{GB.GC}{GA^2}$.

إذا كان $\widehat{B} = \widehat{DEF}$ ، يكون المثلّث DEF مشابهاً للمثلّث ABC ومحقّقاً للعلاقة (١).

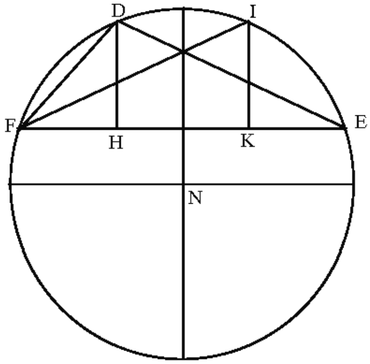
ليكن المثلّث EIF غير مشابه للمثلّث ABC ولتكن I على القوس $\widehat{EDF}$ مع $I \neq D$ ؛ ولنفرض أنَّ $\frac{HE.HF}{HD^2} = \frac{KE.KF}{KI^2}$.



الشكل ١٠

ليكن NO القطر الموازي للخطّ EF. نستخرج من المعادلة الأخيرة، كما فعلنا في الحالات السابقة، $\frac{DS}{DH} = \frac{IO}{IK}$ وَ $\frac{SH}{DH} = \frac{OK}{IK}$ ؛ ولكنَّ $SH = KO$، فنحصل على $IK = DH$.

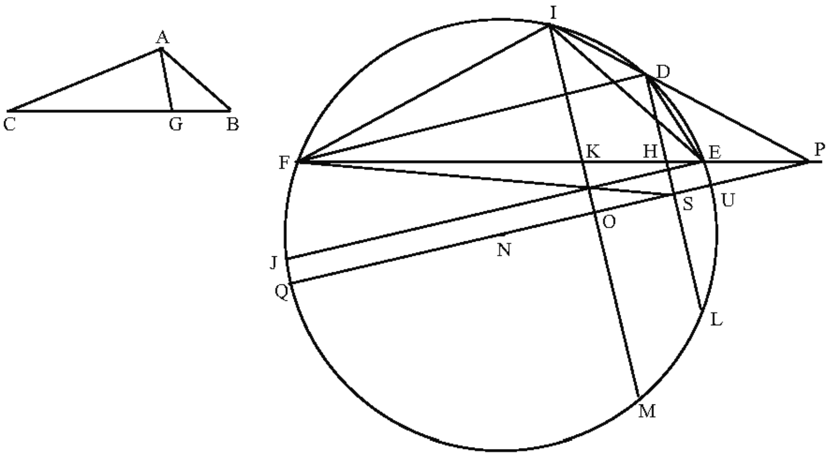
لنلاحظ أنّه توجَد نقطة I بحيث يكون $I \neq D$ وَ $IK = DH$، وهي النقطة المتناظرة مع D بالنسبة إلى المنصِّف العموديّ للقطعة EF. يكون المثلّثان EIF وَ EDF عندئذ متقايسين فيكونا مشابهين للمثلّث ABC، ولكن مع $\widehat{B} \neq \widehat{IEF}$ وَ $\widehat{C} = \widehat{IEF}$.



الشكل ١١

والخلاصة هي أنَّ كلّ مثلّث مُحقّق للفرضيات مشابهٌ للمثلّث ABC.

الحالة السادسة: $\widehat{A} = \widehat{D} > \widehat{BGA} = \widehat{EHD} >$ زاوية قائمة، وَ $\frac{HD.HF}{HD^2} = \frac{GB.GC}{GA^2}$.



الشكل ١٢

ليكن معنا دائرة مركزها N، وليكن EF وتراً من هذه الدائرة، ولتكن P نقطة على الامتداد المستقيم للقطعة EF، وليكن معنا أيضاً خطٌّ خارجٌ من P يقطع القوس الصغرى $\widehat{EF}$ على النقطتين D وَ I الموجودتين على نصف القوس $\widehat{EF}$ من جهة E. يقطع الخطّ NP الدائرة على النقطتين U وَ Q.

نــُخرِج الخطَّيْن DH وَ IK العموديَّيْن، في S وَ O وفقاً للترتيب، على NP؛ ونــُخرِج الخطّ EJ الموازي للخطّ NP. يكون معنا:

(١) $\widehat{DHP}=\widehat{IKP}=\widehat{FPQ}$ + زاوية قائمة = $\widehat{FEJ}$ + زاوية قائمة.

توتّر الزاويتان $\widehat{EDF}$ وَ $\widehat{IEF}$ القوس $\widehat{EUQJF}$ التي تساوي:

$\widehat{EU}$ + نصف دائرة + $\widehat{QJ}+\widehat{JF}$ ،

فيكون إذاً:

(٢) $\widehat{EDF}=\widehat{EIF}=$ زاوية قائمة+ $\widehat{FEJ}+2\alpha$ ،

حيث تكون α الزاوية المحاطة التي توتّر $\widehat{EU}$ وَ $\widehat{QJ}$.

ونستخرج من (١) وَ (٢) أنَّ $\widehat{EDF}=\widehat{DHE}+2\alpha$.

نتناول إذاً المثلّثين EDF وَ EIF والمثلّث ABC المشابه للمثلّث EDF، ونتناول النقطة G على BC بحيث يكون $\widehat{DHE}=\widehat{AGB}$ ؛ يكون معنا إذاً: $\frac{HE.HF}{HD^2}=\frac{GB.GC}{GA^2}$.

يكون معنا من جهة أخرى $\frac{DS}{DH}=\frac{IO}{IK}$(قسمتان متشابهتان)، فنحصل على $\frac{DL}{DH}=\frac{IM}{IK}$.

فيكون من ذلك: $\frac{HL}{HD}=\frac{KM}{KM}$ وَ $\frac{HL.HD}{HD^2}=\frac{KM.KI}{KI^2}$، فنحصل على $\frac{KE.KF}{KI^2}=\frac{HE.HF}{HD^2}$.

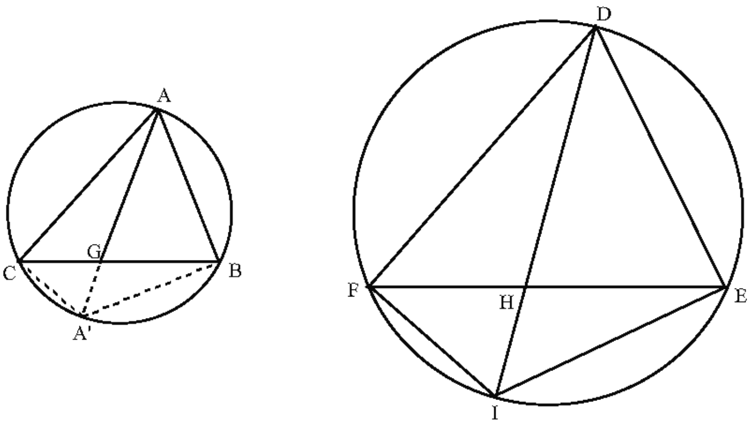
يُحقّق المثلّثان EDF وَ EIF إذاً الفرضيات نفسها التي يُحقّقها المثلّثان المتشابهان EDF و ABC؛ ولكنَّ المثلّث EIF غيرُ مشابه للمثلّث EDF، لأنَّ $\widehat{DEF}>\widehat{IEF}$ وَ $\widehat{DFE}<\widehat{IFE}$ ، فلا يكون إذاً مشابهاً للمثلّث ABC.

ملاحظة: إنَّ الشروط المعطاة غير كافية لكي يكون مثلّثان معلومان متشابهين.

الحالة السابعة: $\widehat{A}=\widehat{D}=\widehat{BGA}=\widehat{EHD}<$ زاوية قائمة، وَ

$$\frac{GB.GC}{GA^2}=\frac{HD.HF}{HD^2}. \qquad (١)$$

ليكن معنا المثلّث ABC ونقطة G على BC بين B وَ C بحيث تكون الزاوية $\widehat{A}=\widehat{BGA}$ حادَّة؛ ولتكن معنا القطعة EF التي نرسم عليها القوس القابل للزاوية $\widehat{A}$. ونأخذ على هذه القوس النقطة D بحيث يكون $\widehat{B}=\widehat{DEF}$؛ فيكون المثلّث DEF عندئذ مشابهاً للمثلّث ABC، وإذا أخذنا النقطة H على EF بحيث يكون $\widehat{A}=\widehat{D}=\widehat{DHE}$، تكون H بين E وَ F وتكون معنا المعادلة (١).



الشكل ١٣

يقطع الخطُّ DH الدائرة DEF على النقطة I، فيكون معنا عندئذ

$$180^\circ-\widehat{D}=\widehat{EIF}=\widehat{IHE}.$$

ملاحظة: يقطع الخطُّ AG، ثانية، الدائرة المحيطة بالمثلّث ABC على النقطة A' ويكون معنا: $180^\circ-\widehat{A}=\widehat{BGA'}=\widehat{BA'C}$، فيحقّق المثلّثان $A'BC$ وَ IEF فرضيات الحالة الثالثة. ولكنّنا قد رأينا أنّه لا يوجَد مثلّث مُحقّقٌ للميزات المطلوبة بدون أن

يكون مشابهاً للمثّلث $A'BC$. فنستنتج من ذلك أنّه لا يوجَد مثّلث مُحقّقٌ لفرضيات الحالة السابعة بدون أن يكون مشابهاً للمثّلث ABC.

الحالة الثامنة: $\widehat{BGA} = \widehat{EHD} > \widehat{A} = \widehat{D} >$ زاوية قائمة، وَ

$$(١) \qquad \frac{HD.HF}{HD^2} = \frac{GB.GC}{GA^2}.$$

نقوم بالاستدلال كما فعلنا في الحالة السابعة؛ يكون معنا:

$$\widehat{BA'C} = \widehat{EHI} > \widehat{A'} >$$ زاوية قائمة.

يحقّق المثّلثان $A'BC$ وَ IEF فرضيات الحالة الرابعة. وكنّا قد رأينا أنَّ IEF مشابه للمثّلث $A'BC$ وأنّه لا يوجَد مثّلث مُحقّقٌ لهذه الفرضيات بدون أن يكون مشابهاً للمثّلث $A'BC$.

فلا يوجَد إذاً مثّلث مُحقّقٌ لفرضيات الحالة الثامنة بدون أن يكون مشابهاً للمثّلث ABC.

الحالة التاسعة: $\widehat{A} = \widehat{D} >$ زاوية قائمة، $\widehat{BGA} = \widehat{HED} =$ زاوية قائمة، وَ $\frac{HD.HF}{HD^2} = \frac{GB.GC}{GA^2}$.

نُرجِع هذه الحالة، بواسطة الاستدلال نفسه المستخدَم في الحالة السابقة، إلى الحالة الخامسة.

الحالة العاشرة: $\widehat{A} = \widehat{D} > \widehat{BGA} = \widehat{EHD} >$ زاوية قائمة، وَ $\frac{HD.HF}{HD^2} = \frac{GB.GC}{GA^2}$.

نُـرجِع هذه الحالة، بالطريقة نفسها، إلى الحالة السادسة، ونستنتج أنَّ بالإمكان أن نرسم على القطعة المعلومة EF مثلّثاً مشابهاً للمثّلث ABC ومحقّقاً للفرضيات، وأن نرسم مثلّثاً آخر محقّقاً للفرضيات بدون أن يكون مشابهاً للمثّلث ABC. فيجب، إذاً، إدخال الشرط الإضافيّ.

١) إنّ هدف ابن الهيثم المُعلَن، كما قلنا، هو معالجة نقاط الضعف التي لم تسترعِ انتباه بني موسى عند صياغة وبرهان المقدّمة التاسعة. فينبغي عليه، بعبارة أخرى، أن يجد الشروط الضرورية والكافية لكي تكون هذه المقدّمة صحيحة في الحالة العامّة. لنتناول في الختام هذه المسألة.

يمكن أن نعتبر أنّ قضية بني موسى مطابقة للقضية العكسية للقضية التالية:

إذا كان المثلّثان ABC وَ DEF متشابهين – على أن تكون النقاط D ، E وَ F مماثلة للنقاط A ، B وَ C –، وإذا كانت $G \in [BC]$ وَ $H \in [EF]$ بحيث يكون $\widehat{EHD} = \widehat{BGA}$ ، يكون معنا عندئذ $\frac{HE.HF}{HD^2} = \frac{GB.GC}{GA^2}$ (الشكل ١).

برهان هذه القضية مباشر، إذ يمكن أن نكتب:

$$\widehat{D} = \widehat{A} \text{ ، } \widehat{E} = \widehat{B} \text{ ، } \widehat{AGB} = \widehat{DHE} \Leftarrow \frac{HE.HF}{HD^2} = \frac{GB.GC}{GA^2}.$$

لنثبت هنا أنّ (١) وَ (٣) تتضمّن (٢)، حيث يكون:

(١) $\widehat{D} = \widehat{A}$

(٢) $\widehat{AGB} = \widehat{DHE} \Leftarrow \widehat{E} = \widehat{B}$

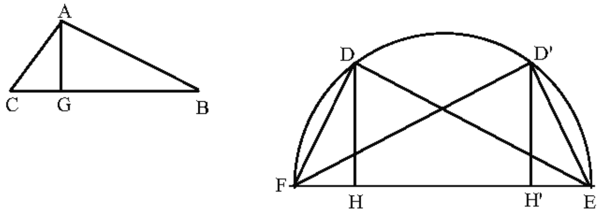
(٣) $\frac{HE.HF}{HD^2} = \frac{GB.GC}{GA^2}$.

لقد رأينا أنّ ابن الهيثم يُميِّز بين عشر حالات في دراسته لهذه القضية العكسية وأنّه يُبيِّن أنّها مغلوطة في حالتين مهمّتين هي الحالة الأولى والحالة السادسة. وهو يقترح، لكي تكون الشروط كافية وضرورية، ولكي تكون بذلك المقدّمة صحيحة دائماً، إضافة الشرط التالي:

(٤) $$\frac{AG}{BC} = \frac{DH}{EF}.$$

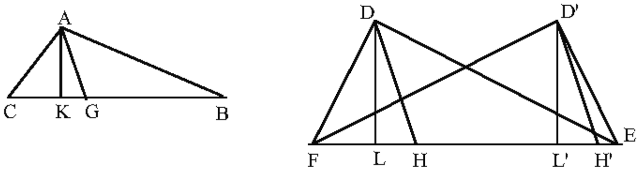
لنتناول مع هذا الشرط (٤) الحالتين غير المحسومتين: الأولى والسادسة.

يكون معنا في الحالة الأولى $\widehat{AGB} = \widehat{DHE} = \widehat{D} = \widehat{A}$ = زاوية قائمة؛ ويكون المثلّثان ABC وَ DEF قائمَي الزاوية، ويكون AG وَ DH ارتفاعيهما الخاصّين بالوترين. والفرضية (٣) هي خاصّة مشتركة بين كلّ زوج من المثلّثات القائمة الزاوية المتشابهة أو غير المتشابهة. وهي تبدو كأنّها شرطٌ غير ضروريّ. وإذا استبدلناها بالشرط (٤)، يكون المثلّثان ABC وَ DEF متشابهين، وفقاً لأقليدس، "المعلومات"، ٧٩. ولكن يُمكن أن يكون لدينا E مماثلة لِـ B وَ F مماثلة لِـ C أو E مماثلة لِـ C وَ F مماثلة لِـ B.



الشكل ١٤

ويكون معنا في الحالة السادسة: $\widehat{AGB} = \widehat{DHE} < \widehat{D} = \widehat{A}$ > زاوية قائمة؛ فلا يكون AG وَ DH ارتفاعين.



الشكل ١٥

ليكن AK وَ DL الارتفاعين. يكون معنا $AG.\sin\alpha = AK$ وَ $DH.\sin\alpha = DL$. فيكون الشرط (٤) معادلاً للعلاقة $\frac{DL}{EC} = \frac{AK}{BC}$. يؤدّي هذا الشرط مع الشرط (١) ($\widehat{D} = \widehat{A}$) إلى التشابه بين المثلّثين ABC وَ DEF، مع وجود إمكانيتين، كما كان سابقاً، وهما : E مماثلة لِـ B وَ F مماثلة لِـ C أو E مماثلة لِـ C وَ F مماثلة لِـ B.

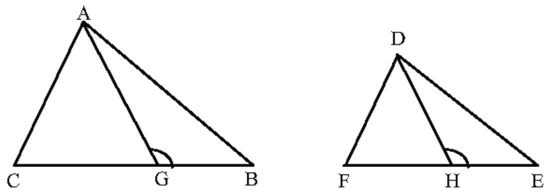
ولا يتحقّق الشرط (٣) إلا إذا كانت E مماثلة لـِ B في المثلّث EDF؛ وهو لا يتحقّق للمثلّث $D'EF$ ، لأنَّ معنا $DH = D'H'$ ، ولكنَّ $HE.HF \neq H'E.H'F$.

ويكون الشرطان (٣) وَ (٤)، هنا، متكاملين ويسمحان بالوصول إلى النتيجة $\widehat{B} = \widehat{E}$.

وهكذا تكون مقدِّمة بني موسى مع الشرط (٤) صحيحة في جميع الحالات.

٢) يبقى علينا أن نعرف كيف استطاع ابن الهيثم أن يجد الشرط (٤) وكيف يسمح هذا الشرط، بعد إضافته إلى شروط بني موسى، ببرهان المقدّمة في الحالة العامةبدون التمييز بين الحالات العشر؛ وذلك أنَّ ابن الهيثم لم يُقدِّم هذا البرهان. وربَّما اعتبر ابن الهيثم أنّه لم يكن من الضروريّ إعطاء هذا البرهان، بعد أن صحَّح الحالتين المغلوطتين؛ وربَّما لم يُفكِّر بالقيام به، بسبب تعدُّد الحالات التي تمَّ تمييزها.

لنبدأ بتناول المثلّثين المتشابهين ABC وَ DEF، مع G على BC وَ H على EF بحيث يكون $\widehat{D} = \widehat{A}$ وَ $\widehat{B} = \widehat{E}$ وَ $\widehat{DHE} = \widehat{AGB}$ (الشكل ١٦).



الشكل ١٦

المثلّثان AGB وَ DHE متشابهان وكذلك هي حال المثلّثين AGC وَ DHF. يكون معنا عندئذ:

$$\frac{AC}{DF} = \frac{GC}{FH} = \frac{AG}{DH} = \frac{GB}{HE} = \frac{AB}{DE} ،$$

فيكون:

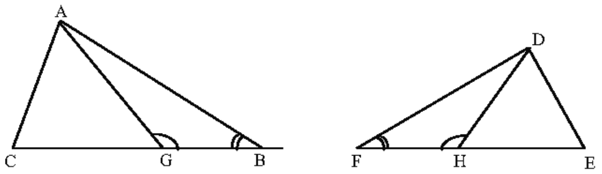
$$\frac{AG}{DH} = \frac{GB+GC}{HE+HF} ؛ \frac{GB.GC}{HE.HF} = \frac{AG^2}{DH^2} ،$$

أي أنَّ:

$$\frac{HE}{HF} = \frac{GB}{GC} \text{ وَ } \frac{AG}{DH} = \frac{BC}{EF} ،$$

فتكون القسمتان (B, G, C) وَ (E, H, F) متشابهتين.

إذا وضعنا $\widehat{B}=\widehat{F}$ بدلاً من $\widehat{B}=\widehat{E}$ (الشكل ١٧)، ينبغي علينا أن نـُبَدِّل بين الدور الذي تلعبه E والدور الذي تلعبه F، فنضع $\widehat{DHF}=\widehat{AGB}$.



الشكل ١٧

فتبقى النتيجة: $\frac{GB.GC}{HE.HF}=\frac{AG^2}{DH^2}$ وَ $\frac{AG}{DH}=\frac{GB+GC}{HE+HF}$ بدون تغيير، ولكنَّ القسمة (B, G, C) تكون مشابهة للقسمة (F, H, E). وهكذا نحصل على الشرطين (٣) وَ (٤) بواسطة التحليل السابق. لنتناول الآن مقدِّمة بني موسى مع إضافة الشرط (٤)؛ ولنبيِّن أنَّ $\widehat{B}=\widehat{E}$.

مقدِّمة بني موسى المُعدَّلة من قِبَل ابن الهيثم

يكون المثلثان ABC وَ DEF، متشابهين إذا، وفقط إذا، تحققت الشروط التالية:

(١) $\widehat{D}=\widehat{A}$

(٢) $\widehat{AGB}=\widehat{DHE}$

(٣) $\frac{GB.GC}{GA^2}=\frac{HE.HF}{HD^2}$.

(٤) $\frac{AG}{BC}=\frac{DH}{EF}$.

نستخرج من (٣) وَ (٤) :

$$\frac{GB.GC}{BC^2}=\frac{HE.HF}{EF^2} \qquad (٥)$$

$$\frac{GC}{BC}-\frac{GC^2}{BC^2}=\frac{HF}{EF}-\frac{HF^2}{EF^2}\Leftrightarrow\frac{(BC-GC).GC}{BC^2}=\frac{(EF-HF).HF}{EF^2}\Leftrightarrow \text{(٥)}$$

$$0=\left(\frac{GC}{BC}-\frac{HF}{EF}\right)\left[1-\left(\frac{GC}{BC}+\frac{HF}{EF}\right)\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{GC}{BC}=\frac{HF}{EF} \text{ أو } 1=\left(\frac{GC}{BC}+\frac{HF}{EF}\right).$$

يكون لدينا عندئذ حالتان:

أ) إذا كان $\frac{GC}{BC}=\frac{HF}{EF}$، تكون القسمتان (B, G, C) وَ (E, H, F) متشابهتين، ويكون معنا: $\frac{GB}{HE}=\frac{GC}{HF}=\frac{BC}{EF}$.

ب) إذا كان $\frac{GC}{BC}=\frac{HE}{EF}$، تكون القسمتان (B, G, C) وَ (F, H, E) متشابهتين، ويكون معنا: $\frac{GB}{HF}=\frac{GC}{EH}=\frac{BC}{EF}$.

ونمرُّ من الحالة أ) إلى الحالة ب) بالتبديل بين دورَيْ E وَ F.

لنعالج هاتين الحالتين:

أ) الفرضيات هي:

(١) $\widehat{D}=\widehat{A}$

(٢) $\frac{GC}{HF}=\frac{BC}{EF}$

(٣) $\widehat{AGB}=\widehat{DHE}$.

(٤) $\frac{AG}{BC}=\frac{DH}{EF}$.

نستخرج من (٢) وَ (٤) المعادلة $\frac{AG}{DH}=\frac{GB}{HE}$، فيكون المثلّثان AGB وَ DHE (الشكل ١٦) متشابهين، فيكون $\widehat{B}=\widehat{E}$، فيكون المثلّثان ABC وَ DEF متشابهين وتكون النقاط متقابلة وفقاً للترتيب $(A, B, C) \leftarrow (D, E, F)$.

ب) الفرضيات هي:

(١) $\widehat{D}=\widehat{A}$

(٢) $\frac{GC}{HF}=\frac{GB}{HF}$

(٣) $\widehat{AGB}=\widehat{DHF}$.

(٤) $\frac{AG}{BC}=\frac{DH}{EF}$.

نستخرِج من (٢) وَ (٤) المعادلة $\frac{AG}{DH}=\frac{GB}{HF}$، فيكون المثلّثان AGB وَ DHF (الشكل ١٧) متشابهين، فيكون $\widehat{B}=\widehat{F}$، فيكون المثلّثان ABC وَ DFE متشابهين وتكون النقاط متقابلة وفقاً للترتيب $(A, B, C) \leftarrow (D, F, E)$. وهكذا يتمُّ برهان المقدِّمة.

١ ـ ٢ تاريخ النصّ

يوجَد مؤلَّف ابن الهيثم "في شكل بني موسى" في خمس مخطوطات.

١) المخطوطة الأولى توجَد ضمن مجموعة مُهمَّة موجودة في قسم منها في المتحف العسكري في إسطنبول، المتحف العسكري (*Askari Müze 3025*، غير مُرقّمة) ، وهي منسوخة بيد الرياضيّ قاضي زاده بين سنة ١٤١٤ وَ سنة ١٤٣٥ للميلاد. ويحتلُّ مؤلَّف ابن الهيثم فيها الأوراق ١ظ – ٨ظ. وسوف نرمز إليها هنا بِـ [س].

ولقد توقّفنا مُطوّلاً حول تاريخ هذه المجموعة[٢]؛ فبيَّنّا على الأخصّ أنَّ هذه المجموعة الموجودة في المتحف العسكري هي قسم من مجموعة كبرى يوجد قسمها الآخر في برلين (*OCT/2970*). وتحتوي هذه المجموعة في قسميها على مؤلّفات عديدة لابن الهيثم. ولقد بيّنّا أيضاً أنَّ مجموعة عاطف ١٧١٤ في المكتبة السليمانية في اسطنبول قد نُـسخت بكاملها عن هذه المجموعة بدون غيرها.

٢) المخطوطة الثانية لهذا المؤلّف هي، في الواقع، جزء من المجموعة الأخيرة، أي مجموعة عاطف ١٧١٤، وهي تحتلُّ الأوراق ١٤٩و – ١٥٧و. ولقد رمزنا إليها بـِ [ت].

٣) توجد المخطوطة الثالثة في مكتبة جامعة عليكرة (*Aligarh*) في الهند، رقم ١، الأوراق ٢٨ – ٣٨. وتاريخ الانتهاء من نسخها هو سنة ١٠٧٢ للهجرة (تشرين الثاني/نوفمبر سنة ١٦٦١ للميلاد) في جهان آباد. ولقد أنهيَ نقل المجموعة في ٢٦ رجب سنة ١٠٧٥ للهجرة، أي في ١٢ شباط/فبراير ١٦٦٥[٣]. والنسخة مكتوبة بخطّ نستعليق مُتقَن. كلُّ ورقة هي بمساحة ٢٥,٦×١١,٦ وفيها ٢٥ سطراً، وفي كلّ سطر ١٣ كلمة تقريباً. ونرمز إلى هذه المجموعة بِ [أ].

٤) توجد المخطوطة الرابعة ضمن مجموعة المتحف البريطاني في لندن (*British Museum, Add. 14332/2*) على الأوراق ٤٢–٦١. ولقد بيّنّا بخصوص مؤلّف لابن سنان[٤] أنَّ هذه المجموعة ذات أصل وحيد هو مجموعة عليكرة رقم ١. إنَّ التفحُّص الدقيق لنص ابن الهيثم يؤكـِّد، إذا اقتضت الحاجة، هذه النتيجة نفسها. وكلّ الأخطاء في [أ] متواجدة في [ب]؛ ولكن، قد يحدث أن تكون بعض الأخطاء اللغوية في [ب] مصحَّحة. ولقد نُـسخت هذه المجموعة، هي أيضاً، في الهند ونقِلت

---

[٢] انظر الفصل الثالث، أدناه، ص. ٤٥٦-٤٥٧.

[٣] تُشير الجملة الختامية لمؤلف ابن سنان "في رسم القطوع الثلاثة" إلى أنّه قد نُسِخَ بيد محمَّد أكبر آبادي. انظر، ص. ٢٦١:
R. Rashed et H. Bellosta : Ibrāhīm ibn Sinān, Logique et géométrie au Xème siècle (Leiden, E. J. Brill, 2000)

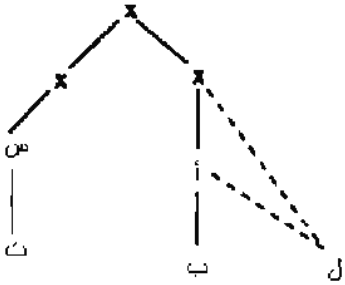
[٤] انظر المرجع السابق، ص. ٢٦١.

إلى المتحف البريطاني في منتصف القرن التاسع عشر. كان بإمكاننا الاستغناء عن هذه المخطوطة الأخيرة عند تحقيقنا لنصّ ابن الهيثم، إذ إنّ [ب] تتعلّق بـ [أ] دون غيرها. ونرمز هنا إلى هذه المخطوطة بـ [ب].

٥) توجَد هذه المخطوطة ضمن مجموعة المكتب الهندي في لندن:

(*India Office* n^0*I270=Loth 734*) على الأوراق ٢٨و – ٢٨ظ، وهي نسخة منقوصة نرمز إليها بـ [ل]. إنّ تفحُّص هذا المقطع القصير يُبيِّن أنه ينتمي إلى نفس فصيلة [أ] وَ [ب]. وذلك أنّنا نجد في هذا المقطع خمس أغلاط مشتركة مع [أ] وَ [ب] و خمس أغلاط خاصّة به.

وهكذا يكون لدينا إذاً مخطوطتان فقط لإثبات النصّ: مخطوطة المتحف العسكري [س] ومخطوطة عليكرة[أ]؛ وهذا ما يظهر على اللوحة التالية للتسلسل بين المخطوطات



لم يحظ هذا النصّ، حتّى الآن، بأيّ تحقيق نقديّ. ولقد ظهرت، لهذا النصّ، نشرة غير علمية في حيدرأباد؛ وإذا تفحّصنا الروايات المختلفة لهذا النصّ، نجد أنّ هذه النشرة قد طُبِعت استناداً إلى المخطوطة [ب] فقط. ولكنّ لهذه النشرة الفضل في لفت النظر إلى هذا المؤلّف لابن الهيثم[٥].

[٥] انظر: "مجموع الرسائل"، مكتب المنشورات العثمانية الشرقية (حيدرأباد، ١٩٣٨-١٩٣٩)، رقم ٦.

نصّ كتاب ابن الهيثم

" في شكل بني موسى"

ا – ٢٨
ل – ٢٨ – و
ب – ٤٢
ت – ١٤٩ – ظ
س – ١ – ظ

إن أحد الأشكال التي قدَّمها بنو موسى لبراهين كتاب *المخروطات*، وهو الشكل الأخير من مقدماتهم، هو على غير الصفة التي وصفوه بها. وذلك أنهم جعلوه كليًا، وهو جزئيٌ. ومع ذلك فقد لحقهم سهوٌ في البرهان عليه، ومن أجل ذلك السهو ظنوا أنه كليٌ، وهو شكل يحتاج إليه في بعض براهين أشكال *المخروطات*. ومن أجل ذلك وجب أن نشرح صورته، ونبين أنه جزئي، وأنه يصح على بعض الأوضاع ويبطل في بعض الأوضاع، وأن الذي يستعمل منه في براهين *المخروطات* هو من الأوضاع التي تصح، وأن الأوضاع التي تبطل ليس يستعمل شيء منها في كتاب *المخروطات*.

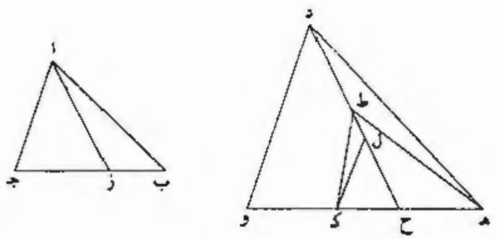
وهذا حين نبتدئ بالكلام في الشكل. فنقول: إن الشكل الذي ذكره بنو موسى، وهو على الصفة التي قدمناها، هو:

مثلثان، زاويتان منهما متساويتان، وقد خرج من الزاويتين المتساويتين / خطان إلى ب – ٤٣
وتريهما وأحاطا مع الوترين بزاويتين متساويتين، وصارت نسبة السطحين اللذين يحيط بكل واحد منهما قسما الوترين إلى مربعي الخطين الخارجين إليهما نسبتين متساويتين.

وادّعوا أن المثلثين اللذين على هذه الصفة متشابهان. وليس يلزم في هذين المثلثين أن يكونا أبدًا متشابهين. وبيّنوا تشابه هذين المثلثين ببرهان عرض لهم فيه سهو.

1 الرحيم: نحمد بعدها نعمة الله [ل] ورب يسر وتمم بالخير [س] – 2-3 قول ... موسى: مطموسة [ ] – 7 أشكال لاشكال [س] – 9 الأوضاع (الأولى): الاضاع [ل] – 10 تبطل ليس: أثبتها في الهامش [س] – 11 الذي: أثبتها فوق السطر [ ] – 13 إلى: أثبتها في الهامش [ا] – 14 وتريهما: وترهما [ت] أحاطا: احاط [ل] / اللذين: الذين [ا] – 17 وبينوا: وبين [ت، س، ل] تشابه: التشابه [ل].

فلنبين أولاً موضع السهو في برهانهم: وهو أنهم جعلوا المثلثين مثلثي ا ب جـ د هـ و، وأخرجوا فيهما خطي ا ز د ح، وجعلوا زاويتي ا د متساويتين وزاويتي ا ز ب د ح هـ أيضًا متساويتين، وجعلوا نسبة ضرب ب ز في ز جـ إلى مربع ز ا كنسبة ضرب هـ ح في / [ت-١٥٠-و] ح و إلى مربع ح د، وادعوا في هذين المثلثين أنهما يكونان أبدًا متشابهين إذا كانا على الصفة التي ذكرناها.



وبرهنوا على ذلك بأن قالوا: فإن لم تكن زاوية د هـ ح مثل زاوية ا ب ز، فإنا نجعل زاوية ح هـ ط مثل زاوية ا ب ز / [س-٢-و] ونجعل زاوية هـ ط ك مثل زاوية ب ا جـ، فيكون مثلث هـ ط ك شبيهًا بمثلث ب ا جـ، ويكون مثلث هـ ط ح شبيهًا بمثلث ب ا ز، فتكون نسبة ضرب هـ ح في ح ك إلى مربع ح ط كنسبة ضرب ب ز في ز جـ إلى مربع ز ا، التي هي نسبة ضرب هـ ح في ح و إلى مربع ح د، فتكون نسبة ضرب هـ ح في ح و إلى / [ب-٤٤] مربع د ح كنسبة ضرب هـ ح في ح ك إلى مربع ح ط. فتكون نسبة و ح إلى / [ا-٢٩] ح ك كنسبة مربع د ح إلى مربع ح ط. ثم قالوا: فنجعل نسبة مربع د ح إلى مربع ح ط كنسبة د ح إلى ح ل. وجعلوا نقطة ل فوق نقطة ط، أعني فيما بين نقطتي د ط. وهذا الموضع هو موضع السهو، لأنه إذا كانت نسبة د ح إلى ح ل كنسبة مربع د ح إلى مربع ح ط، كان ح ل أصغر من ح ط، لأن ح ط أصغر من ح د. ثم وصلوا ل ك، فكان موازيًا لخط د و، لأن نسبة د ح إلى ح ل صارت كنسبة و ح إلى ح ك. ثم قالوا: فزاوية ك ل ح مساوية لزاوية و د ح وزاوية ك ل ح أصغر من زاوية ك ط ح، فزاوية ك ط ح أعظم من

1 مثلثي: مثلي [ل] / د هـ و: و هـ د [ب]، عادة ما يخلط الناسخ بين الواو والدال في العبارات الهندسية، وسنصححها دون الإشارة. ومما يستحق الذكر أن أحد القراء المحدثين أدرك هذا الخلط وصححه في الصفحات الأولى فقط – 2 فيهما: فيهما بينهما [ل] – 6-7 د هـ ح ... فإنا نجعل زاوية: أثبتها في الهامش [ا] – 8 هـ ط ح: هـ [ا]، وطمسا الحرفان الأخيران – 9 ب ز في: ب ز ب [ت، س] / ز ا: حـ ا [ا، ب] ح ا [ل] – 10 ح و (الثانية): ح ر [ت، س] – 11 د ح: ح ط [ا، ب، ل] / و ح: ر ح [ت، س] – 12 ح ط: خط [ت] / ح ط: د ح [ت] – 13 د ح: ر ح [ت، س] / الموضع: أثبتها في الهامش [س] – 14 موضع: موضوع [ت] – 16 ح ل: د ل [ا، ب، ل] – 17 مساوية ... ك ل ح: أثبتها في الهامش [ا] / أعظم: أصغر [ا، ب، ل].

زاوية و د ح. ‹و›لأن زاوية هـ ط ح أعظم من زاوية هـ د ح،/ فزاوية / هـ ط ك أعظم ل – ٢٨ – ظ ت – ١٥٠ – ظ من زاوية هـ د و. وقد كانت مساوية لها وهذا محال. وهذا المحال إنما لزم من فرضهم نقطة لَ فوق نقطة طَ. ونقطة/ لَ ليس تكون إلا تحت نقطة طَ؛ وإذا كانت تحت نقطة طَ، ب – ٤٥ لم يلزم هذا المحال؛ وإذا لم يلزم هذا المحال، لم يلزم أن يكون المثلثان متشابهين. فمن أجل هذا السهو حكموا بأن المثلثين يكونان أبدًا متشابهين؛ وليس الأمر كذلك.

وإذ قد تبين هذا / السهو، فلنقسم هذين المثلثين إلى جميع أقسامهما، ونبين أي س – ٢ – ظ الأقسام هي التي يلزم أن يكون المثلثان فيه متشابهين، ولا يوجد مثلث آخر يكون له الصفات التي في هذين المثلثين ويكون غير شبيه بهما، ونبين أيضًا أي الأقسام هي التي يكون المثلثان فيه متشابهين، ويوجد مع ذلك مثلث آخر له الصفات التي لهما وهو غير شبيه بهما.

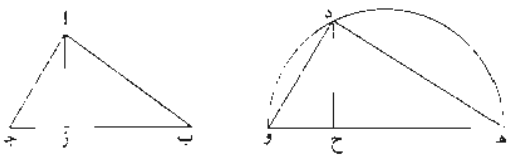
فنقول: إن المثلثين اللذين بهذه الصفة ينقسمان إلى عدّة أقسام؛ ويلزم في بعض الأقسام أن يكون المثلثان متشابهين، ولا يوجد مثلث آخر له الصفات التي فيهما وهو غير شبيه بهما؛ ويلزم في بعض الأقسام أن يكون المثلثان متشابهين، ويوجد مثلث آخر له الصفات التي لهذين المثلثين ويكون غير شبيه بهما.

فلنبين جميع أقسام المثلثين. وهذان المثلثان ينقسمان أولاً إلى قسمين: أحدهما أن تكون الزاويتان اللتان عند نقطتي زَ حَ مساويتين للزاويتين اللتين عند نقطتي آ دَ، والثاني أن تكون الزاويتان اللتان عند نقطتي زَ حَ غير مساويتين للزاويتين اللتين عند نقطتي آ دَ./ ثم كل واحد من هذين القسمين ينقسم إلى ثلاثة / أقسام وهي: أن تكون الزاويتان اللتان ب – ٤٦ ا – ٣٠ عند نقطتي آ دَ قائمتين أو منفرجتين أو حادتين، فتصير الأقسام ستة. وإذا كانت زاويتا آ دَ منفرجتين، وكانت الزاويتان اللتان عند نقطتي زَ حَ غير مساويتين لهما، فإما أن تكونا أعظم منهما، وإما أن تكونا أصغر/ منهما. وإذا كانتا أصغر، فإما أن تكونا قائمتين أو ت – ١٥١ – و

1-2 أعظم من: مثل [ا، ب، ل] – 2 زاوية هـ د و وقد كانت [ت، س]: ونجد في [ا، ب، ل] مكانها العبارة التالية: «زاوية هـ د و فزاوية ك ط ح أصغر من زاوية و د ح وزاوية و ل ح أصغر من زاوية ك ط ح، فزاوية ك ل ح أصغر بكثير من زاوية و د ح. وقد تبين أنها». ونجد في نص بني موسى كما ورد في مخطوطة آيا صوفيا ٤٨٣٢، ص. ٢٢٦–و: «وصارت زاوية ك ل ح مثل زاوية و د ح، وزاوية ك ل ح أصغر من زاوية ك ط ح الخارجة عن المثلث، فزاوية ك ط ح أعظم من زاوية و د ح، وزاوية ح ط هـ أيضًا أعظم من زاوية ح د هـ لأنها خارجة عن المثلث، فزاوية هـ ط ك أعظم من زاوية هـ د و، وقد كانت مثلها، هذا خلف». ومن الواضح أن ابن الهيثم استشهد بمثل هذا النص – 4 هذا المحال، لم يلزم: أثبتها في الهامش [ا] – 5 حكموا: حكمو [ل] – 6 هذين: هذا [ت، س] / ونبين: ويتبين [ا، ب] – 8 الصفات: انقطاع في مخطوطة [ل] / ونبين: ويتبين [ب] – 12 فيهما: فيها [ت] – 13 بهما: بها [ت] – 17 مساويتين: متساويتين [ت، س] – 20 مساويتين: متساويتين [ا، ب، ت، س] – 21 كانتا: كانا [ا، ت، س].

منفرجتين، فيزيد في الأقسام قسمان. وكذلك إذا كانت زاويتا ا د حادتين وكانت الزاويتان اللتان عند نقطتي ز ح غير مساويتين لهما، فإما أن تكونا أعظم وإما أن تكونا أصغر؛ وإذا كانتا أعظم، فإما أن تكونا قائمتين وإما أن تكونا حادتين؛ فيزيد في الأقسام قسمان آخران. فتصير الأقسام عشرة. ونحن نشرح حال كل واحد من هذه الأقسام.

فلتكن أولاً زاويتا ا د / قائمتين وزاويتا ز ح قائمتين أيضًا، وتكون نسبة ضرب ب ز س-٣-و في ز جـ إلى مربع ز ا كنسبة ضرب هـ ح في ح و إلى مربع ح د. وقد يوجد مثلثان على هذه الصفة متشابهين، ويوجد مثلثان على هذه الصفة غير متشابهين.



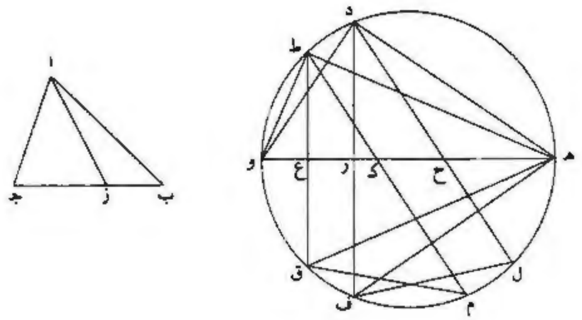
برهان ذلك: أنا نعيد مثلث ا ب جـ، ونرسم خطًا كيفما اتفق، وليكن هـ و. وندير عليه نصف دائرة، وليكن هـ د و. ونجعل زاوية و هـ د مثل زاوية / جـ ب ا، ونخرج عمود ب-٤٧ د ح، ونصل و د. فيكون مثلث هـ د و شبيهًا بمثلث ا ب جـ. وتكون الزاويتان اللتان عند نقطتي ز ح كل واحدة منهما قائمة. ويكون ضرب هـ ح في ح و مثل مربع ح د، ويكون ضرب ب ز في ز جـ مثل مربع ز ا، فيكون هذان المثلثان على الصفة المذكورة. إلا أنه قد توجد مثلثات كثيرة، كل واحد منها له هذه الصفة، وكل واحد منها غير شبيه بمثلث ا ب جـ. وذلك أن كل نقطة تفرض على قوس هـ د و ويخرج منها عمود على قطر هـ و، ويوصل بين النقطة وبين طرفي القطر، فإنه يحدث منه مثلث غير شبيه بمثلث ا ب جـ. ومع ذلك فإن زاوية رأسه مثل زاوية ا. والزاوية التي على قاعدته مثل زاوية ز، وتكون نسبة ضرب قسمي قاعدته، التي هي هـ و، إلى مربع العمود كنسبة ضرب ب ز في ز جـ إلى مربع ز ا. فهذا القسم ليس يلزم أن يكون المثلثان فيه أبدًا متشابهين، إلا إذا زيد في

2 مساويتين: متساويتين [ت، س] – 3 كانتا: كانا [ا، ت، س] / فيزيد: يزيد [ت، س] – 6 ز ح: ز حـ [ب، ت، س] – 8 هـ و: هـ و د [ب] / وندير: ونزيد [ت] ندير [ب] – 9 هـ د و ونجعل: هـ د و نجعل [ا، ب] هـ د ونجعل [ت، س] – 10 الزاويتان: زاويتاه [ت] – 11 نقطتي: نقطة [ت، س] / ز: ب [ا، ب] / ح و: ح د [ت] – 12 ز جـ: ز ح [ت] / هذان: هذا [س] – 14 هـ د و ويخرج: هـ د ويخرج [ا، ب] – 15 القطر: ناقصة [ت] / منه: الضمير يعود على العمل المقدر – 17 ب ز: ب د [ت، س] – 18 ز ا: ز حـ ا [ت، س].

شروطه شرط آخر، وهو أن تكون نسبة ا ز إلى د ح كنسبة ب جـ إلى هـ و، لأنه / يلزم ت-١٥١-ظ
من ذلك أن تكون نسبة مربع ا ز إلى مربع د ح كنسبة / مربع ب جـ إلى مربع هـ و، ب-٤٨
فتكون نسبة ضرب ب ز في ز جـ إلى مربع ب جـ كنسبة ضرب هـ ح / في ح و إلى س-٣-ظ
مربع هـ و، فتكون نسبة/ ب ز إلى ز جـ كنسبة هـ ح إلى ح و. فيلزم أن يكون مثلث ا-٣١
د هـ ح شبيهاً بمثلث ا ب ز، ويكون مثلث د و ح شبيهاً بمثلث ا جـ ز. فيكون من أجل ذلك مثلثا ا ب جـ د هـ و متشابهين. وإذا لم نزد هذا الشرط، لم يلزم أن يكون مثلثا ا ب جـ د هـ و متشابهين؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

والقسم الثاني: هو أن تكون زاويتا ا د قائمتين، وتكون زاويتا ز ح متساويتين وغير قائمتين. وهذا القسم يلزم فيه أن يكون المثلثان متشابهين، ولا يوجد مثلث آخر له الصفات التي لهما وهو غير شبيه بهما.

فلنعد مثلث ا ب جـ، ونرسم خطًا كيفما اتفق، وليكن هـ و. ونعمل عليه نصف دائرة، ونجعل زاوية و هـ د مثل زاوية جـ ب ا، ونصل و د، ونخرج من نقطة د خط د ح حتى تكون زاوية د ح هـ مثل زاوية ب ز ا، فيكون المثلثان اللذان يحدثان شبيهين بمثلثي ا ب ز ا ز جـ. فتكون نسبة ضرب ب ز في ز جـ إلى مربع ز ا كنسبة ضرب هـ ح في ح و إلى مربع ح د. فيكون مثلثا ا ب جـ د هـ و على الصفات المذكورة وهما مع هذا /
متشابهان. ب-٤٩



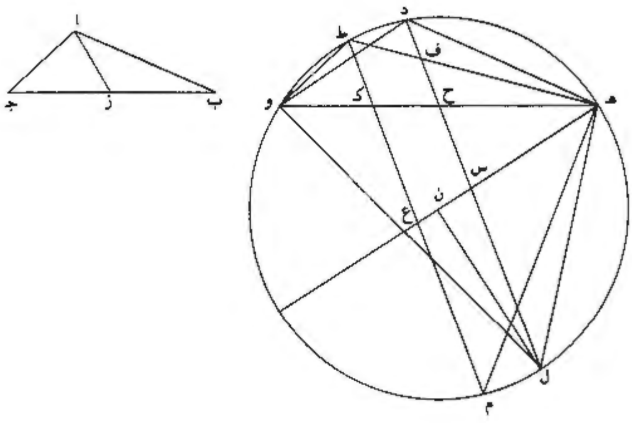
فأقول: إنه لا يمكن أن يوجد مثلث آخر له هذه الصفات وهو مع ذلك غير شبيه بمثلث ا ب جـ. فإن أمكن، فليكن ذلك. فهو ممكن أن نعمل على خط هـ و مثلثًا شبيهاً

1 د ح: هـ ح [ت، س] – 2 ذلك: ناقصة [ت] – 3 ب ز: ب [ب] – 3-4 إلى مربع هـ و: ناقصة [ت، س] – 4 نسبة: ناقصة [ا، ب] – 16 متشابهان: متشابهين [ا، ت، ب، س] – 18 نعمل: يعمل [ا، ب، ت].

بذلك المثلث، فتكون نقطة رأسه على قوس هـ د و، فتكون الزاوية النظيرة لزاوية ب غير
مساوية لزاوية و هـ د. فليكن ذلك المثلث مثلث هـ ط و. وليكن خط ط ك هو الذي
يحيط مع خط هـ و بزاوية مساوية لزاوية د ح هـ، فيكون ط ك موازيًا لخط د ح، وتكون
نسبة ضرب هـ ك في ك و إلى مربع ك ط كنسبة / ضرب هـ ح في ح و إلى مربع ح د، ت-١٥٢-و
إن كان ذلك ممكنًا. ونتمم دائرة هـ د و ونخرج خطي د ح ط ك إلى نقطتي ل م.
ونخرج عمودي د ر ط ع وننفذهما / إلى نقطتي ف ق، فينقسمان بنصفين نصفين على س-٤-و
نقطتي ر ع. ونصل ل ف م ق. فلأن نسبة ضرب هـ ح في ح و إلى مربع ح د كنسبة
ضرب هـ ك في ك و إلى مربع ك ط، تكون نسبة ل ح إلى ح د كنسبة م ك إلى ك ط،
فتكون نسبة ل د إلى د ح كنسبة م ط إلى ك ط. ومثلثا د ح ر ك ط ع متشابهان، فنسبة
ح د إلى د ر كنسبة ك ط إلى ط ع، فنسبة ل د إلى د ر كنسبة م ط/ إلى ط ع، ب-٥٠
فتكون نسبة ل د إلى د ف كنسبة م ط إلى ط ق. وزاويتا / ل د ف م ط ق متساويتان، ا-٣٢
فمثلثا ل د ف م ط ق متشابهان، فزاوية د ل ف مساوية لزاوية ط م ق، فقطعة د هـ ف
شبيهة بقطعة ط هـ ق؛ وهذا محال. وهذا المحال لزم من فرضنا نسبة ضرب هـ ك في ك و
إلى مربع ك ط كنسبة ضرب هـ ح في ح و إلى مربع ح د. فليس لمثلث هـ ط و الصفات
التي لمثلث ا ب جـ. وكذلك نبين في كل مثلث غير شبيه بمثلث ا ب جـ. فكل مثلث له
الصفات التي لمثلث ا ب جـ / فهو شبيه بمثلث ا ب جـ؛ ويلزم في هذين المثلثين أيضًا أن ت-١٥٢-ظ
تكون نسبة ا ز إلى د ح كنسبة ب جـ إلى هـ و، لأن مثلثي ا ب ز ا ز جـ يكونان شبيهين
بمثلثي د هـ ح د ح و؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

والقسم الثالث: هو أن تكون زاويتا آ دَ منفرجتين، وتكون زاويتا زَ حَ مساويتين /
لهما. وهذا القسم يلزم فيه أن يكون المثلثان متشابهين، ولا يوجد مثلث آخر له الصفات س-٤-ظ
التي لهما ويكون غير شبيه بهما.

1 رأسه على: مكررة [ب] / هـ د و: هـ د [ب] – 3 د ح هـ: د ح ط [ا] وح ط [ب] – 4 ح د: ح هـ د [ت، س] – 5 ممكنًا: ناقصة [ت] أثبتها في الهامش [س] – 6 د ر: كتب الراء نونًا في هذا الشكل [ا، ب] / نصفين: ناقصة [ت] – 7 ر: ز [ت، س] / ل ف: ل ب [ت] / ح و: ح هـ [ت] / ح د: ح هـ [ت] – 8 ك و: ك هـ [ت] / م ك: م ل [ا، ب] – 9 د ح: ك ح [ت، س] ح [ب] / ك ط: ط ك [ا، ب] – 11 د ف : د م [ت، س] / ط ق: ط ف [ت] – 12 ط م ق: ط ق م [ت] م ط ق، ثم ضرب على الميم بالقلم وكتب ط ق م [س] – 13 ط هـ ق: ط هـ ف [ت] / ك و: ك ر [ت، س] – 14 هـ ح: ر ح [ب] / ح و: ح ف [ت، س] – 15 ا ب جـ: ا ب ح [ا، ب] – 16 التي: ناقصة [ت] أثبتها في الهامش [س] – 19 مساويتين: متساويتين [ت، س] – 21 ويكون: فيكون [ت، س].



ب-٥١ فلنعد مثلث ا ب جـ، ونرسم / خطًا كيفما اتفق، وليكن هـ و، ونعمل عليه قطعة دائرة تقبل زاوية مثل زاوية آ، ونجعل زاوية و هـ د مثل زاوية جـ ب ا، ونصل و د. فيكون مثلث د هـ و شبيهًا بمثلث ا ب جـ. ونخرج خط د ح حتى تصير زاوية د ح هـ مثل زاوية ب ز ا المساوية لكل واحدة من زاويتي ا د. فتكون نسبة ضرب هـ ح في ح و إلى مربع ح د كنسبة ضرب ب ز في ز جـ إلى مربع ز ا. فيكون مثلثا ا ب جـ د هـ و على الصفات المذكورة، وهما مع ذلك متشابهان.

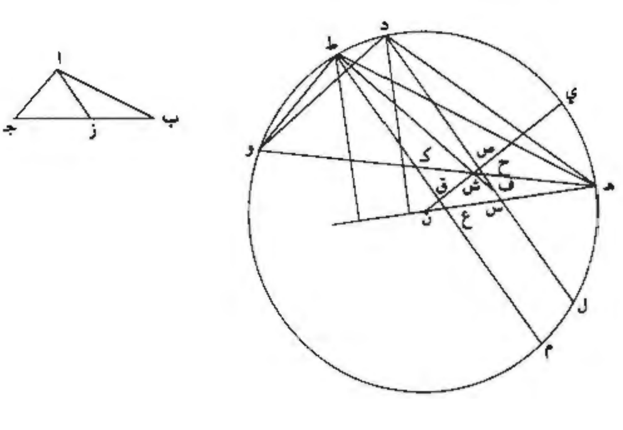
فأقول: إنه لا يمكن أن يوجد مثلث آخر له الصفات التي لهذين المثلثين وهو مع ذلك غير شبيه بهذين المثلثين. فإن أمكن، فليكن ذلك. ونعمل على خط هـ و مثلثًا شبيهًا بذلك المثلث، فتكون نقطة رأسه على قوس هـ د و، فتكون الزاوية النظيرة لزاوية ب غير مساوية لزاوية هـ. فليكن ذلك المثلث مثلث هـ ط و. وليكن خط ط ك هو الذي يحيط مع خط هـ و بزاوية مساوية لزاوية د ح هـ، فيكون ‹خط› ط ك موازيًا لخط د ح، وتكون نسبة ضرب هـ ك في ك و إلى مربع ك ط كنسبة ضرب هـ ح في ح و إلى مربع ح د، إن كان ذلك ممكنًا. ونتمم دائرة هـ د و، ونخرج خطي د ح ك ط إلى نقطتي ل م.
ب-٥٢ وليكن مركز الدائرة نقطة ن،/ ونصل ن هـ هـ ل. فخط ن هـ يقطع خطي د ل ط م، فليقطعهما على نقطتي س ع. ولأن زاوية د ح هـ مثل زاوية و د هـ، يكون ضرب و هـ
ت-١٥٣-و في هـ ح / مثل مربع هـ د. ولأن زاوية د ح هـ مثل زاوية و د هـ، تكون زاوية هـ ح ل

2 و د: ز د [ت، س] – 4 د: نجد بعدها «إلى مربع ز ا» [ت] – 5 ح د: ج د [ا] – 6 متشابهان: متشابهين [ا] – 8 على: أثبتها فوق السطر [ا] – 9 هـ د و: د هـ و [ت] – 10 ذلك: ناقصة [ب] – 12 ضرب (الأولى): حـ ب [ت، س] – 15 د ح هـ: حـ ح هـ [ت، س] – 15-16 يكون ضرب ... و د هـ: مكررة [ب].

مثل الزاوية التي تقع في قطعة هـ ل و، فيكون ضرب و هـ في هـ ح مثل مربع هـ ل.
فخط هـ ل مثل خط هـ د، فقوس هـ ل / مثل قوس هـ د، فخط ن هـ عمود على س-٥-و
خطي د ل / ط م، فـ د س مثل س ل وط ع مثل ع م. ولأن نسبة ضرب هـ ح في ١-٣٣
ح و إلى مربع ح د كنسبة ضرب هـ ك في ك و إلى مربع ك ط، تكون نسبة ل ح إلى
ح د كنسبة م ك إلى ك ط. فنسبة ل د إلى د ح كنسبة م ط إلى ط ك، فنسبة س د
إلى د ح كنسبة ع ط إلى ط ك. وخط هـ ط يقطع خط د ح، فليقطعه على نقطة ف.
فتكون نسبة ع ط إلى ط ك كنسبة س ف إلى ف ح، فتكون نسبة س ف إلى ف ح
كنسبة س د إلى د ح، فتكون نسبة س ح إلى / ح ف كنسبة س ح إلى ح د؛ وهذا ب-٥٣
محال.

فليس يمكن أن يكون مثلث له الصفات التي في مثلث ا ب جـ غير شبيه بمثلث
ا ب جـ؛ وذلك ما أردنا / أن نبين. ت-١٥٣-ظ

والقسم الرابع: هو أن تكون زاويتا آ دَ منفرجتين، وتكون زاويتا زَ حَ منفرجتين أيضًا وأعظمَ من زاويتي آ دَ، فيكون المثلثان متشابهين، ولا يوجد مثلث آخر له الصفات التي لهما ويكون غير شبيه بهما.



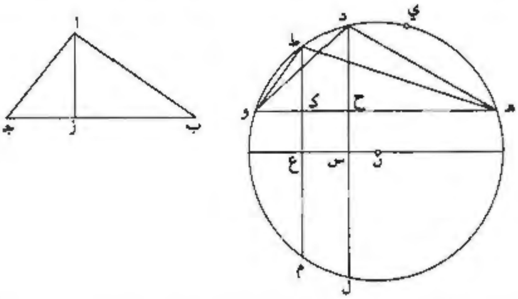
فلنعد مثلث ا ب جـ / والدائرة التي تقدمت، وليكن مثلث د هـ و شبيهًا بمثلث س-٥-ظ
ا ب جـ وصفاته كصفاته. وليكن مثلث هـ ط و غير شبيه بمثلث ا ب جـ، وصفاته

1 هـ ل و: هـ ك و [ت، س] – 2 ن هـ: ز هـ [ت، س] – 3 خطي: خطين [ت، س] – 5 د ح: ح ح [ت، س] – 15 التي: مطموسة [ا].

كصفات مثلثي ا ب جـ د هـ و، إن كان ذلك ممكنًا. ونخرج خطي د ح ط كـ إلى ل م. فتكون نسبة ل د إلى د ح كنسبة م ط إلى ط كـ. ولأن زاوية د ح هـ أعظم من زاوية هـ د و، يكون الخط الذي يخرج من نقطة د ويحيط مع خط هـ و بزاوية مساوية لزاوية هـ د و يقع من وراء خط د ح، أعني مما يلي نقطة و؛ وإذا خرج على استقامة، لقي خط ن هـ، وكان عموداً عليه؛ وكذلك الخط الموازي له الذي يخرج من نقطة ط. فتبين
من ذلك أن زاويتي د س ن ط ع ن حادتان. فالعمود الذي يخرج من / نقطة ن على ب-٥٤
خطي د ل ط م يكون فوق خط ن هـ، أعني أنه يقطع قوس هـ د؛ فليكن ذلك العمود عمود ن ق ص ي، فهو يقطع كل واحد من خطي د ل ط م بنصفين، فهو يقطع خط كـ هـ؛ فليقطعه على نقطة ش. ونصل ش ط، فهو يقطع خط د ح؛ فليقطعه على نقطة
ف. فلأن نسبة ل د إلى د ح كنسبة م ط إلى ط كـ، تكون / نسبة ق ط إلى ط كـ س-٦-و
كنسبة ص د / إلى د ح؛ ونسبة ق ط إلى ط كـ كنسبة ص ف إلى ف ح، فنسبة ص د ا-٣٤
إلى د ح كنسبة ص ف إلى ف ح، فنسبة ص ح إلى ح د كنسبة ص ح / إلى ح ف؛ ت-١٥٤-و
وهذا محال.

وإن وقعت نقطة ش فيما بين نقطتي ح كـ أو فيما بين نقطتي كـ و أو على نقطة ح أو على نقطة كـ، كان المحال أشنع. فليس يمكن أن يكون مثلث له الصفات التي لمثلث ا ب جـ ويكون غير شبيه بمثلث ا ب جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

والقسم الخامس: هو أن تكون زاويتا ا د منفرجتين، وتكون زاويتا ز ح قائمتين، فيكون المثلثان متشابهين ولا يوجد مثلث آخر له الصفات التي لهذين المثلثين ويكون غير شبيه بهما.



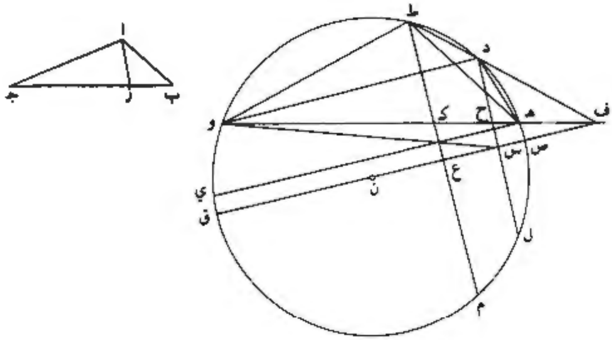
2 فتكون: مكررة [ت] – 4 أعني: اعلى، وأثبتها في الهامش «اعنى» مع «ط» فوقها [ا] ونقل ناسخ [ب] «اعلى»، ثم ضرب عليها بالقلم وأضاف «اعنى ط»، وهذا دليل آخر على أن [ا] هي المخطوطة الأم لـ [ب] – 5 وكذلك: ولذلك [ت] – 6 ط ع ن: ط ع ر [ت، س] – 7 يكون: فيكون [ت، س] / ن هـ: ن و [ت] – 8 عمود: عمودا [ت] – 11 ق ط: ق كـ [س] / ص ف: ص ق [ت] – 12 ح د: ح هـ [ت] – 14 و: ف [ت] ق [س] / ح: ح ا [ت] – 16 أردنا: اردناه [ب] – 17 زاويتا (الثانية): ناقصة [ت] – 18 متشابهين: متشابهان [ت، س] / ويكون: فيكون [ت، س].

ولنعد مثلث ا ب جـ والدائرة. وليكن مثلث د هـ و شبيهًا بمثلث ا ب جـ، وصفاته كصفاته. ويكون مثلث هـ ط و غير شبيه بمثلث ا ب جـ وصفاته / كصفات ب-٥٥ مثلثي ا ب جـ د هـ و، إن كان ذلك ممكنًا. ونخرج خطي د ح ط ك إلى ل م. فتكون نسبة ل د إلى د ح كنسبة م ط إلى ط ك. ونخرج من مركز الدائرة، وهو نقطة ن، عمودًا على خطي د ل ط م؛ وليكن ن ع س. فيكون ن س موازيًا لخط و هـ. لأن زاويتي ح ك قائمتان. فتكون / نسبة س د إلى د ح كنسبة ع ط إلى ت-١٥٤-ظ ط ك. فنسبة س ح إلى ح د كنسبة ع ك إلى ك ط؛ وس ح مثل ع ك، فـ ح د مثل ك ط؛ وهذا محال لأن ك ط إن كان مساويًا لـ د ح، فمثلث هـ ط و شبيه بمثلث هـ د و، لأن قوس ط و تكون مساوية لقوس هـ د، فتكون زاوية ط هـ و مساوية لزاوية هـ و د وتكون زاوية ط و هـ مساوية لزاوية د هـ و، فيكون مثلث هـ ط و شبيهًا بمثلث هـ د و، وهو بالفرض غير شبيه به. وإذا كان مثلث هـ ط و غير شبيه بمثلث / هـ د و، ا-٣٥ فليس خط ط ك مساويًا لخط د ح. فليس / نسبة ل ح إلى ح د كنسبة م ك إلى ك ط، س-٦-ظ فليس نسبة ضرب هـ ك في ك و إلى مربع ك ط كنسبة ضرب هـ ح في ح و إلى مربع ح د، فليس لمثلث هـ ط و الصفة التي لمثلثي ا ب جـ د هـ و، فليس يوجد / لمثلثي ب-٥٦ ا ب جـ د هـ و مثلث آخر غير شبيه بهما له الصفات التي لهما؛ وذلك ما أردنا أن نبين. /

والقسم السادس: هو أن تكون زاويتا آ دَ منفرجتين، وتكون زاويتا زَ حَ أيضًا ت-١٥٥-و منفرجتين، وأصغر من زاويتي آ دَ، وتكون نسبة ضرب ب ز في ز جـ إلى مربع ز ا كنسبة ضرب هـ ح في ح و إلى مربع ح د.

فأقول: إنه قد يوجد مثلثان على هذه الصفة متشابهين ويوجد مع ذلك مثلث آخر له هذه الصفة وهو غير شبيه بالمثلثين المتشابهين.

5 نَ: زَ [ت، س] / ن ع س: ز ع س [ت، س] / ن س: ز س [ت، س] – 6 قائمتان: قائمتين [ا، ب، ت، س] – 13 هـ ك ... ضرب: أثبتها في الهامش [ت] – ح و: ح ز [ت، س] – 14 ح د: ح هـ [ت، س] – 15 مثلث: ومثلث [ت، س] – له: مطموسة [ا] – 18 زاويتي: زوايتي [ت، س] – زح: زج [ب] – 18-19 كنسبة ... ح د: ناقصة [ت] – 19 ح و: ح ف [ا، ب] ح ز [س] – 20 متشابهين: متشابهات [ت، س] – 21 بالمثلثين: بالمثلث [ب]



برهان ذلك: أنا ندير دائرة، ولتكن هـ د و م. ولنفصل منها قطعة أقلّ من نصف
دائرة، ولتكن قطعة هـ د و. ونخرج و هـ على الاستقامة إلى ف، ونفرض عليه نقطة
كيفما اتفق، ولتكن نقطة ف. ونخرج من نقطة ف خطًا يقطع قطعة هـ د و على نقطتين،
ولتكن النقطتان في نصف قوس هـ د و الذي يلي نقطة هـ، وليكن خط ف د ط؛
وليكن / مركز الدائرة نقطة ن. ونصل ن ف، وليقطع الدائرة على نقطة ص. ونخرج من س-٧-و
نقطتي د ط عمودين على خط ن ف، فليكونا عمودي د س ط ع، وننفذهما إلى ل
م؛ فينقسمان بنصفين نصفين على نقطتي س ع. ونخرج ف ن إلى ق، ونخرج هـ ي
موازيًا لخط ف ق، فتكون زاوية و هـ ي مثل زاوية و ف ق. ولأن زاويتي س ع قائمتان،
تكون زاويتا ف ح س ف كـ ع حادتين، فتكون زاويتا د ح هـ ط كـ هـ منفرجتين. ولأن
زاوية / س قائمة، تكون زاويتا س ف د س د ف مجموعتين زاوية قائمة، فزاويتا ب-٥٧
س ف د س د ف توترهما قوس ص د و ق الذي هو نصف دائرة. وزاوية ي هـ و –
المساوية لزاوية ق ف و – هي التي توترها قوس و ي، فتبقى زاويتا ح ف د ح د ف،
أعني زاوية د ح و، وهي الزاوية التي توترها قسي ص هـ هـ د ‹د› و ي ق. فزاوية د ح و
تنقص عن الزاوية القائمة بالزاوية التي توترها قوس و ي، / فزاوية د ح هـ تزيد على ت-١٥٥-ظ
الزاوية القائمة بالزاوية التي توترها ‹قوس و ي، فزاوية هـ د و تزيد على الزاوية القائمة التي

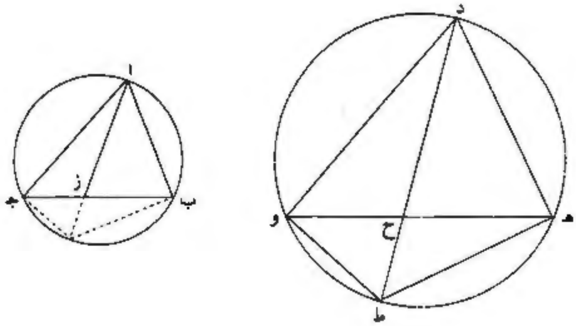
2 الاستقامة: استقامة [ا، ت، س] – 3 ولتكن: فليكن [ت، س] / هـ د و: د هـ و [ت] – 4 ف د ط: ف ر ط [ت، س] – 5 ن: ر [ت، س] / ن ف: ر ف [ت، س] / وليقطع: ولينقطع [ا، س] – 6 فليكونا: فليكن [ب] / وننفذهما: ونبعدهما [ت] – 7 ف ن: ف ر [ت، س] / ق: ف [ت] – 8 ولأن: فلأن [ا، ب، ت، س] / قائمتان: قائمتين [ت، س] – 9 ولأن: فلأن [ت، س] – 10 س د ف: س د ق [ت] – 11 س ف د: س ي د [ت، س] – 12 ق ف و: ف ق و [ت، س] / هي: وهي [ا، ب، ت، س] – 13 وهي: هي [ت، س] / د ح و: رح ف [ت، س] – 14 د ح هـ: ف ح هـ [ت، س].

توترها) قوسا ص هـ و ق، فزاوية هـ د و أعظم من زاوية د ح هـ المنفرجة بالزاوية التي
توترها قوسا ص هـ و ق.

وإذ قد تبين أن زاوية هـ د و أعظم من زاوية د ح هـ، فلنبين أنه قد يوجد مثلثان لهما
الصفات المذكورة وهما مع ذلك غير متشابهين. فنصل خطوط هـ د هـ ط و د و ط.
وليكن مثلث ا ب جـ شبيهاً بمثلث د هـ و. فلأن د س يوازي ط ع، تكون نسبة س د
إلى د ح كنسبة ع ط إلى ط ك، فنسبة ل د إلى د ح كنسبة م ط إلى ط ك. فنسبة
ل ح إلى ح د كنسبة م ك / إلى ك ط، فنسبة ضرب هـ ح في ح و إلى مربع ح د ا-٣٦
كنسبة ضرب هـ ك في ك و إلى مربع ك ط. فمثلث هـ ط و له الصفات التي لمثلثي
ا ب جـ د هـ و؛ ومع ذلك فهو غير شبيه بهما، لأن ط ك أعظم من / د ح، لأنهما ب-٥٨
جميعاً في نصف قوس هـ د و، فزواياه غير مساوية لزوايا مثلث هـ د و.

فإذا / كانت زاويتا ا د منفرجتين، وكانت زاويتا ز ح منفرجتين وأصغر من زاويتي ا د، س-٧-ظ
وكانت نسبة ضرب ب ز في ز جـ إلى مربع ز ا كنسبة ضرب هـ ح في ح و إلى مربع
ح د، فإن مثلثي ا ب جـ د هـ و يكونان متشابهين؛ ويوجد مع ذلك مثلث له هذه
الصفات وهو غير شبيه بهما؛ وذلك ما أردنا أن نبين. /

والقسم السابع: أن تكون زاويتا ا د حادتين وتكون زاويتا ز ح مساويتين لهما. وهذا ت-١٥٦-و
القسم يلزم فيه أن يكون المثلثان متشابهين، ولا يوجد مثلث آخر له الصفات التي لهما
ويكون غير شبيه بهما.



1 و ق: وف [ت] – 2 و ق: وي [ت، س] ق ي [ا، ب] – 3 د ح هـ: رح هـ [ت، س] / فلنبين: فتبين [ب]
– 12 ز جـ: رح [ب] / ح و: ح ف [ت، س] – 13 ح د: هـ د [ا، ب] – 14 أردنا: اردناه [ب].

فلنعد مثلث ا ب جـ والدائرة، ونفصل من الدائرة قطعة تقبل زاوية حادة مثل زاوية ب ا جـ، ولتكن قطعة هـ د و، ونجعل زاوية و هـ د مثل زاوية جـ ب ا، ونصل و د. فيكون مثلث د هـ و شبيها بمثلث ا ب جـ. ونخرج د ح حتى تكون زاوية د ح هـ مثل زاوية هـ د و، ولتكن د ح هـ. وإذا كانت/ نقطة ز في داخل مثلث ا ب جـ، فإن نقطة ب-٥٩ ح تكون في داخل مثلث د هـ و. ونخرج د ح إلى ط ونصل هـ ط و ط. فتكون زاوية هـ ح ط مثل زاوية هـ ط و. / فيلزم من ذلك أن يكون لمثلث هـ ط و مثلث واحد شبيه به س-٨-و وله الصفات التي لمثلث هـ ط و، ولا يوجد مثلث آخر له الصفات التي لمثلث هـ ط و وهو غير شبيه بهما. وإذا لم يوجد لمثلث هـ ط و مثلث آخر له الصفات التي لمثلث هـ ط و، وهو / غير شبيه به، فليس يوجد لمثلثي ا ب جـ د هـ و مثلث آخر له الصفات -٣٧ التي لهما وهو غير شبيه بهما. فمثلثا ا ب جـ د هـ و متشابهان، ولا يوجد مثلث آخر له الصفات التي لهذين المثلثين وهو غير شبيه بهما؛ وذلك ما أردنا أن نبين./

والقسم الثامن: هو أن تكون زاويتا ا د حادتين وتكون زاويتا ز ح أصغر منهما. ت-١٥٦-ظ

وهذا القسم يلزم فيه أن يكون المثلثان متشابهين، ولا يوجد مثلث آخر له الصفات التي لهما ويكون غير شبيه بهما. وذلك أنا إذا جعلنا مثلث د هـ و شبيهًا بمثلث ا ب جـ، وأخرجنا خط د ح إلى ط، وتممنا مثلث هـ ط و وكانت زاوية هـ ح ط / أعظم من زاوية ب-٦٠ هـ ط و، فيلزم أن يكون لمثلث هـ ط و مثلث شبيه به وله الصفات التي لمثلث هـ ط و، ولا يوجد مثلث آخر له الصفات التي لهما وهو غير شبيه بهما. فيلزم ألا يوجد لمثلثي ا ب جـ د هـ و مثلث آخر له الصفات التي لهما وهو غير شبيه بهما؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

والقسم التاسع: هو أن تكون زاويتا ‹ا د حادتين وتكون زاويتا› ز ح قائمتين. فإذا أخرج د ح وتمم مثلث هـ ط و، تبين كما تبين في القسم الخامس أن لمثلث هـ ط و يوجد مثلث شبيه به وله الصفات التي له، ولا يوجد مثلث آخر له الصفات التي له وهو غير

1 ونفصل: ونصل [ت] / الدائرة: أثبتها في الهامش [س] – 4 هـ د و: هـ د ح [ا، ب، ت، س] – 8 وهو: هو [ت، س] / وإذا لم: وليس [ت، س] – 9-8 يوجد ... به فليس: ناقصة [ت] – 10 وهو: و [ا، ب] – 11 لهذين: كتب بعدها «القسمين»، ثم ضرب عليها بالقلم [س] – 14 أنا: ناقصة [ت، س] – 15 وكانت: كانت [ا، ب] – 16-15 وكانت ... لمثلث هـ ط و: ناقصة [ت، س] – 18-17 غيره ... بهما: ناقصة [ب] – 18 أردنا: أردناه [ب] – 20 ز ح: ز ح هـ [ب] – 21 تبين (الأولى): وتبين [ب] / لمثلث: مثلث [ا، ب، ت، س] – 22 له (الثانية): أثبتها في الهامش [س].

شبيه به. فيلزم ألا يوجد لمثلثي ا ب جـ د هـ و مثلث آخر له الصفات التي لهما وهو غير شبيه بهما.

والقسم العاشر: هو أن تكون زاويتا آ دَ حادتين وتكون زاويتا زَ حَ حادتين وأعظم من زاويتي آ دَ.

فيلزم من ذلك أن تكون زاوية هـ ح ط أصغر من زاوية/ هـ ط و. فيتبين كما تبين في [س-٨-ظ] القسم السادس أنه قد يمكن أن يوجد لمثلث هـ ط و مثلث شبيه به وله الصفات التي له؛ ويوجد مثلث آخر له الصفات التي لمثلث هـ ط و وهو غير شبيه به. فيلزم من ذلك أن يكون مثلثا ا ب جـ د هـ و متشابهين. ويوجد مثلث آخر له الصفات التي لهذين المثلثين وهو غير شبيه بهما.

فالأقسام التي ينقسم إليها هذا الشكل هي عشرة أقسام: سبعة منها يصح فيها الحكم الذي ذكره بنو موسى، وثلاثة منها لا يلزم فيها ذلك / الحكم. والأقسام التي يصح فيها [ب-٦١] الحكم الذي ذكره بنو موسى يلزم فيها أن تكون نسبة قاعدة المثلث إلى قاعدة المثلث / كنسبة الخط الخارج إلى قاعدة أحدهما إلى الخط الخارج إلى قاعدة الآخر، وذلك أن [ت-١٥٧-و] المثلثين إذا كانا متشابهين، كانت زواياهما متساوية. فنفرض أن يكون كل واحد من المثلثين اللذين ينقسم بهما أحد المثلثين الكبيرين شبيهًا بنظيره من المثلث الآخر الكبير. فيلزم أن تكون ، نسبة قسمي قاعدة أحد المثلثين، أحدهما إلى الآخر، كنسبة قسمي قاعدة المثلث [ا-٣٨] الآخر، أحدهما إلى الآخر. فيلزم أن تكون نسبة قاعدة أحد المثلثين الكبيرين إلى الخط الخارج إليها كنسبة قاعدة المثلث الآخر الكبير إلى الخط الخارج إليها. فيلزم أن تكون نسبة الخط الخارج إلى الخط الآخر الخارج كنسبة القاعدة إلى القاعدة.

فإذا زيد في شروط المثلثين أن تكون نسبة الخط الخارج إلى الخط الخارج كنسبة القاعدة إلى القاعدة، صارت القضية كليّة ولم تنتقض في واحد من الأوضاع. وجميع ما يستعمل في كتاب *المخروطات* من أقسام هذا الشكل هو من الأقسام الصحيحة التي بيناها وليس يستعمل في *المخروطات* شيء من الأقسام المنتقضة.

1 مثث: ومثث [، ب] – 5 هـ ط و: هـ ط [ت] – 8 مثثا: مثث [ت، س] – 11 فيها (الثانية): ناقصة [ت، س] 12 إلى قاعدة المثلث: أثبتها في الهامش [س] – 14 يكون كل: مكررة [ا] – 18 إليها (الأولى): إليهما [ت] – 22 كتاب: أثبتها تحت السطر [ت].

فقد تبين من جميع ما بيناه أن القضية التي حكم بها بنو موسى في هذين المثلثين ليست قضية كلية، أعني / أنها تصح في بعض أقسام هذين المثلثين وتبطل في بعض ب-٦٢ أقسامهما، أعني أنه ليس كل مثلثين لهما الصفات التي ذكروها يكونا أبداً متشابهين، بل يكونا في بعض أوضاعهما متشابهين ويكونا في بعض أوضاعهما غير متشابهين، وقد بينا أيضاً السهو الذي عرض لهم في برهان هذا الشكل؛ وذلك ما قصدنا لتبيينه في هذه المقالة.

تمّ القول في شكل بني موسى.

3-7 أعني ... موسى: ناقصة [ا، ب] وبعد «كتب وقوبل في أيام ربيع الأول سنة ١٠٧٢ في شاه جهاناباد وكان المنقول عنه قديما في غاية الصحة وسعيت في المقابلة أيضا بقدر طاقتي وأنا قباد ابن عبد الجليل الخارثي البدخشي (؟)» [ا] «تمت هذه الرسالة» [ب] – 4 متشابهين ... أوضاعهما: ناقصة [ت] – 7 موسى: نجد بعدها «والحمد لله ربّ العالمين» [ت] «والحمد لله ربّ العالمين والصلاة على رسوله محمد وآله أجمعين» [س].

الفصل الثالث

"مسائل الأعمال الهندسية"

١ـ المسبَّع المتساوي الأضلاع

مقدِّمة

توجد مسألة "عمل المسبَّع" المتساوي الأضلاع، بين مسائل الأعمال الهندسية التي أثارت اهتمام الرياضيين إلى حدٍّ كبير بين القرنين التاسع والحادي عشر. وتنتمي هذه المسألة، وفقاً لما قاله الرياضيون العرب أنفسهم، إلى مجموعة من المسائل المجسَّمة الموروثة عن الرياضيات اليونانية؛ ولكن لم يُؤكَّد بشكل كافٍ ما يُميِّزها من المسائل الأخرى. ولم تُنشَّط دراسة المسبَّع المتساوي الأضلاع إلا في وقت متأخِّر، بعكس ما حدث لدراسة الوسطين أو لتثليث الزاوية، على سبيل المثال. ولقد كانت البحوث ناشطة بخصوص الدراسة الأخيرة منذ منتصف القرن التاسع الميلاديّ مع بني موسى وثابت بن قرَّة وغيرهم، بينما وجب انتظار النصف الثاني من القرن العاشر لكي يُدرَسَ المسبَّعُ المتساوي الأضلاع من جديد. ولكن، ما إن بدأ هذا البحث حتّى أثار ولوعاً حقيقيّاً لدى الرياضيين البارزين، وكأنَّ كلَّ واحد منهم أراد أن يترك بصمته فيه. ونرى فيما يلي كيف قدَّم ابن الهيثم هذا البحث ، بعد ذلك بوقت قصير:

"إنَّ أحد الأشكال الهندسية التي يتحدَّى بها المهندسون، ويفتخر بها المبرِّزون، ويظهر بها قوّة من وصل إليها: هو عمل المسبَّع المتساوي الأضلاع في الدائرة."[1]

فلماذا حدثت هذه الحماسة وما هو سبب هذا التأخُّر النسبيّ؟ ولكي نفهم هذا الرَّواج الذي عرفته هذه الدراسة، يُمكن أن نُشير إلى تأثير أرشميدس. وكان

---

[1] انظر ص. ٤٧٣.

الرياضيون في ذلك العصر، بمن فيهم ابن الهيثم، يُذكّـرون بالمقدّمة التي اقترحها رياضيٌّ سيراقوسة لأجل هذا العمل. يتعلّق الأمر بداهة بكتاب منسوب إلى أرشميدس وصلت إلينا منه بعض الآثار. وهكذا كان المسبّع المتساوي الأضلاع محاطاً بالشهرة التي حظي بها أرشميدس بدون أن يكون قد بناه بنفسه؛ فكان هذا الوضعُ مُغرياً ومثيراً. ولكنَّ هذا لا يوضّح لماذا وجب انتظار النصف الثاني من القرن العاشر قبل أن يُستَأنَف البحث في هذه المسألة التي عرفها ثابت بن قرّة ومعاصروه[٢]. ويُمكن أن نـُعلّلَ مدَّة الانقطاع عن البحث في هذه المسألة بظهور اهتمامات جديدة في البحوث خلال هذه المدَّة. ولقد حفزت هذه الاهتمامات ذات المصادر المختلفة – الجبرية والهندسية – الرياضيّين إلى دراسة هذه المسألة وغيرها من المسائل الأخرى التي أهمِلَـت قبل ذلك والتي سنعود إليها لاحقاً. تتعلّق الاهتمامات الجبرية، كما رأينا في موضع آخر[٣]، بإعداد نظرية المعادلات الجبرية التي لا تتجاوز درجتها الدرجة الثالثة وبالبحث في الهندسة الجبرية. أمّا الاهتمامات الهندسية، فهي كما نبيّن هنا مُلازِمة للوضع الجديد للبحث في الأعمال الهندسية بواسطة القطوع المخروطية.

ولقد قام أسلاف ابن الهيثم، لأجل عمل المسبّع المتساوي الأضلاع، بعمل مثلّث محاطٍ بدائرة معلومة بحيث تكون زواياه محقّقة لنسبة معيّنة. وهكذا أخذ أبو الجود، وكذلك السجزي، التناسب (*1, 3, 3*)؛ بينما حاول ابن سهل أن يُثبت مقدّمة أرشميدس؛ ودرس القوهي حالتين منفصلتين: الحالة (*1, 2, 4*) – التي تـرجِع إلى مقدّمة أرشميدس، كما سنرى – والحالة (*1, 5, 1*). أمّا الصاغاني فقد عالج أيضاً الحالة (*1, 2, 4*). ولقد سعى ابن الهيثم نفسُه، في رسالة أولى عنوانها: "في مقدّمة ضلع المسبّع"، إلى إثبات مقدّمة

---

[٢] يضع قسطا بن لوقا مسألة المسبّع المتساوي الأضلاع في عداد المسائل التي لها صعوبة خاصّة. وهذا يدلٌّ على أنّ الرياضيين في منتصف القرن التاسع كانوا على علم بهذه المسألة وبصعوبتها، انظر:

«Une correspondance islamo-chrétienne entre Ibn al-Munajjim, _unayn ibn Isḥāq et Qusṭā ibn Lūqā», Introduction, édition, divisions, notes et index par Khalil Samir; Introduction, traduction et notes par Paul Nwyia dans F. Graffin, Patrologia Orientalis, t. 40, fasc. 4, n° 185 (Turnhout, 1981)

ص. ٦٧٤-٦٧٦، حيث يقول قسطا بن لوقا: "وماذا تقول... في مستخرج خطّين على مناسبة، وفي تدوير المسبّع، وفي غير ذلك من الأشياء التي عجز الناس عن وجودها؟ إنْ أخرجها لك أحد من أهل زماننا، أتنزل ذلك من فعله منزلة إحياء الموتى وفلْق البحر ، وتُقِرٌّ له بالنبوّة؟".

[٣] انظر: رشدي راشد، الجبر، ضمن موسوعة تاريخ العلوم العربية، إشراف رشدي راشد، (بيروت، ١٩٩٧) المجلّد الثاني، ص. ٤٦٣ وما يليها.

أرشميدس لأجل عمل المسبَّع. وهو يتناول في هذه الرسالة مثلّثاً تــُحقّق زواياه التناسب ($1, 2, 4$). ولقد قام، في رسالة ثانية متأخِّرة وأكثر غنى، بأوّل دراسة منهجية لكلّ الأعمال الممكنة ولكلّ المثلّثات التي يمكن تشكيلها مع أضلاع وخطوط قطرية. وهو يدرس في هذه الرسالة الحالات ($1, 3, 3$)، ($3, 2, 2$)، ($1, 5, 1$) وأخيراً ($1, 2, 4$). ولنلاحظ أنَّ التحليل يؤدِّي، في الحالة ($1, 3, 3$)، إلى قسمة لقطعة من خطّ لا توجَد في أيّة دراسة أخرى لأسلافه؛ كما نلاحظ أنَّ ابن الهيثم، في الحالة ($1, 2, 4$)، يبدأ بتبيين أنَّ هذه الحالة يُمكن الحصول عليها انطلاقاً من الحالات السابقة: ($1, 3, 3$)، ($3, 2, 2$) وَ ($1, 5, 1$). ولكنّه، في الحالة ($1, 2, 4$)، يُعطي تحليلاً يؤدِّي إلى قسمة، لقطعة من خطّ، سبق أن اقتَرَحها أرشميدس. وهكذا تظهر لنا، هنا،خاصَّة مهمَّة، على أكثر من صعيد، لهذه الأعمال الهندسية، وهي تعزيز الطبيعة الهندسية للمسألة. يُرجع ابن الهيثم عمل المسبَّع المتساوي الأضلاع، كما فعل أسلافه، إلى عمل مثلّث وليس إلى عمل الزاوية $\frac{\pi}{7}$؛ فلا يكون هناك سوى أربعة مثلّثات ممكنة قام ابن الهيثم بعملها. والقول بأنَّ المسألة ترجع إلى تحديد الزاوية $\frac{\pi}{7}$، يعود إلى تأويل نصّ ابن الهيثم في إطار غريب عن الإطار الخاصّ به. ألم يَــعمل ابن الهيثم مثلّثاً تحقّق زواياه التناسب ($3, 2, 2$)؟ إنَّ رؤية ابن الهيثم، في الواقع، هندسية عن قصد وليست مثلّثاتية. وأخيراً، فإنَّ ابن الهيثم لم يَمِلْ، في رسالته حول قسمة خطّ أرشميدس، إلى حلّ المسألة بطريقة جبريّة، كما فعل بعض أسلافه مثل أبي نصر بن عراق[4] . إنَّ برهانه هندسيّ عن قصد، وهو يريد استنفاد كلّ الحالات الممكنة.

إنَّ إسهام ابن الهيثم، بعد وضعه ضمن تقليد البحث الخاصّ به، يسمح بإظهار هدفين لهذا المؤلّف. كان هذا الأخير يريد، بشكل واضح، استيعاب المكتسبات الحاصلة وإنهاء مسألة عمل المسبّع لكي يُتمَّ بذلك كلَّ هذا التقليد. ولكن، إذا تفحَّصنا مسائل الأعمال الهندسية التي ورثها ابن الهيثم عن أسلافه الأقدمين، لا نجد منها سوى مسألتين تحمل كلٌّ منهما اسم أرشميدس: المسبَّع المتساوي الأضلاع وقسمة خطّ

[4] انظر: ر. راشد وَ وهاب زاده، رياضيّات عمر الخيّام (بيروت، ٢٠٠٥) ، ص. ٢٤٠.

أرشميدس (مقدِّمة القضية الرابعة من المقالة الثانية من كتاب "الكرة والأسطوانة"). ويبدو لنا أنَّ هناك حدثاً مهمّاً مع أنَّ أحداً لم ينتبه إليه، وهو أنَّ ابن الهيثم لم يعالج، في الواقع، أيَّة مسألة أخرى موروثة عن أسلافه اليونانيين أو العرب. فهل كان يريد أن يُتمِّمَ هذا العمل الناقص لأرشميدس، كما كان قد فعل بخصوص كتاب "المخروطات" لأبلونيوس؟ هل كان هذا هدفه، أم أحد الأسباب التي دفعته إلى تحرير المؤلّفات الثلاثة التي كرَّسها للمسائل المجسَّمة الموروثة من الأقدمين؟ إنَّ هذه الفرضية تستحقُّ الدراسة.

سنبدأ بتصحيح هذا التقليد في البحث المكرَّس في عمل المسبَّع المتساوي الأضلاع، ثمَّ نقوم بتفحُّص مؤلّفَي ابن الهيثم بالتتابع.

١-١ آثار مؤلّف لأرشميدس حول المسبَّع المتساوي الأضلاع

لنكرِّر أنَّ تاريخ المسبَّع المتساوي الأضلاع يتميَّز من تاريخ المسائل المجسَّمة الأخرى: مسألة تثليث الزاوية ومسألة الوسطين ومقدِّمة القضية الرابعة من المقالة الثانية من كتاب "الكرة والأسطوانة" لأرشميدس. وإذا استثنينا بعض المراجع الأثرية (لوحات بابلية تعود إلى ١٨٠٠ سنة قبل الميلاد) وإشارة عملية مثل إشارة إيرن الإسكندري[٥]، نحن لا نعرف أيَّ إسهام في عمل هذا الشكل المعروف منذ العصور

---

[٥] نجد على عدد من اللوحات العائدة إلى حوالي ١٨٠٠ سنة قبل الميلاد أشكالا هندسية مرسومة بعناية، من بينها المسبَّع المتساوي الأضلاع. يرجع إيرن الإسكندري أكثر من مرّة إلى المسبّع المتساوي الأضلاع؛ وهو لا يقوم بذلك لإعداد خواصّ هندسية، بل ليعطي حساباً تقريبيا. انظر:

Héron, *Metrica* (éd. E.M. Bruins, *Codex Constantinopolitanus Palatii Veteris n. 1*, Part two [Greek Text], Leiden, 1964)، ص. ١٠١-١٠٢. هذه هي ترجمة هذا النصّ:

"مقدّمة. إذا أحطنا بدائرة مسبّعاً متساوي الأضلاع، تكون نسبة نصف القطر إلى ضلع المسبّع مساوية للنسبة $\frac{8}{7}$. لنأخذ بالفعل الدائرة BC ذات المركز A ولنرسم في داخلها BC ضلعَ المسبّع، أي الضلع المساوي لنصف قطر الدائرة. ولنخرج على هذا الضلع الارتفاع AD. يكون الخط AD مساوياً تقريباً لضلع المسبّع. لنصل بين A وَ B وبين A وَ C. فيكون المثلث ABC، إذاً، متساوي الأضلاع. ويكون مربّع AD مساوياً لثلاثة أضعاف مربّع DB. فيكون مربّع نسبة AD إلى DB مساوياً تقريباً $\frac{49}{16}$. وهكذا تكون نسبة AD إلى DB ، كنسبة بين طولين، مساوية لِـ $\frac{7}{4}$ وتكون BC مساوية لضعف DB. فتكون نسبة BC إلى AD مساوية لِـ $\frac{8}{7}$." =

القديمة. ويجب أن نستثني نصاً منسوباً إلى أرشميدس ومذكوراً فقط في المصادر العربية. إنّ السكوت العميق للقدماء يُدهش مثلما يُحيِّر ويُثير الأفكار. فلماذا، في خلاصة الكلام، ظهر مثل هذا الاهتمام في تثليث الزاوية على سبيل المثال كما تشهد على ذلك "المجموعة الرياضية" لبابوس، بينما بقي عدم الاكتراث إلى هذا الحدّ بالمسبَّع؟ يُمكن أن نطرح السؤال نفسه حول مقدِّمة "الكرة والأسطوانة"، وسنورد بهذا الخصوص شهادة أوطوقيوس. فلماذا تــُخالف مسألة المسبَّع المسائلَ الأخرى مع أنّها قد أثيرَت، وفقاً للمصادر العربية، في أبحاث أرشميدس؟

ويزداد عَجَبُنا لأنّ سكوت القدماء هذا كاد أن ينقطع لفترة قصيرة في القرن التاسع الميلادي، أي في تلك الفترة نفسها التي جرى فيها ، كما يبدو، تداول نصّ أرشميدس. إنَّ الأصداء النادرة التي وصلت إلينا من ذلك العصر لا تترك أيَّ شكٍّ حول معرفة هذه المسألة. لقد رأينا كيف يُشير قسطا بن لوقا، المترجِم والعالِم الشهير، إلى هذه المسألة خلال جدال دينيّ حول المعجزات بدون أن يلفظ اسم أرشميدس. ولكن، بالمقابل، لم يترك أحدٌ من رياضيّي ذلك العصر أيَّ عمل لهذا الشكل. ولكنَّ كاتب

= يُعلق أ. م. بروينز(E.M. Bruins) على هذه المقدّمة قائلاً "إنّ نسبة ضلع المسبّع إلى نصف قطر الدائرة، في هذه المقدّمة، ليست مستخرَجة من خواصّ هذا المسبّع المتساوي الأضلاع. لقد حُسِبت نسبة ٧ إلى ٨ بمعادلة ضلع المسبّع بالعمود الخارج من مركز الدائرة إلى ضلع المسبّع، أي بمعادلة ضلع المسبّع بنصف ضلع المثلث المتساوي الأضلاع (الجزء الثالث، ص. ٢٣٠-٢٣١).

ويكتب إيرن أيضاً: "ليكن معنا مسبّعٌ متساوي الأضلاع $ABCDEFG$ ذو ضلع مساو لعشر وحدات. جِدْ مساحته. لنأخذ مركز الزاوية المحيطة بالمسبّع، H، ولنصل بين D وَ H وبين H وَ E. وليكن HI العمود على DE. تكون نسبة DH إلى DE مساوية إذاً لِـ $\frac{8}{7}$، وتكون نسبة DH إلى DI مساوية إذاً لِـ $\frac{8}{3.5}$ أي لِـ $\frac{16}{7}$. وهكذا تكون نسبة HI إلى DI مساوية إذاً بشكل شبه مضبوط لنسبة $14\frac{1}{3}$ إلى 7 أي لِـ $\frac{43}{21}$.
فنستنتج من هنا أنّ نسبة DE إلى IH مساوية إذاً لِـ $\frac{42}{43}$ أي لِـ $\frac{84}{86}$. فتكون نسبة مربّع DE إلى $DE.IH$ مساوية لهذه النسبة الأخيرة. فتكون نسبة DE إلى مساحة المثلث DHE مساوية لِـ $\frac{84}{43}$. ولكنّ نسبة مساحة المثلث إلى مساحة المسبّع هي $\frac{1}{7}$ ؛ فتكون نسبة مربّع DE إلى مساحة المسبّع مساوية لِـ $\frac{12}{43}$ ؛ ومربّع DE معلوم فتكون مساحة المسبّع معلومة. ونقوم بالتركيب بالطريقة التالية: نضرب *10* بـ *10* فنحصل على *100*، فنضرب هذا بـ *43* فنحصل على *4300*؛ فنقسم على *12* لنحصل على $358\frac{1}{3}$. فيكون هذا مساحة المسبّع".

وهكذا يتعلق الأمر بحساب تقريبيّ. انظر أيضاً أ. م. بروينز(*E.M Bruins*)، القسم الثالث، ص. ٢٣٤.

السِّيَر النديم يذكر في قائمة أعمال أرشميدس المعروفة في ترجمتها العربية "كتاب في تسبيع الدائرة"[٦]، مع أنّه يــبخل في تقديم المعلومات؛ فهو لا يعطي اسم المترجم ولا تاريخ الترجمة. وإذا كانت هذه الترجمة قد كــُتبَت فعلاً، يمكن الظنُّ أن يكون ذلك قد حدث في القرن التاسع الميلاديّ. وإذا وضعنا جانباً هذه الإشارات القليلة، فإنَّ كلّ معلوماتنا حول هذا المؤلّف المنسوب إلى أرشميدس ترجع إلى مصدر وحيد ومتأخِّر جدّاً – فهو يرجع إلى القرن الثامن عشر الميلادي – وهو نسّاخ غالباً ما التقينا به اسمه مصطفى صدقي[٧]. ولقد نسخ مصطفى صدقي، الذي كان مثقّفاً ومطّــلِعاً على الرياضيات، كتاباً عنوانه "كتاب عمل الدائرة المقسومة بسبعة أقسام متساوية لأرشميدس، ترجمة ثابت بن قرَّة الحرّاني، وهو مقالة واحدة وثمانية عشر شكلاً"[٨]. هذا إذاً نصٌّ لأرشميدس ترجَمه ثابت بن قرّة، وهو وثيقة قيِّمة ومُعتبَرة كذلك منذ أن ترجمها ث. شوي (*C. SCHOY*) إلى الألمانية[٩]. ولكنَّ الوضع لا يلبث أن يتغيَّر، إذ إنَّ النسَّاخ، كرجل شريف، يُنبِّهنا بعَجَلة عندما يكتب:

"إنّي لــمّا أردت أن أستنسخ هذا الكتاب، فما ظفرت إلا بنسخة سقيمة مُختلّة لجهل ناسخها وقصور فهمه. فبذلت جهدي بقدر استطاعتي في تحقيق مسائلها وتركيب تحليلاتها وترتيب أشكالها بعبارة سهلة قريبة المأخذ، وأوردت فيها بعض براهين المتأخِّرين..."[١٠].

يترك لنا قولُ مصطفى صدقي هذا وضعاً معقّداً. إنَّ لدينا سؤالين يطرحان نفسيهما لمنعنا من كل استنتاج أكيد: ماذا يبقى من النصّ الأصليّ بعد ما قام به مصطفى صدقي من التحرير والشرح والإضافات؟ وهل لدينا ما يُبرهنُ أنَّ هذا النصّ الأصليَّ هو فعلاً من أعمال أرشميدس؟ إنَّ كتابة مصطفى صدقي هي في أحسن الأحوال كتابة

---

[٦] انظر: النديم، كتاب الفهرست، نشرة رضا تجدُّد (طهران ١٩٧١)، ص. ٣٢٦
[٧] انظر المجلد الأوّل من كتابنا هذا، الفصل الثاني، تاريخ النصوص؛ انظر كذلك:
R. Rashed, Géométrie et dioptrique au Xᵉ siècle. Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham (Paris, 1993), ص. CXXXVI على سبيل المثال.
[٨] انظر الملحق الأوّل: "كتاب عمل الدائرة المقسومة بسبعة أقسام متساوية لأرشميدس" ، مخطوطة القاهرة ٤١، الأوراق ١٠٥و-١١٠و.
[٩] انظر: C. Schoy, *Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen Abū'l Raiḥān Muḥammad Ibn Aḥmad al-Bīrūnī* (Hanovre, 1927)، ص. ٧٤ وما يليها.
[١٠] انظر ص. ٦١٧.

مركَّـبة تتضمَّن براهين لرياضيين متأخِّرين مثل الحُبوبي والشَّني؛ وهي في أسوأ الأحوال خليطٌ لا تحتلُّ فيه مسألة المسبَّع سوى قضيّتين بين ثماني عشرة قضيَّة. ولكنَّ النصَّ يُثير، أيضاً، صعوباتٍ أخرى. فالقضايا الست عشرة الأولى هي فعلاً بسيطة، إذ إنّها تعالج حساب قِطَعٍ على خطّ مستقيم بواسطة التطابقين المُمَيِّزين $(a \pm b)^2$ وَ $(a+b+c)^2$ وبواسطة مبرهنة فيثاغوروس وعبارات لمساحة مثلّث قائم الزاوية. ويتمُّ إدخال الدائرة المحاطة بمثلّث، بدءاً من القضية التاسعة، كما يتمُّ استخدام خاصّة الخطّين المماسَّين الخارجين من نقطة موجودة خارج الدائرة وخاصّة قوَّة النقطة. وقد يحدث أن يقدِّم المحرِّر ثلاثة أو أربعة براهين للقضية نفسها، وأن يكون اثنان من هذه البراهين منسوبين بوضوح إلى رياضيّين من القرن العاشر مثل الشَّني. ونقول، باختصار، إنَّ أساس تنظيم هذا المؤلّف غير واضح، كما نتحقّق أنَّ، من بين القضايا الستّ عشرة الأولى، لا توجَد قضيّة واحدة ذات فائدة ما للقضيَّتين الأخيرتين اللتين تعالجان مسألة المسبَّع. وهذا يعني أنّه لا يجب أن نتوقّع من التحليل أيّة إشارة تسمح بنسبة هذا النصّ إلى أرشميدس أو إلى ثابت بن قرّة[١١].

---

[١١] هذه هي حالة القضية العاشرة التي هي الأكثر قرباً من القضايا الخاصّة بمقدّمة أرشميدس. يُمكن أن نعيد كتابة هذه القضية كما يلي:
لتكن I نقطة تقاطع HD مع العمود في C على CB؛ فيكون عندئذٍ $\frac{DC}{EB}=\frac{CH}{HB}$.
يكون معنا: $CI \perp CB$ فيكون $AE//CI$ فيكون المثلّثان ICD وَ EAD متشابهين وبالتالي: $\frac{AD}{CD}-\frac{AE}{CI} \Leftarrow \frac{CI}{CD}-\frac{AE}{AD}$.
ولكنَّ $AE=CI$، فيكون $CD = CI$. ويكون المثلّثان HBE وَ HCI، من جهة أخرى، متشابهين فنحصل على: $\frac{CD}{EB}=\frac{CI}{EB}=\frac{CH}{HB}$.
ملاحظة: يكون معنا إذاً: $CB.CG=CH.BG \Leftarrow \frac{CG}{BG}=\frac{CH}{CB}$. وهذا ما يعطي خاصّة القسمة (C, B, G, H)؛ وهي الخاصّة التي لن تُستَخدَم لاحقاً، عند دراسة هذه القسمة.
إنَّ الذي هو أخطر من ذلك وأكثر أهمِّيّة هو الخطأ الذي ارتُكب في القضية التاسعة والذي لم يكن لأرشميدس أو لثابت بن قرَّة أن يرتكباه. تُكتَب هذه القضية ثانية كما يلي:
ليكن ABC مثلّثاً قائم الزاوية في B ومحيطاً للدائرة DEG؛ فيكون عندئذ $BH = AD$.
نورد فيما يلي باختصار البرهان الموجود في النصّ.
يكون معنا:

$$AH^2 = HD.HE + EA^2 \Rightarrow AB^2 + BH^2 = HG^2 + EA^2 \qquad (١)$$

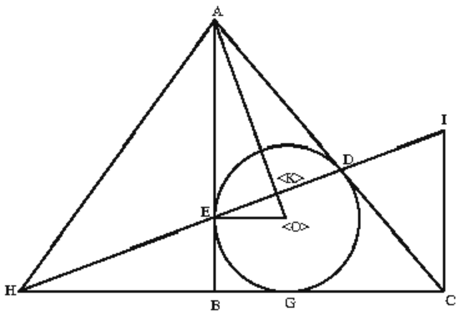
فنحصل على $AB^2 + HB^2 = HG^2 + EA^2 \Rightarrow AB^2 = BG^2 + EA^2 + 2HB.BG$،
فيكون : $2AE.EB + EB^2 = AB^2 - EA^2 = BG^2 + 2HB.BG$،
ولكنَّ $BG = EB$، فنحصل على النتيجة المطلوبة.
ولكنَّ المعادلة التي يعطيها المؤلف، $AH^2 = HD.HE + EA^2$، ليست نتيجة مباشرة للفرضيات؛ بل إنّها مستخرَجة من النتيجة المطلوبة.

$$AD = AE = BH. \qquad (٢)$$

يتعلق الأمر بخطأ في الاستدلال، لأنّه لا يمكن أن نفترض وجود خطأ في صيغة القضية خاصّ بالأحرف ولا أن يكون الخطأ متعلقاً بالخاصّيّة المطلوب برهانها. =

وإذا أردنا التحقّق ولو جزئيّاً من أصالة النصّ، بالاستعانة بمترجمه المزعوم، نصطدم سريعاً بعقبات لا يمكن تجنّبها. فإذا رجعنا إلى مؤلّفات ثابت بن قرّة – الكتابات والترجمات – لا يُمكن إلا أن يخيب أملنا: ليس هناك مصدر يسمح لنا بنسبة مثل هذه الترجمة إليه، ولا يُشير أحدٌ من كـتّاب السيَر القدامى إلى ما يُشبه ذلك[١٢]. وهذا المؤلّف، بالإضافة إلى ذلك، غائب عن قائمة أعمال ثابت بن قرّة المحفوظة من قِبَل عائلته. ولكنَّ هذه القائمة موثـّقة، كما هو معلوم، فقد أوردها حفيده المحسن إبراهيم الصابئ[١٣]. يبقى لدينا رياضيّو القرن العاشر الذين عالجوا مسألة المسبَّع. إنّهم، كلّهم تقريباً، متّفقون على أن ينسبوا إلى أرشميدس نصّاً حول المسبَّع متضمِّناً للمقدّمة المشهورة. وهم يُشيرون إلى هذا المؤلّف بعبارات مبهمة قليلاً، بينما هم يوردون جيّداً المقدّمة؛ ولكن بالرغم من تواجُد المعنى نفسه ، فإنَّ صيغة المقدّمة تختلف في كلّ مرّة عن الصيغة الموجودة في النّص المنسوب إلى أرشميدس.

– النتيجتان (١) وَ (٢) هما صحيحتان، بالفعل؛ نبرهن (٢) ونستخرج منها (١). والمعادلة (٢)، من جهة أخرى، وكذلك المعادلة $AB = GH$ التي تستخرج منها، تُستخدمان في القضية ١١ لبرهنة أنّ مساحة المثلث ABC تساوي $AD.AC$.



الشكل ١

ملاحظة: ولنأخذ، لأجل تبيين أنّ $AD = AE = BH$، النقطة O، مركز الدائرة المحاطة بالمثلث ABC، والنقطة K، نقطة التقاطع بين AO وَ ED. يكون معنا $\widehat{AKE} = \widehat{AEO}$ – زاوية قائمة فيكون إذاً $\widehat{AOE} - \widehat{AEK}$. ولكنّ $\widehat{HEB} = \widehat{AEK}$، فيكون $\widehat{AOE} - \widehat{HEB}$؛ فيكون المثلثان AEO وَ HEB متشابهين ويكون لهما ضلعان متساويان لأنّ $EO = BG = EB$؛ فيكونا إذاً مُتقايسيْن، ويكون $AD = AE = BH$.

لنبيِّن أنّ (٢) يتضمّن (١). إذا كان $AD = BH$**، يكون معنا أيضاً** $AE = BH$ **وَ** $AB - HG$**. ولكن، من جهة** أخرى، $HE.HD = HG^2$ فيكون $HE.HD + AE^2 = AB^2 + HB^2 = AH^2$.

لا يُمكن لهذا البرهان أن يغربِ عن بال أرشميدس أو عن بال ثابت بن قرّة؛ وهذا ما يجعلنا نشكّ مباشرة في أصالة هذا النصّ.

[١٢] لقد توصّلنا إلى هذه النتيجة بعد أن تفحّصنا كلّ مؤلفات كتّاب السِّيَر القدامى

[١٣] **انظر: المجلد الأوّل من هذه الموسوعة.**

يُشير المؤلّفون، بدءاً من أبي الجود بن الليث في سنة ٩٦٨-٩٦٩ للميلاد حتّى ابن الهيثم في القرن التالي، وفقاً لعبارات المؤلّف الأوّل، إلى "رسالة أرشميدس في عمل المسبَّع". يقول القوهي المعاصِر لأبي الجود حول هذه الرسالة:

"وهو كتاب لطيف لم يُتمِّم قصده [الكلام هو عن أرشميدس] ولا أكمل غرضه في استخراجه من طريق واحد، فكيف من طرق كثيرة."[١٤]

إنَّ هذه العبارات تسمح لنا، بالرغم من أنّها ليست واضحة، بأن نستنتج كما ينبغي (إلا إذا اتّخذنا موقفاً نقدياً شكّاكاً) أنَّ الرياضيّين في منتصف القرن العاشر كانوا مطّلعين على مؤلّف منسوب إلى أرشميدس ومترجم إلى العربية. كلٌّ ما في الأمر هو أن نعرف إذا كان هذا المؤلّف مطابقاً للنصّ الذي نسخه مصطفى صدقي. وسوف تسمح لنا مقدّمة أرشميدس، وهي القيّمة لعدَّة أسباب بالنسبة إلى رياضيّي القرن العاشر، بأن نبدأ المناقشة.

لقد صيغت هذه المقدِّمة، ضمن تحرير مصطفى صدقي، على الشكل التالي:

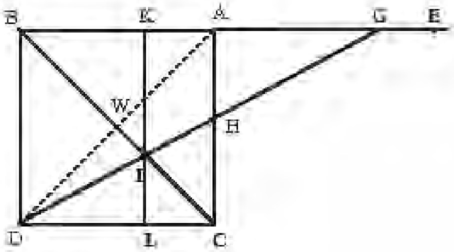
"لنفرض مربَّعاً عليه ا ب جـ د ونخرج ضلع ا ب على استقامته من جهة ا إلى هـ، ونصل قطر ب جـ ، ونضع طرف المسطرة على نقطة د وطرفها الآخر على خطّ هـ ا بحيث تقطع هـ ا على نقطة ز ، ويكون مثلّث ز ا ح مساوياً لمثلّث جـ ط د ؛ ونخرج من نقطة ط خطّ كـ ط ل موازياً لـِ ا جـ . فأقول إنَّ سطح ا ب في كـ ب مساوٍ لمربّع ز ا ، وسطح ز كـ في ا كـ مساوٍ لمربَّع كـ ب وكلٌّ واحد من خطّيْ ب كـ ز ا أطول من خطّ ا كـ (انظر أدناه، ص. ٦٢٩-٦٣٠).

تَظهر المقدِّمة في هذا المؤلّف كأنّها نوع من الرسم بالآلة(النيوسِس) لقسمة قطعة من خطّ مستقيم؛ ويقول ت. هيث (*Th. HEATH*) إنَّ أرشميدس قد قام بحلّ مسألة

---

[١٤] انظر ص. ٦٩٦.

الرسم هذه "بواسطة المسطرة بدون أن يهتمّ بتبيين كيفية حلّها بواسطة القطوع المخروطية أو بطريقة أخرى"[١٥].



الشكل ٢

تحصل على البرهان،على كل حال، بشكل مباشر. نستخرج بالفعل، من المساواة بين مساحتي المثلّثين AHG و CID، ما يلي: $\frac{AH}{IL}=\frac{AB}{AG} \Leftarrow AG.AH = DC.IL$

المثلّثات GAH، GIK و ILD متشابهة، فنحصل على:

$$.AB.KB = GA^2 \Leftarrow \frac{AB}{AG}=\frac{GA}{KB} \Leftarrow \frac{AH}{IL}=\frac{GA}{LD}=\frac{GA}{KB} \qquad (١)$$

ويكون معنا أيضاً:

$$.KA.GK = BK^2 \Leftarrow \frac{BK}{GK}=\frac{DL}{GK}=\frac{IL}{KI}=\frac{KA}{KB} \Leftarrow KI = BK = DL \text{ ، } IL = KA \qquad (٢)$$

يكون معنا أخيراً $AK < GK$ ، فيكون إذاً وفقاً لـ (٢)، $AK < KB$. ولكنّ $KB < AB$، وكذلك، وفقاً لـ (١)، $KB < GA$، فيكون إذاً $AK < GA$. وهكذا نستنتج المتباينتان $KA < BK$ و $AK < GA$ من (١) و (٢).

يكفي أن نتفحّص كلّ نصّ من النصوص المتداولة في القرن العاشر لمقدّمة أرشميدس، لنتحقّق أنّها كلّها مختلفة عن النصّ السابق، إذ إنّ أيّ نصّ من هذه

[١٥] انظر: Th. L. Heath, *A Manual of Greek Mathematics* (New York, 1963)، ص. ٣٤١

النصوص لا يـــشير إلى المسطرة المتحرّكة. لِنرَ كيف يعرض أبو الجود مقدّمة أرشميدس، وفقاً لما ذكره السجزي:

"لنُخرِج قطر مربّع اب جـد وهو اجـ. ونخرج [ضلع] اب إلى هـ بلا نهاية، ولنخرِج من نقطة من ب هـ - ولتكن هـ - خطّاً مستقيماً إلى زاوية المربّع عند نقطة د ، يقطع قطر اجـ على نقطة ز وضلع ب جـ على نقطة ح ؛ ويصير مثلّث ب ح هـ الخارج من المربّع مساوياً لمثلّث جـ د ز."[١٦]

يتعلّق الأمر إذاً بالشكل نفسه (إذا استثنينا تغيُّر الأحرف)، ولكن ليس هناك أثرٌ للمسطرة المتحرّكة. ويُمكن أن نتحقّق من أنَّ هذا الوضع هو نفسه في كلِّ نصوص المقدّمة التي قدَّمها رياضيّو القرنين التاسع والعاشر أو الرياضيّون الأكثر تأخـُّـراً الذين كتبوا بالعربية.

هذا هو إذاً الاختلاف المُهّمّ وغير القابل للاختزال بين صيغة المقدّمة التي كان رياضيّو القرنين العاشر والحادي عشر مطّـلعين عليها، وصيغة المقدّمة المنسوبة إلى أرشميدس في مخطوطة القرن الثامن عشر : استخدام المسطرة المتحرّكة. ولو تمَّت الإشارة إلى هذا الاستخدام لما أمكن للهندسَيِّين مثل القوهي وابن الهيثم أن لا يطّلعا عليه. ولم يكن بإمكان هؤلاء، الذين كانوا قادرين تماماً على تقدير براعة هذه الطريقة، أن يقبلوا بشرعيتها كتـقَنيّة مؤدّيَة لعمل هندسيٍّ صالحٍ. لا يتعلّق الأمر هنا بحجّة واهية، إذ إنّها تمسُّ الطبيعة نفسَها للعمل الرياضيّ، وخاصّة عندما نتكلّم على عالمٍ مثل ابن الهيثم الذي كان يهتمَّ إلى درجة فائقة بمسائل وجود الحلول. فهل امتنع، كما فعل أسلافه، عن استخدام عبارة أرشميدس؟ ليس هذا اعتقادنا، إذ إنَّ هذا لم يكن

[١٦] انظر: كتاب أحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي في عمل المسبّع في الدائرة وقسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية، . ٦٦٤.

أسلوبه ولا أسلوب أسلافه؛ لقد كانوا يميلون بالأحرى إلى إثارة مسألة صلاحية العمل الهندسيّ. وتشهد كتبهم النقديّة، من ناحية أخرى، على ميلهم هذا[١٧].

هل يُمكن الخروج من هذا الوضع إذا استعنّا بشكل ملائم بدراسة وافية للنصوص؟ الجواب سلبيٌّ. إنَّ التفحُّص التفصيليَّ والدقيقَ لنصّ مصطفى صدقي المكتوب بلغة عربية فصحى محضة لا يُظهِرُ – حتّى بين السطور – أيَّ استعانة باللغة اليونانية ولا يسمح بالحصول على أيّ أثر لترجمة في أيّ قسم من هذا النصّ. وهل يُمكِن، أخيراً، أن نرفض نسبة أيّ نصّ حول المسبَّع إلى أرشميدس؟ سيكون هذا الرفضّ ضرباً من المبالغة لعدَّة أسباب.

قد يحدث أن يعرض أرشميدس مسائل لا يقدِّم حلولاً لها مكتفياً بالإشارة إلى التحديدات. وقد تكون من هذا الصنف المقدِّمة المشهورة، المذكورة أعلاه، من كتاب "الكرة والأسطوانة". ويمكن أن تكون مسألة المسبَّع من نفس هذا النوع.

وهذه المسألة هي من المسائل التي قد أثارت اهتمام أرشميدس، ريّاضيّ سيراقوسة؛ وذلك لسببيْن. إنَّ مسألة المسبَّع المتساوي الأضلاع، كما لاحظ ت. هيث (*Th. Heath*)[١٨]، صادرة على الأرجح من مسألة عمل المُضلّعات المتساوية الأضلاع في الدائرة. لقد أثارت هذه المسائل اهتمام أرشميدس. إنَّ نجاح طريقة المسطرة والبركار في عمل المثلّث والمربَّع والمخمَّس والمسدَّس قد أدَّى إلى البحث عن تقنية مشابهة للمسبَّع. لم يكن أرشميدس يرفض الطرائق التقريبية للقيام بهذه المهمّة؛ ويُمكن أن نصف هذا الموضوع بأنّه أرشميديّ. وإذا نظرنا، أخيراً، إلى الشكل، وإذا كانت G أبعد من A، نرى أنَّ هناك حلاً وحيداً؛ وذلك لأنَّ $\widehat{DIC}$ ، من جهة، تتناقص من $\widehat{DWC}$ إلى الصفر، ومن جهة أخرى تتزايد $\widehat{AHG}$ من الصفر إلى ما لانهاية. وهذه الملاحظة تؤدِّي إلى رسم بالآلة (نيوسِس) قد يكون أرشميدس قام به.

---

[١٧] انظر نقد "المجسطي" لابن الهيثم أو شروحه لكتاب "الأصول" لأقليدس.

[١٨] انظر "*Th. Heath, A History of Greek Mathematics, t. I*"، ص.٢٣٥.

وأخيراً، يُلمّح أبو الجود إلى أنَّ الذي يُريد أن يحلَّ مسألة المسبَّع بواسطة رسم بالآلة (نيوسِس) يجب عليه الرجوع إلى مقدِّمة أرشميدس:

"وحصل المثلّث المعلوم الذي عمله أرشميدس وغيره ممَّن رام عمل المسبَّع بالآلة والحركة بمقدِّمته التي قلدها، لأنَّ زوايا هذا المثلّث متوالية على نسبة الضعف."[١٩]

يُمكن أن نرى في هذه الجملة إشارة إلى مؤلّف منسوب إلى أرشميدس حيث توجد القضيتان ١٧ وَ ١٨ من النصّ الذي نسخه مصطفى صدقي.

وإذا أخذنا كلَّ شيء بعين الاعتبار، يمكن إذاً أن نؤكـِّـدَ وجود مؤلّف حول عمل المسبَّع منسوب إلى أرشميدس، وأنَّ هذا المؤلّف كان متداولاً في القرن العاشر، وأنَّ لدينا منه أثرين: أحدهما مذكور في كتابات ريّاضيِّي ذلك العصر، والآخر مذكور في مؤلّف مصطفى صدقي (القضيتان ١٧ وَ ١٨) كما ألمح إليه أبو الجود؛ يوجَد بين هذين الأثرين فرقٌ أساسيّ لا يمكن حذفه بوسيلة من الوسائل. ومجمل الأمر هو أنَّ هذا المؤلّف يتضمَّن، كما يبدو، قضيّتين – هما ضمن مؤلّف مصطفى صدقي – وأنَّ ريّاضيِّي القرن العاشر قد أهملوا الرسم بالآلة (نيوسِس) ولم يحتفظوا سوى بالصيغة. هذا هو كلُّ ما نستطيع قوله، وسوف نتّبع بعد الآن التقليد فنتكلّم على "مقدِّمة أرشميدس".

١-٢ جدل حول الأولويّة: السجزي ضدّ أبي الجود

لم يبلغ الاهتمامُ بمسائل المجسَّمات قطّ القوَّة التي بلغها قـُـبَيْلَ الثلث الأخير من القرن العاشر؛ إذ إنَّ عدد هذه المسائل كان في تزايد مستمرّ، وكذلك كان عدد الرياضيّين الذين كرَّسوا أعمالهم لها. إنَّ لهذه الظاهرة نوعين من الأسباب. لقد أكـَّـدنا في أوّل الأمر دور الاهتمامات الجديدة الهندسيّة والجبرية[٢٠]. أمّا السبب الثاني فيكمن في الأشكال الجديدة للنشاط الرياضيّ والعِلميّ التي كانت الركيزة الحقيقيّة لهذه الاهتمامات. ولم تحظَ هذه الأشكال التي قد أشرنا إليها، بالدراسة التي تستحقّها: يتعلّق الأمر بظهور مجموعات جديدة من الريّاضيّين ارتبط أعضاؤها فيما بينهم عن طريق تبادل الرسائل وعن طريق

---

[١٩] انظر ص. ٦٤٥-٦٤٦.

[٢٠] انظر رشدي راشد وبيجان وهاب زاده، ريّاضيّات عمر الخيّام، (بيروت، ٢٠٠٥).

المحاورات المباشرة في العديد من المجالس أو حتّى في مجالس الملوك والوزراء ولدى داعمي العلوم[٢١]. وكان من بين نتائج هذا الوضع غير المسبوق إثارة التنافس وتشجيع التحدّيات وإطلاق المجادلات. وكان التفوّق على المنافسين طريقة للتقرُّب من مراكز السلطة وحتّى للوصول إلى قمّتها في بعض الأحيان.

ولقد جرت إعادة تنشيط البحث في المسبَّع، بالتحديد، داخل هذه المجموعات وفي هذا الجو. لقد ظهر هذا الموضوع على الفور كتحدٍّ؛ وهذا ما يشهد عليه مراسلون ذوو نفوذ مثل محمَّد عبد الله الحاسب وأحمد الغادي (؟)...؛ وكانت رسالة كلّ واحد منهم مُهداة إلى الملك نفسِه؛ فالصاغاني أهداها إلى عضد الدولة؛ والقوهي أهدى رسالته إلى هذا الأخير وإلى ابنه شرف الدولة؛ وكان كلٌّ واحد منهم يشكو منافسَه إلى المجموعة. وأخيراً، كان للبحث في مسألة عمل المسبَّع بُعدٌ اجتماعيٌّ فاقت أهمِّيَّته أيَّ بحث ريّاضيّ آخر في ذلك العصر. وهكذا نفهم أنَّ البحث في مسألة المسبَّع قد استؤنِف في جوّ من الحرب الكلامية.

سنتناول هنا، ثانية، رواية وقائع عمل المسبَّع. لقد حُرِّرَت هذه الرواية مرَّتين، كما حُرِّرَ الجدل حول هذا العمل مرَّتين أيضاً. حصل ذلك في المرَّة الأولى في حوالى نهاية القرن العاشر عندما حرَّر أحد الرياضيِّين، الذي كان، بداهة، لا يحب أبا الجود، رسالة عنوانها "كتاب كشف تمويه أبي الجود". يصل الشنِّي في هذه الرسالة، وهو كاتب هذه الرسالة اللاذعة في النقد، إلى قَدح أبي الجود. حرَّر عادل أنبوبا[٢٢] بالعربية

---

[٢١] انظر: عادل أنبوبا "تسبيع الدائرة"، ضمن *Journal for the History of Arabic Science*, vol. 1, n° 2 (1977)، ص. ٣٥٢-٣٨٤؛ انظر أيضاً:

R. Rashed, *Géométrie et Dioptrique au X^e siècle: Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham* (Paris, Les Belles Lettres, 1993)، ص. CXXVII وما يليها.

[٢٢] يروي عادل أنبوبا تاريخ عمل المسبّع المتساوي الأضلاع من أبي الجود إلى الشنّي في مقالته "تسبيع الدائرة"(المذكورة في الحاشية السابقة). ولقد أعطى، بناءً على طلب المجلّة، ملخَّصاً بالفرنسية لهذه الدراسة ظهر في نفس المجلة، المجلد ٢، رقم ٢، ص. ٢٦٤-٢٦٩. ولقد نشرنا نحن أيضاً، بعد ذلك بما يقرب العام، مقالاً بعنوان "عمل المسبّع المتساوي الأضلاع لابن الهيثم" في *Journal for the History of Arabic Science*, vol. 3, n° 2, (1979)، ص. ٣٠٩-٣٨٧؛ وهذا ما أكمل دراسة عادل أنبوبا. يجد القارئ غير الملمّ بالعربية، في مقال لِـ ج. ب. هوجنديجك (J. P. Hogendijk)، إعادة لدراسة عادل أنبوبا لفترة الثلث الأخير من القرن العاشر مضافاً إليها تحقيقاً وترجمة إلى الإنجليزية لمؤلف السجزي مع عدّة استشهادات لمختلف الرياضيين:
[«Greek and Arabic Constructions of Regular Heptagon», *Archive for History of Exact Sciences*, n° 30 (1984)]
ص. ١٩٧-٣٣٠.
=

أوّل تأريخ حديث للمسبَّع المتساوي الأضلاع في ذلك العصر، أيْ قبل ابن الهيثم. ينتقد عادل أنبوبا بحقٍّ، في هذا العمل الجيِّد الذي قام به، كلامَ الشنِّي غير المقبول في بعض الأحيان، بدون أن يتحرَّر تماماً من تأثير الشنِّي. يجب علينا إذاً أن نضاعِف الحذر وأن نـــُخضِع شهادة الشنِّي لقواعد النقد التاريخي.

تتضمّن رواية الشنِّي، أي الرواية الأولى لتاريخ المسبَّع، قسمين. فهو يتكلّم في أوّل الأمر (انظر ص. ٧٢٢)على "شكل أرشميدس"، أيْ مقدِّمة أرشميدس، قائلاً: "ثمَّ كان هذا الشكل على حالته حتّى تهيّأ لأبي سهل ويجن بن رستم الكوهي وأبي حامد أحمد بن محمد بن الحسين الصاغاني، لكلّ واحد منهما، استخراجه بالقطوع المخروطية" (انظر أدناه ص.٧٢٥). وهذا يعني أنَّ المقدِّمة قد بُرهِنت مرَّتين، بشكل منفصل؛ فقد برهنها القوهي بتاريخ ٣٦٠/٩٦٩-٩٧٠ وبرهنها الصاغاني سنة٩٧٠. قسمَ القوهي قطعة من خطّ مستقيم[23] بواسطة قطع مكافئ وقطع زائد؛ أمّا الصاغاني فقد استـَخدم فرعي قطع زائد (قطعين متقابلين) وفرعاً من قطع زائد آخر. يبدأ القسم الثاني مع أبي الجود.

ينسب الشَّنّي إلى أبي الجود، بالرغم من الصورة البغيضة التي رسمها لشخصه المتّهم بعدم الكفاءة وبالسرقة، قسمة قطعة الخطّ المستقيم، وهي القسمة التي نرمز إليها لاحقاً[24] بـِ D_2. وهذه القسمة هي تلك التي تؤدِّي إلى عمل المسبَّع المتساوي الأضلاع. ولكنَّ الشنِّي يلوم أبا الجود على خطأين وعلى نـُقصان. والخطآن هما اللذان أشار إليهما السجزي قبل ذلك بربع قرن على الأقلّ. فقد أبدل أبو الجود، خلال البرهان، النسبة الصحيحة بنسبة أخرى. والأسوأ من ذلك هو أنّه، في الحقيقة، لم يُثبت، هذه القسمة. إنَّ الضَّعْف، الذي اتّهِم به من ناحية أخرى، منعه من رؤية أنَّ قسمتَه معادلة لقسمة أرشميدس.

= ولكنَّ التحقيقات والترجمات الموجودة في هذا المقال ليست مرضية إلا قليلاً. والمثال على ذلك أنّنا لا نجد في نصّ قصير من سبعة أسطر لابن سهل أقلّ من عشرة أخطاء تخصُّ التحقيق، بدون حساب أخطاء الترجمة (ص.٣١٠-٣١١). قارن هذا النص بما أوردناه في *Géométrie et Dioptrique au X^e siècle* ، ص. ١٨٣-١٨٤.

[23] أنظر لاحقاً

[24] انظر ص. ٣٦٨-٣٦٩.

إنَّ رسالة أبي الجود التي ينتقدها الشَّنّي بعنف مؤرَّخة في سنة ٣٥٨/٩٦٨-٩٦٩. فهي، إذاً، أوّل رسالة تتمُّ الإشارة إليها حول المسبَّع. لا يُحدِّد الشَّنّي موضعها بوضوح بالنسبة إلى رسالة القوهي التي حُرِّرت بعد تحريرها بسنة تقريباً. ولكنّه يُشير إلى أنّها الرسالة الأولى بالرغم من أنّه يعتبر أنَّ أبا الجود لم ينجح فيها حقّاً. فلعلّه لم يضع هذه الرسالة في موضعها الصحيح، لأنّه كان يعتبرها محاولة شبه فاشلة.

يشير الشَّنّي عندئذ إلى الدور الرئيسيّ الذي لعبه ابن سهل. كان السجزي، في نهاية الستينيات حسب قوله، رياضيّاً شابّاً عندما تـنـبَّه للخطأ المزعوم الذي ارتكبه أبو الجود عند قسمة قطعة الخطّ المستقيم؛ ولكنّه لم يكن قادراً على الوصول إلى الحلّ، فأرسل المسألة إلى ابن سهل. فحلّل هذا الأخير المسألة بواسطة قطع زائد وقطع مكافئ. أمّا السجزي، فقد يكون، بعد أن قام بتركيب تحليل ابن سهل، قد نسَب إلى نفسه عمل المسبَّع. وقد يكون حلُّ ابن سهل قد وقع بين يديْ أبي الجود الذي انتحله بدوره، كما فعل السجزي. وهذا ما أغضب الشَّنّي الذي كتب رسالة انتقد فيها بعنف أبا الجود.

هذا هو، باختصار، أهمّ ما ورد في رواية تاريخ المسبَّع التي رواها الشَّنّي؛ ويمكن أن نقرأها بكاملها أدناه[٢٥]. ولنلاحظ أنَّ قسماً من هذه الرواية قد اقتُبِسَ عن السجزي وأنَّ قسماً آخر لا يتوافق مع الوثائق الموجودة بين أيدينا، وأنَّ هذا المصدر هو الوحيد الذي يصف مع بعض التفاصيل مداخلة ابن سهل. وهكذا يجب علينا أن نقابل رواية الشَّنّي مع الروايات الأخرى الموجودة لدينا.

نحن نعلم أنَّ أبا الجود نفسه قد حرَّر ثلاث رسائل في المسبَّع. كتب الرسالة الأولى، التي أهداها إلى أبي الحسيْن عبيد الله بن أحمد، سنة ٣٥٨/٩٦٨-٩٦٩. وهذه الرسالة هي التي أثارت انتقادات السجزي، كما أثارت انتقادات الشَّنّي بعد ذلك. وهذه الرسالة هي التي أعادت النشاط إلى البحث في المسبَّع. ولكنَّ كلَّ معلوماتنا عنها غيرُ

---

[٢٥] انظر ص. ٧١٩ وما يليها.

مباشرة لأنّها مفقودة. ليس لدينا إذاً سوى شهادات أبي الجود والمشنّعين به. ولنلاحظ الآن أنّهم كلّهم متّفقون على أنَّ أبا الجود أرجع دراسة المسبَّع إلى دراسة مثلّث من النوع [1, 3, 3]، وأنّه قام برسم هذا المثلّث استناداً إلى قسمة قطعة من خطٍّ مستقيم قدَّمها لهذا الغرض. وسنرى لاحقاً أنَّ أبا الجود قد شرح كيف توصّل إلى هذه الطريقة.

يكتب أبو الجود في رسالته الثانية التي يُشير فيها إلى رسالته الأولى:

"وعلمت بأنَّ بعض المهندسين نسب هذا العمل جزافاً إلى أبي سهل الكوهي، ثمَّ غيَّر بعضه وانتحله لنفسه"[٢٦].

يبدو أنَّ هذا الاتهام موجَّه إلى السجزي وأنّه ردٌّ على نقد لاذع قد تعرَّض له. وذلك أنَّ هذا الأخير انتقد بالتحديد أبا الجود لضعف برهانه، كما انتقده لأنّه نسب لنفسه أسبقيّة إيجاد الحلّ الصحيح للمسألة؛ ولكنّه لم يدَّعِ أنّه هو الذي طرح المسألة. بدأ هذا الجدل في أوائل السبعينيات، ولم يتوقّف عن الازدياد. ولقد وصل الأمر بالسجزي في النهاية إلى لوم أبي الجود، بدون أيّ حذر، على تصرُّفات لم يَلُـمه عليها قبل ذلك عند عمل المسبَّع. وهكذا لم يتردَّد ضمن "جواب أحمد بن محمَّد بن عبد الجليل عن مسائل هندسية سأل عنها أهل خراسان" في كتابة ما يلي:

"إذ هو يستقبح الأشكال التي لا يتهيّأ له معرفتها... إذ حكيت في صدر كتابي في المسبَّع ركاكته في هذه الصناعة وهو المعروف بمحمّد بن الليث الذي أخذ مقدّمات كتابي في المسبَّع بعد معرفته في الهندسة وأضافها إلى نفسه"[٢٧].

سنرجع إلى بداية هذا الجدل قبل أن يأخذ هذا المدى، لكي نستطيع التعرُّف على عناصره. لنبدأ بأبي الجود الذي يكتب:

---

[٢٦] انظر: كتاب عمل المسبّع في الدائرة لأبي الجود محمّد بن الليث أرسله إلى أبي الحسن أحمد بن محمّد بن إسحاق الغادي، ص. ٦٣٥

[٢٧] انظر: جواب أحمد بن محمّد بن عبد الجليل عن مسائل هندسية سأل عنها أهل خراسان، تشستر بيتّي ٣٦٥٢ (Chester Beatty 3562)، الورقة ٥٥و؛ وكذلك المخطوطة رشيد ١١٩١ (Reshit 1191)، الورقة ١١٤ ظ.

"ثمَّ عمل بعد ذلك أبو سهل الكوهي رسالة في هذا الشكل، بعد ما عملته بسنين غير قليلة، واعتمَد فيه مقدِّمات أرشميدس"[٢٨].

ثمَّ يتابع قائلاً:

"ثمَّ عمل بعد ذلك أبو حامد الصاغاني رسالة في هذا الشكل، فقصد فيها هذا المربَّع (مقدِّمة أرشميدس)، [...]، واستعان في ذلك بثلاثة قطوع زائدة، متقابلان وثالث، وبعمل طويل وأشكال وخطوط كثيرة"[٢٩].

هذه الأقوال صحيحة مع فارق دقيق. إنَّ مُشنِّعي أبي الجود متّفقون ضمنيّاً على هذه الرواية؛ والنقطة الوحيدة التي يعارضونها هي النجاح في عمل المسبَّع؛ ولكنَّ أبا الجود يُضخِّم الفترة التي تفصل عمله عن عمل القوهي : لا يتعلّق الأمر "بسنين غير قليلة"، بل بسنة واحدة تقريباً. تبدو إذاً رواية أبي الجود صحيحة، في مُجملها على الأقلّ، عندما يروي تتابع أحداث عمل المسبَّع. زِدْ على ذلك أنَّ الأمر لا يمكن أن يكون غير ذلك، نظراً إلى تدخُّل القوهي ذي التأثير غير المنازع فيه وإلى تدخُّل الصاغاني الذي هو أستاذ أبي الجود. ولكن، يبقى أنَّ رواية أبي الجود تتجاهل السجزي وتحرِمه من رفقةٍ ذات اعتبار وهي رِفقة القوهي والصاغاني. لقد حدث الاكتشاف، باختصار، وفقاً للترتيب التالي حسب قول أبي الجود: أبو الجود ثمَّ القوهي ثمَّ الصاغاني. أمّا السجزي فلا يظهر في المقام الأوّل لأنّه انتحل إسهام القوهي، في حين إنَّ ابنَ سهل غائبٌ بكلِّ بساطة.

لنأتِ الآن إلى رواية السجزي. يُندِّد هذا الأخير، في تمهيد ذي أسلوب خطابيّ، بموقف أبي الجود القليل الاحترام لأرشميدس الهندسيّ؛ ثمَّ يلومه على خطأين في برهانه، وهذان الخطآن كافيان في نظر السجزي لحرمانه من أسبقيّة إيجاد الحلّ التي يطمع بها الجميع. ثمَّ يرسم السجزي صورة لأبي الجود قليلة الإطراء – صورة

[٢٨] انظر: كتاب عمل المسبّع في الدائرة لأبي الجود محمّد بن الليث أرسله إلى أبي الحسن أحمد بن محمّد بن إسحاق الغادي، ص. ٦٣٥.
[٢٩] انظر المرجع السابق، ص. ٦٣٦.

رياضيّ من الدرجة الثانية أو رياضيّ رديء بشكل واضح – ويُشير، بدون أن يقول صراحة، إلى أنّ معرفته بالقطوع المخروطية سيِّئة. لا يُمكن لهذه الصورة إلا أن تكون مُغيظة، لأنّ أعمال أبي الجود تنفيها بوضوح، كما ينفيها أيضاً خلفاءٌ له مشهورون مثل البيروني والخيّام[٣٠].

أمّا اتّهامه لأبي الجود بعدم احترام أرشميدس، وهذا ما كرَّره الشـنّي، فيبدو باطلاً. نورد فيما يلي كلاماً للسجزي نفسه الذي يستشهِد بما يقوله أبو الجود حول أرشميدس:

"قال (أبو الجود): قد قلّد أرشميدسُ – في خلال مقدّمات كثيرة قدَّمها لقسمة الدائرة بسبعة أقسام متساوية – مقدّمة لم يبين عملها ولم يبرهن عليها، ولعلّها أصعب عملاً وأبعد برهاناً مما له قدَّمها"[٣١].

يتمحور انتقاد المؤلّفين حول الفعل "قلد". فقد قرأه السجزي على شكل "قلّد"، وكذلك فعل الشنّي. إنّ المرء، بدون أن يكون متخصّصاً باللغة، ينفر من العبارة "قلّد مقدِّمة". ولكنّ الفعل قلد له معانٍ أخرى أكثر انسجاماً بالطبع مع النحو. توجد لدينا إذاً حالتان. فإما أن نقرأ "قَلَدَ" أو أن نقرأ "قَلَّدَ". تعطينا القواميس (ابن منظور، ابن فارس، ابن دريد الزبيدي، الخ...) في الحالة الأولى معنى جَمَعَ، أرْفَـقَ، رَبَطَ شيئاً بشيء آخر؛ وتعطينا في الحالة الثانية معنى فـرَضَ، ألْـزَمَ. فيمكن إذاً أن نقرأ في الحالة الأولى "... أرفق أرشميدس مقدّمة إلى مقدّمات عديدة..."، وفي الحالة الثانية "فرض أرشميدس مقدّمة إلى مقدّمات عديدة...". فإذا اخترنا أيّ شكل من هذين الشكلين، نتحقّق أن اعتراض السجزي لا أساس له، فتصبح فقرة أبي الجود واضحة من ناحية النحو، ومن ناحية المعنى.

يبقى لدينا، بعد أن استبعدنا هذه الدعوى الباطلة التي أثارتها المجادلة بدون شكّ، أن نتفحّص الخطأين اللذين اتُّهِـمَ أبو الجود بارتكابهما. يؤكِّـد السجزي، ويوافق

[٣٠] لا يتردّد الخيّام عن وصف أبي الجود بالمهندس الفاضل في كتابه في الجبر، تحقيق وشرح ر. راشد وَ ب. وهب زاده " الخيّام الرياضيّ"، ص. ١٣٨، ٢١١. أمّا البيروني فيتحدّث عن "المبرِّزين من أهل زماننا كأبي سهل وأبي الجود"، في "القانون المسعودي" (حيدرأباد ١٩٥٤)، المجلد الأوّل، ص. ٢٩٧.
[٣١] انظر أدناه، ص. ٦٦٤.

الشـــنّي على قوله هذا، أنّ أبا الجود في رسالته المحرَّرة في سنة ٣٥٨/٩٦٨-٩٦٩ يقوم بعمل المسبَّع مستخدماً أربع مقدّمات يمكن إعادة كتابتها كما يلي:

١- إذا كان نصفُ قطر دائرة، ذات مركز A ، مساوياً للمسافة بين A وخطٍّ ما، فإنَّ الدائرة مماسّة لهذا الخطّ.

٢- أخـــرِجْ من نقطة M على AB، ضلع المثلّث ABC، خطّاً موازياً للضلع AC الذي يقطع الضلع BC على النقطة N ، وبحيث يكون $MN = CN$.

٣- ليكن معنا الخطّ AB والنسبة $\frac{c}{d}$؛ أخرِجْ قطعة من خطّ مستقيم ذات طول x، بحيث يكون $\frac{c}{d} = \frac{x}{AB}$.

٤- اقسم القطعة AB على نقطة M بحيث يكون $x^2 = AB.AM$ وَ $\frac{c}{d} = \frac{x}{BM}$.

نلاحظ أنّ المقدّمة الأولى بديهية وأنّ المقدِّمتين الثانية والثالثة تتعلّقان برسوم هندسية بسيطة؛ أمّا القضية الرابعة فيمكن إعادة كتابتها كما يلي:

جِدْ نقطة M على AB بحيث يكون $\frac{\sqrt{AB.BM}}{MB} = \frac{c}{d}$(نسبة معلومة)؛ في الحالة التي يكون فيها $\frac{c}{d} = \frac{AB}{AB + BM}$، نحصل على قسمة القطعة D_2 - انظر لاحقاً - التي تؤدِّي إلى عمل المسبَّع.

إنّ انتقادات السجزي واضحة. أوّلها هو أنّ أبا الجود يستبدل النسبة المعلومة، خلال برهان القضيّة الرابعة، بنسبة أخرى. كان بإمكان معاصري السجزي أن يتحقّقوا من هذا الانتقاد الأخير، إذ كانت رسالة أبي الجود في متناول أيديهم، في حين إنّنا لا نستطيع فعل ذلك لأنّ هذا النص مفقود. وهذا الانتقاد يؤدِّي بنا إلى نقطة الجدل الأكثر إثارة للمناقشة. وسنعود إليها لاحقاً.

أمّا الانتقاد الثاني فهو أكثر غموضاً، إذ إنَّ السجزي يُلمِّح فيه أكثر ممّا يؤكِّد؛ فهو يكتب:

"وظنَّ (أبو الجود) أنّه يمكن عمل ذلك بمقدّمة الشكل الرابع. ولا يتهيّأ عمل ذلك إلا بالقطوع المخروطية، <و> الذي لا يعرف المخروط في الهندسة ولا قطوعه، فبهذه المقدّمات المسطّرة في كتب الأوائل التي بها يتهيّأ عمل المسبَّع للذي أضاف مقدّماته إليها. فأمّا بمقدّماته وأشباه مقدّماته، فإنّه عسر وجود المسدَّس في الدائرة،...، فضلاً عن وجود المسبَّع"[٣٢].

ماذا يريد السجزي أن يقول بدقّة في هذه العبارات المعقّدة، إذا لم نقل إنّها غامضة قليلاً ؟ هل يلوم أبا الجود لأنّه لم يستخدم القطوع المخروطيّة بل المسطرة والبركار؟ لقد ردَّ أبو الجود على هذا الانتقاد عندما كتب: "فلم يمكنني ذلك إلا بقطعين من قطوع المخروطات متقاطعين: زائد ومكافئ"[٣٣]؛ إلا إذا افترضنا أنَّ أبا الجود لم يقل الحقيقة في موضوع مع أنَّ التحقّق من صحّته ممكن، وهذا صعب التصديق. هل أراد السجزي التلميح إلى أنَّ أبا الجود لم يكن مطّلِعاً على المخروطات؟ وهذا ضرب من ضروب المبالغة أيضاً. هل كان يقصد أنَّ مناقشة أبي الجود لا تؤدِّي إلى عمل المسبَّع؟ إنَّ هذا، أيضاً، غيرُ صحيح. ولقد أشار الشنّي بعد ذلك إلى أنَّ أبا الجود لم ينجح في قسمة الخطّ، كما وصل إلى القول بأنَّ السجزي قد حاول إكمال هذا النقص دون أن يُفلِح في ذلك. ولعلَّ هذا البرهان الناقص أو المغلوط هو الذي أراد السجزي انتقاده في هذه الجُمَل الغامضة، حيث أكَّد أنّه قد يُمكن النجاح في الحصول على الحلّ بواسطة القطوع المخروطية أو بالاستعانة بالقسمة التي أتمَّها أرشميدس وبمقدِّمات أخرى غير تلك التي اقترحها أبو الجود. وربَّما كان ينتقد تردُّداً عابراً مرَّ به أبو الجود قبل أن يستعين بالقطوع المخروطية.

تَدَخَّل، عندئذ في هذه المجادلة، أحد أبرز الرياضيّين في عصره الذي بقي مجهولاً حتّى عهد قريب وهو ابن سهل.

---

[٣٢] انظر ص. ٦٦٦-٦٦٧.

[٣٣] انظر: رسالة أبي الجود محمّد بن الليث إلى الأستاذ الفاضل أبي محمّد عبد الله بن علي الحاسب في الدلالة على طريقيْ الأستاذ أبي سهل القوهي المهندس وشيخه أبي حامد الصاغاني وطريقه التي سلكها في عمل المسبّع في الدائرة، ص. ٦٤٧.

إنَّ ابن سهل، كما رأينا، وفقاً لأقوال الشنّي، هو الذي قدَّم الحلَّ إلى السجزي، وأبو الجود هو الذي انتحل هذا الحلَّ. هذه هي رواية الشنِّي التي أطالت ونشَّطت من جديد هذه المجادلة التي كانت قد حدثت قبل ذلك بحوالى ربع قرن تقريباً.

هذه الرواية ليست صحيحة، إذ يُمكن الاعتراض عليها لأنَّ السجزي قد اعترف مرَّتين بأنّه مَدينٌ لابن سهل. فهو يؤكِّد، في بداية كتابه في عمل المسبَّع المتساوي الأضلاع، أنّه اقتبس "من عِلم أرشميدس، ومن مقدِّمات أبلونيوس وخاصَّة من المحدَثين مثل العلاء بن سهل". وهو يكتب، بالإضافة إلى ذلك، عند القسمة:

"قد بنى أبو سعد العلاء بن سهل هذا الشكل، وسلك فيه طريق التحليل، وتركيبنا قسمٌ من تحليله."[٣٤]

إنَّ قول الشنِّي إذاً غير صحيح. وإذا كان أبو الجود قد فعل ما اتّهمه به الشنِّي – أي إذا كان قد نسب إلى نفسه حلَّ ابن سهل – لا يمكن أن يكون ذلك في رسالته المؤرَّخة سنة ٩٦٨-٩٦٩، موضوع الجدل. سوف نرى لاحقاً في هذا الموضوع، ما يخصُّ رسالتيْ أبي الجود اللتين صدرتا بعد ذلك؛ ولكن فلنقل بدون تأخير أنَّ السجزي، وهو العدوّ اللدود لأبي الجود، لم يكن ليفوِّت فرصة التذكير بأيّة محاولة لأبي الجود في إحدى هاتين الرسالتين لنسبة حلّ ابن سهل إلى نفسه. ولكنّه لم يفعل ذلك.

وأخيراً، وجَّه السجزي، وفقاً لأقوال الشنِّي أيضاً، سؤالاً آخر إلى ابن سهل. وهذه المعلومة مؤكَّدة من مصدر آخر: "كتاب تركيب المسائل التي حلّلها أبو سعد العلاء بن سهل "[٣٥]. يتعلّق الأمر، نوعاً ما، بتعميم مقدّمة أرشميدس على حالة متوازي

[٣٤] انظر السجزي، في عمل المسبّع في الدائرة، ص. ٦٦٨.
[٣٥] انظر: R. Rashed, *Géométrie et Dioptrique*,، ص.XCIX وما يليها ، ص.CXXXIII-CXXXVI وما يليها، ص. ١٨٤ وما يليها.

الأضلاع. وكان ابن سهل قد قدَّم تحليل هذه المسألة، كما حرَّر الشنِّي بنفسه (ولم يفعل ذلك أبو الجود، كما كتب سهواً عادل أنبوبا[٣٦]) تركيبَ هذا التحليل.

ولنتوقّف أخيراً على الانتقاد الأوّل الذي وجَّهه السجزي إلى أبي الجود، وهو الانتقاد الذي وجَّهه الشنِّي ثانية إلى أبي الجود. يجعلنا هذا الانتقادُ المهمُّ نلمس نقطة محورية في عمل المسبَّع، ولكنَّ هذه النقطة تبقى غير محسومة بسبب فقدان الرسالة الأولى لأبي الجود. يبقى علينا أن نزيد من تفحُّصنا للجواب عن السؤال الذي أثاره هذا الانتقاد: ما هي العلاقات بين مقدِّمات أبي الجود الأربع ومقدِّمته الخاصَّة بالقسمة من النوع D_2 التي يقترحها؟ وبالتالي، ما هي علاقات هذه المقدِّمات بعمل المسبَّع؟ وهل ارتكب أبو الجود الخطأ الذي اشتكى منه السجزي وتبعه الشنِّي في ذلك، خلال تصوُّر هذه العلاقات وخلال برهان المقدِّمة الخاصّة بالقسمة من النوع D_2 ؟ إنَّ الموقف المُبهَم، على أقلّ تقدير، للسجزي يُعقّد المسألة، التي كانت قد أصبحت صعبة بسبب فقدان رسالة أبي الجود. لقد أكَّد السجزي بوضوح تامّ، كما رأينا أعلاه، أنَّ أبا الجود استخدم المقدِّمات، الأربع في عمل المسبَّع، وهذا ما يعترض عليه السجزي بشدَّة. ولكنّه يؤكِّد أيضاً أنّه لم يستخدِم، خلال برهان المقدِّمة الخاصَّة بالقسمة D_2، النسبة المُثبَتة في آخر مقدِّمة من مجموعة المقدِّمات الأربع، بل استخدم نسبة أخرى؛ وهذا ما يتعارض مع الانتقاد السابق. إنَّ موقف السجزي بحاجة إلى بعض التوضيحات على الأقلّ. وتطرح المقدِّمة المذكورة أعلاه، الرابعة من مجموعة المقدِّمات الأربع، مسألة دقيقة، وهي مسألة تحديد النقطة M المعرَّفة بالمعادلتين: $x^2 = AB.AM$ وَ $\frac{c}{d} = \frac{x}{BM}$، حيث تكون $\frac{c}{d}$ نسبة معلومة.

يُمكن إذاً أن تـُعرَّف النقطة M بالمعادلة: $\frac{c^2}{d^2} = \frac{AB.AM}{MB^2}$.

[٣٦] ليس لهذا السهو أيُّ نتيجة فيما يخصُّ دراسة عادل أنبوبا، ولكنّه، بالترافق مع تحقيق سيِّئ لفقرة ابن سهل سبَّب أضراراً (انظر الحاشية ٢٢، ص ٣٢٢-٣٢٣).

إنَّ فهمَ العلاقات التي تصوَّرها أبو الجود بين هذه المقدِّمة وتلك الخاصَّة بالقسمة من النوع D_2، يرجع إلى الردّ على الأسئلة التالية: هل ظنَّ أبو الجود أنَّ الأمر يتعلّق بعمل بالآلة (نيوسِس) أم بعمل مقبول هندسيّاً؟ هل لاحظ الاختلاف بين هذا العمل وعمل القسمة D_2، أم أنّه لم يُميِّز بينهما؟ وأخيراً، إذا افترضنا أنّه قد ميَّز بينهما، لماذا أدخل هذه القضيّة الرابعة؟

يُمكن أن نحلَّ المسألة الأولى بسرعة بفضل نصٍّ لمؤلّف مجهول[٣٧]. يتناول المؤلّف المجهول بطريقة ما مقدِّمة أبي الجود. فهل كان مطـّلِعاً على رسالته؟ أم أنّه وجد المسألة نفسها، بشكل مستقلٍّ، تبعاً لطريقته الخاصَّة؟ لا يمكننا أن نعطي أيَّ جواب عن هذين السؤالين. ولكنَّ الذي يُهِمُّنا، هنا، هو أن نرى كيف عالج هذه المسألة رياضيٌّ من هذا التقليد؛ نورِد فيما يلي منهجه.

يستخدِم في البداية قطعتين EG وَ EH بحيث يكون $\frac{c'}{d'}=\frac{EG^2}{EH^2}$، ويطرح مسألة تحديد النقطة M بحيث يكون $\frac{c'}{d'}=\frac{AB.AM}{BM^2}$.

لنلاحظ أنَّ العلاقة مع القضيّة الرابعة تظهر إذا وضعنا: $\frac{c'}{d'}=\frac{c^2}{d^2}$، فيكون: $\frac{c}{d}=\frac{EG}{EH}$.

إذا كانت القطعة EH معلومة، تكون EG القطعة المعرَّفة في مقدِّمة أبي الجود الثالثة.

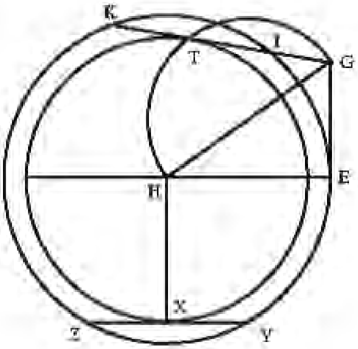
يبدأ المؤلّف المجهول، لأجل القيام بعمله الهندسيّ، بعرض مقدِّمة يُبيِّن فيها أنّه إذا كانت القسمتان (A, M, B) وَ (G, I, K) متشابهتين، يكون معنا عندئذ $\frac{GK.GI}{IK^2}=\frac{AB.AM}{BM^2}$.

---

[٣٧] أشار إلى هذا النصّ ج. ب. هوجنديجك الذي ترجم منه فقرة قصيرة. ولقد ظنَّ أنَّ فيه عملاً بالآلة (نيوسِس). انظر «*Greek and Arabic Constructions of the Regular Heptagon*»، ص. ٢٤٦–٢٤٨. انظر أيضاً، ص. ٧٤٣ وما يليها.

والقضيّة العكسيّة لهذه المقدّمة محقّقة مع أنّ المؤلّف قد أهمل إثباتها. وهو على كلّ حال يُطبّق هذه القضيّة العكسية، ويعمل القسمة (G, I, K) بحيث يكون: $\frac{GK.GI}{IK^2} = \frac{EG^2}{EH^2}$،

ويستخرج منها قسمة مشابهة لها على القطعة المعلومة AB. ثـمّ يقوم بالرسم، فيأخذ القطعة EG، بحيث يكون $EG \perp EH$، ونُخرج من G خطّاً يقطع الدائرة (H, HE) على النقطتين I وَ K بحيث تكون القطعة KI ضلع المسدّس المتساوي الأضلاع في الدائرة. أمّا عمل القطعة، فإنّ المؤلّف يقول إنـــه ممكن، فيكون هذا العمل في متناول أيّ رياضيّ في عصره.



الشكل ٣

ليكن $ZY = HE$ ضلع المسدّس، ولتكن النقطة X وسط ZY؛ فتكون الدائرة (H, HX) عندئذ الدائرة المحاطة بالمسدّس. وإذا أخرجنا من G الخط المُماسّ لهذه الدائرة، فإنه يقطع الدائرة (H, HE) على النقطتين I وَ K ويكون $IK = ZY = HE$. يتعلق الأمر برسم كلاسيكيّ بواسطة المسطرة والبركار. ونقطة التماسّ T، لخط التماسّ الخارج من G، هي نقطة تقاطع الدائرة (H, HX) مع الدائرة ذات القطر GH. يكون معنا: $EG.GK = EG^2$ وَ $HE = IK$، فيكون إذاً $\frac{GK.GI}{IK^2} = \frac{EG^2}{EH^2}$.

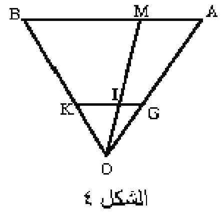
ونستخرِج من القضيّة العكسية المذكورة أعلاه أنّ القسمة (G, I, K) مشابهة للقسمة (A, M, B)[٣٨]. يُمكننا إذاً أن نقوم بالرسم بواسطة المسطرة والبركار، مستخدمين الدائرة المحاطة بالمسدّس. وهذا ما يُفسِّر، من جهة، قولَ المؤلِّف إنّ هذا ممكن، كما يُفسِّر من جهة أخرى، لماذا افترض ضمنيّاً أنّ عمل المسدّس معلومٌ، وهذا ما تؤكّده إشارتُه إلى المسدّس[٣٩].

لا يبدو لنا القولُ إنّ هذا العمل كان في متناول رياضيّ من مرتبة أبي الجود ضرباً من المخاطرة. ولكن كيف نفهم صيغة السجزي القائلة إنه من الصعب عمل المسدّس بمقدّمات أبي الجود وبأشباه مقدّماته؟ إنّ جملته تـُثير العجب لعدّة أسباب، وخاصّة أنّ السجزي كان يعرف، أكثر من أيّ شخص آخر، أننا لسنا بحاجة إلى هذه المقدّمات للقيام بهذا العمل الهندسي، إذ يكفي أن نأخذ وتراً مساوياً لنصف قطر الدائرة بواسطة البركار. وهذا ما يقصده، فضلاً عن ذلك، عندما يقول "وهو الذي عمله النجّارون على رؤوس القدور بفتحة واحدة من البركار"[٤٠]. فربّما كان يريد فقط

---

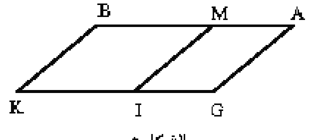
[٣٨] نضع قطعة مساوية للقطعة GK على موازاة القطعة المعلومة AB. يكون لدينا حالتان ممكنتان:

١) $GK \neq AB$. يتقاطع الخطان AG وَ BK على النقطة O، والخط OI يقطع AB على النقطة المطلوبة (تحاكي).



الشكل ٤

٢) $AB = KG$. يكون الخطان AG وَ BK متوازيين، فنُخرج IM على موازاة GA. فتكون القسمتان عندئذ متشابهتين وتتطابقان بواسطة انسحاب.



الشكل ٥

[٣٩] إنّ القول بأنّ هذا الرسم هو عمل بالآلة (الحاشية ٣٧)، وليس عملاً مقبولاً هندسيّاً، هو بالطبع مغلوط؛ والرسم الذي يستخدم قوساً قابلاً لزاوية ١٢٠ درجة ينتج مباشرة عن خواصّ المسدّس.

[٤٠] انظر ص. ٦٦٧.

أن يقول، خلال هذه المجادلة الحامية، إنّ مقدّمات أبي الجود لا تنفع في عمل المسدّس ولا تؤدّي إلا إلى تعقيد ما هو بسيط.

لنرجع الآن إلى مسألة الاختلاف بين النسبة المُستخدَمة في هذه المقدّمة وتلك المستخدمة في مقدّمة أبي الجود الخاصّة بالقسمة D_2.

إنّ الطول x محدَّد، في المقدّمة الرابعة، بنسبة معلومة، بينما إنّ هذا الطول نفسه محدَّد في العبارة الخاصّة بالقسمة D_2 بنسبة متعلّقة بالنقطة المطلوبة M.

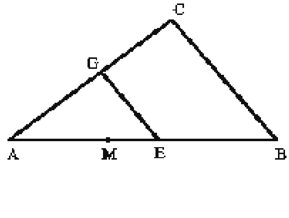
فإذا أخذنا بالفعل أيّة نقطة M على القطعة المعلومة AB، وإذا كان ABC مثلّثاً بحيث يكون $BM = BC$، فإنّ مقدّمة أبي الجود الثانية تسمح بتحديد النقطة E بحيث يكون $EG \,//\, BC$ فيكون $BE = EG$. يكون معنا عندئذ:

$$\frac{AB}{AB+BM}=\frac{AE+BE}{AB+BM}=\frac{EG+AE}{AB+BM}=\frac{AE}{AB}=\frac{EG}{BC}=\frac{EG}{BM}\text{؛}$$

فيكون معنا إذاً: $\frac{AB}{AB+BM}=\frac{EG}{BM}$ ، وهذه العلاقة محقّقة لأيّة نقطة على AB.

إذا وضعنا $EG = x$، يكون معنا: $\frac{AB}{AB+BM}=\frac{x}{BM}$.

يجب أن تحقّق M هذه المعادلة بالإضافة إلى المعادلة $x^2 = AB.AM$، التي يكون فيها الطول x طولاً مساعداً محدَّداً بنسبة متعلّقة بالنقطة M.



الشكل ٦

فلا يُمكن إذاً أن نحدِّد النقطة M بطريقة مشابهة لتلك التي استُخدِمت في المقدِّمة الرابعة، حيث تحدَّد x بواسطة نسبة معلومة. وهكذا لا يُعقَــل أن يكون أبو الجود قد استخدَم المقدِّمة الرابعة في عمل القسمة D_2. إنَّ السجزي والشَّنّي أيضاً، من جهة أخرى، لم يتّهماه بارتكاب مثل هذا الخطأ. يكتب الشّنّي، على سبيل المثال، بعد أن يذكر المقدِّمة الرابعة لأبي الجود:

"فاعتمد هذه النسبة، ثمَّ استعمل في عمل المسبَّع نسبة أخرى خلاف ما قدَّمه"[٤١].

لا يبدو إذاً أنَّ أبا الجود قد خلط بين المقدِّمتين أو بين النسبتين. لماذا أعطى إذاً هذه المقدِّمات الأربع؟ ربَّما ظنَّ في البداية، قبل أن يتحقّق بشكل كامل أنَّ مسألة المسبَّع مسألة في الهندسة المُجسَّمة، أنَّ بإمكانه التوصُّل إلى عمل المسبَّع بواسطة هذه المقدِّمات؛ ثمَّ أصلح هذا الخطأ فوراً باستخدام نسبة أخرى عند تحديد النقطة M بالتقاطع بين قطعين مخروطيَّيْن. هذا هو التخمين الوحيد التي يمكننا أن نصوغه، فلا يبقى سوى هذا التردُّد الذي قد يُلام عليه. قد ينبغي، في هذا التخمين أو في أيّ تخمين آخر مشابه له، أن تؤخَــذ بعين الاعتبار أقوال السجزي، المتناقضة نوعاً ما، وادّعاءات أبي الجود.

وهكذا انتهينا من رسم الخطوط العريضة لهذا الجدل الذي يُفيدنا، على الأقلّ، في إظهار المجموعات التي شاركت في عمل المسبَّع، كما يُبيِّن لنا، وراء الأقوال القاسية المتبادلة أحياناً، ما يُشبه التعاون الاضطراري والخَصْب في آن واحد.

تتشكَّــل المجموعة الأولى من أبي الجود والسجزي؛ وقد التحق بها ابن سهل بدون أن تتمّ استشارته، إذا صحَّ التعبير. قدَّم أبو الجود قسمة قطعة من خطّ مستقيم من النوع D_2 ؛ ولقد بدت له هذه القسمة أحسن من قسمة أرشميدس (وهي في الواقع معادلة لها). وكان برهانه يشكو من بعض النواقص؛ فطلب السجزي من ابن سهل

[٤١] انظر: كتاب كشف تمويه أبي الجود في أمر ما قدَّمه من المقدّمتين لعمل المسبَّع، ص. ٧٢٣.

أن يُقدِّم برهاناً أكثر دقّة. وهكذا وجد ابن سهل نفسَه طرفاً في هذه المجادلة، بدون قصد. وأثبت السجزي، بفضل ابن سهل، قسمة أبي الجود من النوع D_2.

تتشكَّل المجموعة الثانية من رياّضيين، من مرتبة ابن سهل؛ ومستوى هؤلاء هو، بوضوح، أرفع من مستوى الآخرين. وهم، على كلّ حال، لم يشاركوا في هذه المجادلة. يبدأ كلٌّ واحد منهم بقسمة D_1 لأرشميدس، فيثبتها ثم يقوم بعمل المسبَّع. يتعلّق الأمر خصوصاً بالقوهي والصاغاني وأبي الجود الذي التحق بهما فيما بعد.

يتدخَّل أبو الجود مرّة أخرى ليقدِّم قسمة أخرى، هي D_3. أمّا الشَّنّي فهو يلعب دورين، أي دور المؤرِّخ الملتزم الذي يروي الأحداث ويثير الجدال، ودور الرياضيّ الذي يُثبت بعض القضايا المهمّة.

هذا التقليد المتنوِّع والمتعدِّد الأشكال هو الذي نظَّمه وأتمَّه ابن الهيثم. ولكي نبيِّن المسار الذي تمَّ اجتيازه، سوف ننظِّم عرضنا حول القِسَم المتتابعة، وحول الأعمال التي أدَّت إليها؛ وسوف نبدأ بقسمة أرشميدس، ولو أنَّ أبا الجود قد تناولها بالفعل ثانية.

١–٣ مقدِّمات عمل المسبَّع: قسمة قطعة من خطّ مستقيم

لنبدأ بتفحُّص مسألة المسبَّع، لكي نفهم دور المقدِّمات المختلفة – مقدِّمة أرشميدس والمقدِّمات الأخرى – الضرورية لعمل المسبَّع، في الثلث الأخير من القرن العاشر خاصّة.

لنأخذ إذاً مسبَّعاً متساوي الأضلاع ($ABCDEFG$) محاطاً بدائرة. يقابل كل ضلع من المسبَّع زاوية مركزية $\alpha = \frac{\pi}{7}$. إذا، رسمنا الأوتار AB، AC ، AD ، AE ، AF ، AG، BC ، CD ، DE، EF، FG وCF، فإنَّ الزوايا التي نحصل عليها تقاس بالزاوية α أو بأضعافها. لنرمز إلى المثلّثات وفقاً لهذه القياسات:

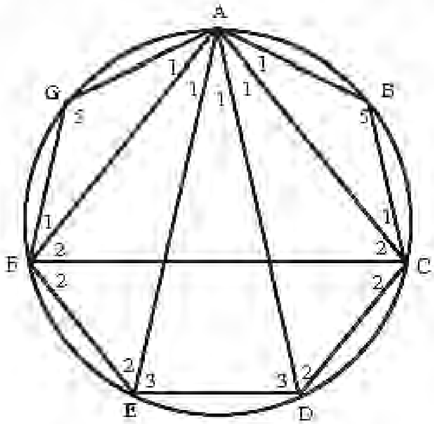
T_1 المثلثان ABC وAGF ، النوع $[1, 5, 1]$

T_2 المثلثان ADC و AEF ، النوع $[1, 2, 4]$

T_3 المثلث ADE ، النوع $[1, 3, 3]$

T_4 المثلث ACF ، النوع $[3, 2, 2]$.

كان ابن الهيثم، كما ذكرنا، أوّل من أكّد أنّه لا يوجد سوى هذه الأنواع الأربعة، وهو الذي درسها كلّها. ولكنّ أسلافه لم يدرسوا سوى نوع أو نوعين، في آن واحد. سنجد، إذاً، هذه المثلّثات في المؤلّفات المكرّسة لعمل المسبّع.



الشكل ٧

يؤدّي تحليل عمل كلٍّ من هذه المثلّثات إلى نوع واحد أو عدّة أنواع لقسمة قطعة من خطٍّ مستقيم إلى قسمين أو ثلاثة أقسام. ولكنّ الحصول على هذه القسَم يتمّ بتقاطع القطوع المخروطيّة. إنّ أوّل قسمة سنعرضها هي قسمة مقدّمة أرشميدس.

١-٣-١ قسمة أرشميدس (D_1)

تتواجد قسمة أرشميدس ضمن تقليدين نصّيّين، تقليد المؤلّفات الرياضية للثلث الأخير من القرن العاشر الميلاديّ والتقليد النصّيّ لمخطوطة القرن الثامن عشر، أي لكتابة مصطفى صدقي. يتطابق هذان التقليدان، لحسن الحظّ، ويسمحان لنا بتقديم مقدّمة أرشميدس على الشكل التالي:

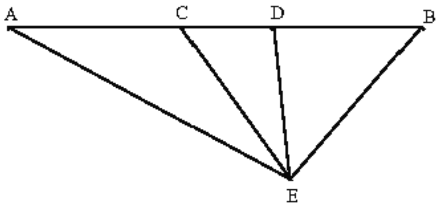
لتكن معنا قطعة $[AB]$ من خط مستقيم؛ لنقسمها في C وَ D بحيث يكون:

$$AD.CD = BD^2 \quad (١) \text{،} \qquad CB.BD = AC^2 \quad (٢)$$



الشكل ٨

فإذا حدَّدنا، استناداً إلى هذه القسمة، النقطة E بحيث يكون $DE = DB$ وَ $CE = CA$، نحصل على أربعة مثلثات EDC، EDB، ECA وَ BAE، هي حسب الترتيب من الأنواع: T_2 وَ T_4، T_1 وَ T_2.



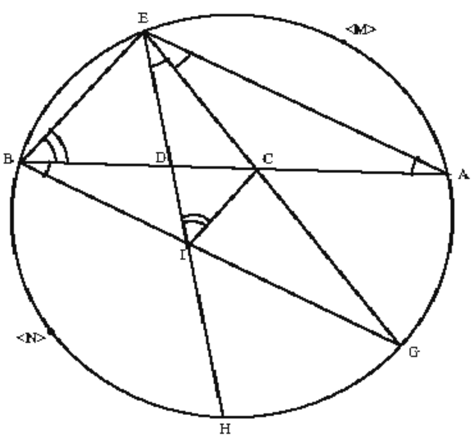
الشكل ٩

يجب أن نُميِّز بين ثلاث فترات، لكي نفهم كيف انتشر البحث حول هذه المقدِّمة، ابتداء من نهاية ستينات القرن العاشر. لقد شهدت الفترة الأولى، التي بقيت معرفتنا بها قليلة، الحصول على النصّ، المنسوب إلى أرشميدس، وترجمته. تقتصر معلوماتنا هنا على آثار منقولة بواسطة نصّ مصطفى صدقي. باشر الرياضيّون البحث، خلال الفترة الثانية، فبدأوا محاولاتهم لإثباته على قاعدة متينة؛ ولقد اشتهر في هذه الفترة اسم ابن سهل. أمَّا الفترة الثالثة، فقد شهدت اشتراك منافِسِي هذا الأخير في البحث حول هذه المقدِّمة؛ وأبرز هؤلاء هما القوهي والصاغاني. نجد فيما يلي عرضنا التفصيلي لهذه الفترات الثلاث.

١-٣-١-١ الفترة الأولى: القسمة في النصّ المنسوب إلى أرشميدس

لقد رأينا أنَّ المؤلّف يُعطي في المقدّمة (القضيّة ١٧ من كتابة مصطفى صدقي) القسمة (A, C, D, B) التي تحقق العلاقتين (١) وَ (٢). فهو يرسم ، في القضيّة ١٨ على القطعة DC المثلّث DEC بحيث يكون $DE = DB$ وَ $CE=CA$، ويُبيِّن أنَّ المثلّثين DEC وَ EAB (وهما من النوع $[1, 2, 4]$، وهذا ما لم يُشِر إليه المؤلف) متشابهان. ويستخرج من ذلك : $\widehat{AEC} = \widehat{EAB} = \widehat{DEC}$.

يقطع الخطّان EC وَ ED الدائرة المحيطة بالمثلث EAB على النقطتين G وَ H؛ فيكون معنا: $\widehat{BE} = \widehat{GA} = \widehat{HG}$. ثمَّ يُبيِّن أنَّ كلاً من القوسين $\widehat{AE}$ وَ $\widehat{BH}$ يساوي ضعفيْ كلّ من الأقواس السابقة. إذا كانت النقطتان M وَ N وسطي القوسين $\widehat{AE}$ وَ $\widehat{BH}$، حسب الترتيب، يكون $AMEBNHG$ مسبّعاً متساوي الأضلاع.



الشكل ١٠

وإذا استندنا إلى الملخـــص السابق لمنهج أرشميدس، نرى جيّداً أنّه يتناول قطعة معلومة AB من خطٍّ مستقيم، ويفرض أنَّ عليها قسمة معلومة (A, C, D, B) من النوع D_1. ويرسم على AB مثلّثاً من النوع $[1, 2, 4]$، ثمَّ يرسم الدائرة المحيطة بهذا المثلّث ويستخرج من ذلك المسبَّع.

لم نـــؤكّد بشكل كافٍ على ما يُميّز هذا المنهج من منهج كل ريّاضيّي القرن العاشر. تبدأ كلّ المؤلّفات، التي استطعنا تفحُّصها، برسم المثلّثات الأربعة T_1، T_2، T_3 وَ T_4، ثمَّ برسم مثلّثٍ، في الدائرة، مشابه للمثلّث الذي تمَّ رسمه.

لنعرض منهج أرشميدس، نظراً إلى هذا الاختلاف، كما ورد في كتابة مصطفى صدقي.

لتكن (A, C, D, B) القسمة التي تـــحقّق (١) وَ (٢). يكون معنا، وفقاً للمقدِّمة، $AC > CD$ وَ $BD > CD$. لنرسم المثلّث ECD بحيث يكون $CE = CA$ وَ $DE = DB$. ونرسم الدائرة المحيطة بالمثلّث EAB (من النوع T_2، وهذا ما لم يُشِر إليه المؤلّف)؛ يقطع الخطّان EC وَ ED هذه الدائرة على النقطتين G وَ H، ويقطع الوتر BG الخطَّ EH على النقطة I. يكون معنا $\widehat{AEC} = \widehat{EAC}$، فيكون إذاً $\widehat{BE} = \widehat{GA}$.

يكون معنا من العلاقة (١) $\frac{DE}{DC} = \frac{BD}{DC} = \frac{AD}{BD}$، فيكون المثلّثان AED وَ CED متشابهين، ويكون $AG = EB = GH$.

يكون معنا إذاً $\widehat{ABG} = \widehat{EAB}$، فيكون $GB \mathbin{//} AE$. الزاويتان $\widehat{CEI}$ وَ $\widehat{CBI}$ متساويتان، والنقاط C، E، B وَ I دوَّارة مرافقة وَ $\widehat{DIC} = \widehat{DCI}$، فيكون إذاً $DI = CD$ وَ $CE = IB$.

ونستخرج من العلاقة (٢) ومن المعادلات $CE = CA$ ، $DE = DB$ وَ $CB = EI$، ما يلي: $EC^2 = EI.DE \Leftarrow \frac{EC}{ED} = \frac{IE}{EC}$،

فيكون المثلّثان CED وَ IEC متشابهين ويكون $\widehat{EIC} = \widehat{DCE}$.

ولكنَّ $2\,\widehat{CAE} = \widehat{DCE}$، فيكون $2\,\widehat{CAE} = \widehat{CIE}$. ويكون من ناحية أخرى $\widehat{CBE} = \widehat{CIE}$، فيكون $2\,\widehat{CAE} = \widehat{CBE}$ وَ $2\,\widehat{BE} = \widehat{AE}$. ويكون كذلك $2\widehat{CAE} = \widehat{DEB} = \widehat{DBE}$، فإذاً $2\,\widehat{BE} = \widehat{HB}$.

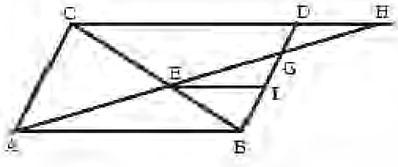
إذا قسمنا القوسين $\widehat{AE}$ وَ $\widehat{HB}$ إلى نصفين في النقطتين M وَ N، ستكون الدائرة مقسومة إلى سبع أقواس متساوية، فيكون $AMEBNHG$ المسبّع المتساوي الأضلاع المطلوب.

١-٣-١-٢ الفترة الثانية: ابن سهل

تبدأ فترة برهان مقدّمة أرشميدس، وفقاً للسجزي وللشنّي بعد ذلك، مع ابن سهل. ولن نعجب إذا كان ابن سهل أيضاً أوّل من حاول تعميم هذه المقدّمة على حالة متوازي الأضلاع.

إذا صدّقنا قول الشنّي، وجّه السجزي مسألتين إلى ابن سهل. المسألة الأولى تتعلّق ببرهان قسمة أبي الجود المعادلة لقسمة أرشميدس. قام ابن سهل بهذا البرهان بواسطة قطع مكافئ وقطع زائد. احتفظ السجزي، نوعاً ما، بطريقة ابن سهل وبنتيجته، إذ إنّه قام بتركيب تحليل ابن سهل؛ كما اعترف بدقّة، من جهة أخرى، بأسبقيّة هذا الأخير في الحصول على هذه النتيجة. أمّا المسألة الثانية التي وجّهها السجزي إلى ابن سهل، فقد أوردها الشنّي بنفسه الذي قام، تحديداً، بتركيب تحليل ابن سهل. هذه، فيما يلي، المسألة الثانية.

"سطح $\overline{\text{أ ب جـ د}}$ متوازي الأضلاع أخرج قطره وهو $\overline{\text{ب جـ}}$، وأخرج ضلع $\overline{\text{جـ د}}$ على استقامته من جهة $\overline{\text{د}}$ بلا نهاية. كيف نُخرج خطّاً كخطّ $\overline{\text{أ هـ ز ح}}$ حتّى تكون نسبة مثلّث $\overline{\text{ب هـ ز}}$ إلى مثلّث $\overline{\text{ز د ح}}$ نسبة مفروضة"[٤٢].



الشكل ١١

[٤٢] انظر ص. ٧٢٥

هذه هي المسألة التي أوردها الشّنّي في رسالته حول المسبّع. نجد ما يؤكد تفاصيل هذه المسألة في نصّ حرّره بدون شكٍّ الشّنّي نفسه، وهو "في تركيب المسائل التي حلّلها أبو سعد العلاء ابن سهل"[٤٣]. نفهم، عند قراءة النصّ، أنّ هدف ابن سهل – وهدف السجزي على أرجح الاحتمالات – مزدوجٌ: وهو برهنة مقدّمة أرشميدس في حالة متوازي الأضلاع وإثبات نسبة مختلفة عن الوحدة بين مساحتين، وذلك باستخدام مثلّث آخر؛ وهذا يعني أنّه طبّق طريقة أرشميدس مع قليل من التحوير. إنّ لدينا سببين لفهمنا هذا: الطريقة التي فهِم بها المعاصرون، مثل الشّنّي، هذه المسألة، والتحليل الرياضي للتركيب الوارد في هذا الكتاب، وهو التحليل الذي نتناوله هنا من جديد. وذلك أنّ الأمر بالنسبة إلى الشّنّي يتعلّق فقط بتعميم مقدّمة أرشميدس. ولكنّ المسألة الموجّهة إلى ابن سهل، والعملَ الذي يقترحه هذا الأخير الذي يتراءى في التركيب الذي أعطاه الشّنّي، يؤدّيان إلى حلٍّ في الحالة التي نقارن فيها بين مساحتَي المثلّثين BEG وَ GDH، في حين إنّ مسألة أرشميدس تتناول المثلّثين AEB وَ GDH. ونبيّن أنّ المسألتين لا تتطابقان[٤٤]. اعترف ابن سهل بنفسه بأنّ عمله لا يحلّ مقدّمة أرشميدس في هذه الحالة. وهو يكتب في نصّ مشهور:

"فأمّا كيف اطّـراد المعرفة الريّاضيّة بإعطاء نسبة ما بين مثلّثي جـ ز د وَ ل ا هـ ، فلا سبيل لاتجاه العقول إلى بلوغ استخراجه بتحليل ولا اكتساب مقدّمة؛ ولو وجدنا مساغاً يوصلنا إلى نيله، لزمنا بسببه إلى علم ما شذ حتّى تبع"[٤٥].

يقوم الشّنّي، بالرغم من اعترافه بمكانة ابن سهل الرفيعة في الرياضيّات، بنقده نقداً لاذعاً مُتّهِماً إيّاه بالتباهي. لقد وقع، بدون شكٍّ، في التِباس منعه من ملاحظة الاختلاف بين هذه المسألة ومسألة أرشميدس. وهذا الالتباس مثير للدهشة، إذ إنّ الشّنّي قد نسخ بنفسه الاستشهاد الصحيح. فقد يحدث أن يكتُب "المثلّث جـ ز د " – الذي هو هنا

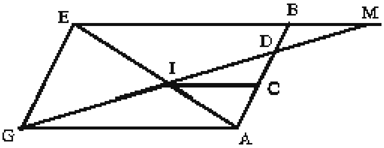
[٤٣] انظر: ر. راشد *Geometry and Dioptrics in Classical islam(London 2005)* ، ص. ٤٤٥ وما يليها.
[٤٤] انظر المرجع السابق، ص. ٤٧٣ وما يليها.
[٤٥] انظر المرجع السابق، ص. ٤٨١.

BEA – بدلاً من "المثلّث جــ ز هــ" – الذي هو هنا *BEG* . هذه هي، فيما يلي، كلماته حرفيّاً:

" أقول إنّه إذا كان سطح ا ب جــ د مربّعاً، وكانت نسبة المثلّثين نسبة المثل فإنّه هو الشكل الذي قدّمه أرشميدس بعينه لعمل المسبّع وسلك فيه أبو سهل ويجن بن رستم الكوهي طريق تقسيم الخطّ بثلاثة أقسام على النسبة التي تقع فيه. ثمّ إذا كانت نسبة المثلّثين نسبة الخلاف، فإنّ بالشكل الذي عمله أبو سهل ينقسم الخطّ على النسبة المذكورة ويسهل وجود المطلوب."[46].

لخّص الشّنّي حلّ القوهي في حالة المربّع، بواسطة قطع زائد متعامد الخطّين المقارَبين وقطع مكافئ، وهذا ما سندرسه مباشرة. وهو يتبنّى عمل القوهي في حالة متوازي الأضلاع. نورد فيما يلي هذا الحلّ مستخدمين نفس الرموز التي استخدمها.

ليكن معنا متوازي الأضلاع *ABEG* الذي يحمل ضلعه *AB* القسمة (A, C, D, B). يقطع الخطّ *GD* القطرَ *EA* على النقطة *I* ويقطع خطّ *EB*، المُمَدَّد على استقامة، على النقطة *M*.



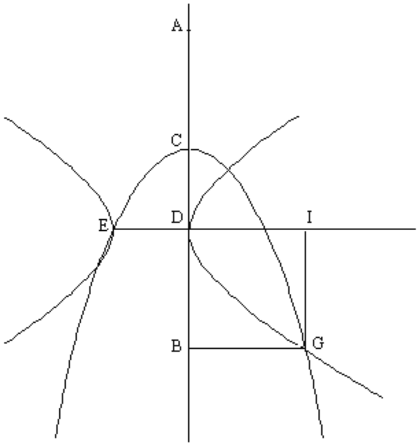
الشكل ١٢

نريد أن يكون $\frac{\text{مساحة}(BDM)}{\text{مساحة}(GIA)} = \frac{k}{\ell} \neq 1$.

لتكن القطعتان *CD* وَ *DE* بحيث يكون $DE \perp CD$ وَ $DE = DC$؛ وليكن القطع المكافئ $\mathcal{P}$ ذو الرأس *C* والضلع القائم *DE*؛ وليكن $\mathcal{H}$ القطعَ الزائد ذا المحور *DE*

[46] انظر المرجع السابق، ص. ٤٨٣.

والضلع القائم h المحدَّد بالمعادلة $\frac{k}{\ell}=\frac{h}{DE}$. يتقاطع القطعان على أربع نقاط؛ لتكن G نقطة التقاطع التي تسقط في I وَ B على DE وَ CD حسب الترتيب.



الشكل ١٣

يكون معنا:

$$CB.CD = CB.DE = GB^2$$ (القطع المكافئ)

$$EI.ID\frac{k}{\ell} = EI.ID.\frac{h}{ED} = GI^2$$ (القطع الزائد).

إذا مدَّدنا CD على استقامة إلى ما بعد C بحيث يكون $GB = AC$، يكون معنا:

$$CB.CD = AC^2 \qquad (١)$$

$$AD.AC.\frac{k}{\ell} = BD^2 \qquad (٢).$$

إذا كانت القسمة (A, C, D, B) على ضلع متوازي الأضلاع تحقّق (١) وَ (٢)، نستخرِج من (١) أنَّ الخطّ الخارج من C على موازاة AG يقطع AE وَ GD على

النقطة نفسها ، أي على النقطة I. فنستخرج من (٢): $\frac{k}{\ell}=\frac{BM}{AG}.\frac{DM}{IG}=\frac{BD^2}{AD.AC}$؛ فنحصل على النتيجة[٤٧].

إنَّ هذا المنهج مستوحى بشكل قويّ من إسهام القوهي، بحيث يظهر في الواقع كأنّه شرح لدراسة ابن سهل، في ضوء قراءة للقوهي.

١-٣-١-٣ الفترة الثالثة: القوهي والصاغاني

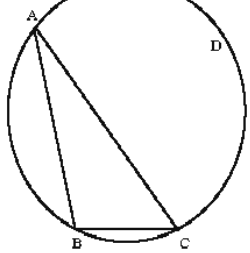
١-٣-١-٣-١ القوهي: المؤلّف الأوّل

تناول ريّاضيّان، في حوالى السبعينيّات من القرن العاشر، ثانية، المسألة كما كان أرشميدس قد تركها. لا شيء يوحي، في المؤلّفات الثلاثة التي حرّرها هذان الرياضيّان، بأنّهما قد شاركا، ولو قليلاً، في هذه المجادلة المشهورة. هل كانا يجهلان وجودها، أم أنّهما ببساطة لم يريدا التدخّل فيها؟ لا علم لنا بذلك، ولكنَّ الذي يهمُّنا هو أنَّ كلاً منهما قام بعمل المسبَّع بواسطة قسمة أرشميدس، وفقاً لما أراد هذا الأخير، استناداً إلى المثلّث [*1, 2, 4*]. وهذا ما فعله القوهي في أوّل رسالة.

يقوم القوهي، في هذا المؤلّف المُهْدى إلى الملك عضد الدولة نفسه، بالتحليل والتركيب. فلقد قرَّر أن لا يترك شيئاً من غير توضيح. وهكذا بدأ بتحليل المسألة نفسها.

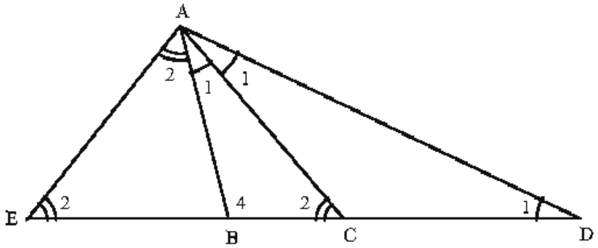
لنفرض أنَّ الوتر BC ضلعُ المسبَّع المتساوي الأضلاع المحاط بالدائرة المعلومة؛ ولتكن A نقطة على هذه الدائرة بحيث يكون $2\widehat{BC}=\widehat{AB}$؛ فتكون A رأس المسبَّع. فنحصل من ذلك على: $4\widehat{BAC}=2\widehat{ACB}=\widehat{ABC}$.

[٤٧] انظر المرجع السابق، ص. ٤٧٣ وما يليها.



الشكل ١٤

يقوم القوهي، بالطبع، بعمل مثلّث [$1, 2, 4$] ذي رأس A وقاعدة BC. ويُبيِّن أنّ هذا التحليل يؤدِّي إلى قسمة أرشميدس [E, B, C, D].



الشكل ١٥

لنمدِّد BC على استقامة من الجهتين، مع $BA = BE$ وَ $CA = CD$. المثلث ACD متساوي الساقين؛ فيكون $2\widehat{ADB} = 2\widehat{CAD} = \widehat{ACB}$. ولكنّ $2\widehat{BAC} = \widehat{ACB}$، فيكون $\widehat{CAB} = \widehat{ADB}$؛ المثلّثان ABD وَ ABC متشابهان، فيكون معنا $AB^2 = BC.BD$، أي:

$$BE^2 = BC.BD \qquad (١)$$

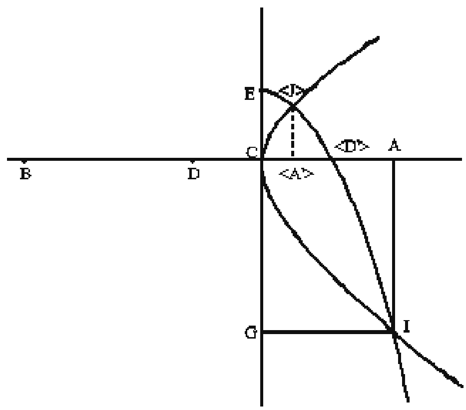
وكذلك يكون $2\widehat{AEC} = 2\widehat{BAE} = \widehat{ABC}$. ولكنّ $2\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$، فيكون $\widehat{BAE} = \widehat{ACB}$، ويكون المثلّثان ACE وَ ABE متشابهين؛ فنحصل على $\frac{CE}{EA} = \frac{EA}{EB}$؛ يكون معنا إذاً $CE.EB = AE^2$. ولكنّ $CD = CA = EA$، فيكون إذاً

$CE.EB = CD^2$. (٢)

والمعادلتان (١) وَ (٢) تميِّزان قسمة أرشميدس.

يُبيِّن التحليل السابق أنَّ المثلّث [1 , 2, 4] مُرفَق بهذه القسمة. إنَّ المثلّث ACD هو، بشكل واضح، من النوع [1 , 5, 1] الذي يؤدِّي إلى عمل المسبّع. ويتناول القوهي، لهذا السبب، الشكل نفسه في رسالة أخرى حيث يأخذ المثلّث الأخير.

يقوم القوهي في القضايا التالية – ذات الأرقام ٣ إلى ٥ – بعمل قسمة [A, B, C, D] من النوع D_1 ، بواسطة التحليل والتركيب. وهكذا يعطي القوهي، في القضية ٣ المتمّمة بالقضيّة ٤ من مؤلّفه، التحليل والتركيب الذي يؤدِّي إلى القطع المكافئ والقطع الزائد اللذين يسمحان بالقيام بهذه القسمة. ويُعطي في القضيّة ٥ التركيب الذي سنتناوله من جديد مع الاحتفاظ بالأحرف وبشكل التحليل.



الشكل ١٦

لتكن CD قطعة معلومة من خطّ مستقيم ولتكن CE قطعة أخرى بحيث يكون $CE \perp CD$ وَ $CE = CD$. لنأخذ القطعَ المكافئَ $\mathcal{P}$ ذا الرأس E والمحور EC والضلع القائم DC؛ ولنأخذ القطعَ الزائد $\mathcal{H}$ ذا الرأس C والمحور المستعرض DC

والضلع القائم DC. يتقاطع هذان القطعان على النقطة I. لنُخرِج IA بحيث يكون CE $IA //$ وَ $CD // IG$؛ لنمدّد DC على استقامة بطول DB مساوٍ لـِ AI. يكون معنا عندئذ $EG = CB$، لأنَّ $DB = AI = CG$. ويكون معنا $EG.CD = IG^2$، لأنَّ I هي نقطة على $\mathcal{P}$. يكون إذاً

$$AC^2 = CB.CD \qquad (١)$$،

وبما أنَّ I هي نقطة على $\mathcal{H}$، يكون $AC.AD = IA^2$ ، فإذاً

$$DB^2 = AC.AD \qquad (٢)$$.

إذا كانت القطعة CD معلومة، يُمكِن أن نرسم $\mathcal{P}$ وَ $\mathcal{H}$ وأن نستخرج من نقطة تقطعهما I النقطتين A وَ B بحيث تكون (A, C, D, B) قسمة لأرشميدس.

لنلاحظ أنَّ القطع المكافئ $\mathcal{P}$ يقطع الخطّ DC على نقطة D' متناظرة مع D بالنسبة إلى النقطة C، وأنَّ $\mathcal{P}$ يقطع $\mathcal{H}$ على نقطتين J وَ I. والنقطة I التي اختارها القوهي هي النقطة الملائمة، لأنَّ $CA > CD'$ فيكون $CA > CD$؛ وهذه المتباينة هي الشرط الضروريّ وفقاً للتحليل الذي أجراه المؤلف، بينما تعطي النقطة J النقطة A' مع $CA > CD'$.

وهكذا يكون للمسألة، هذه المرَّة أيضاً، حلٌّ وحيدٌ. لنتناول من جديد، بشكل تحليلي، تحديد النقطة I.

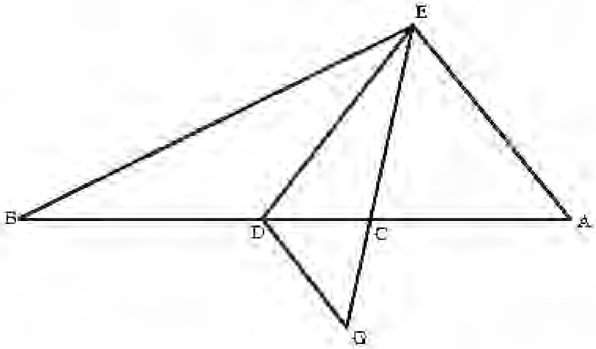
ليكن AC وَ EC المَعْلَـم (Cx, Cy)، مع $a = DC$ وَ $a = EC$. معادلة القطع المكافئ $\mathcal{P}$ ذي الرأس E والمحور Cy والضلع القائم a هي: $x^2 = a(a - y)$.

معادلة القطع الزائد $\mathcal{H}$ ذي الرأس C والمحور المستعرِض DC والضلع القائم a هي: $y^2 = x(a + x)$؛ ومعادلة الإحداثيّات الأولى لنقاط التقاطع هي: $x^3 - ax^2 - 2a^2x + a^3 = 0$؛

ولها ثلاثة جذور تحقّق المتباينات: $x_1 < 0$ ، $0 < x_2 < a$ و $x_3 > a$. ويتوافق الجذر x_3 مع شروط المسألة.

يُبيِّن القوهي في القضيّة التالية، السادسة، القضيّة الثانية العكسية (القضيّة الثانية كانت تحليلاً) التي تنُصّ على أنّه يُمكن أن نرفق، بكلّ قسمة من النوع D_1، مثلّثاً من النوع [1, 2, 4] قاعدته CD.

نبدأ بعمل قسمة أرشميدس وفقاً للترتيب (A, C, D, B) بحيث تتحقّق العلاقتان (١) و (٢) بالطريقة المتّبعة في القضيّة السابقة. ولكننا نعلم أنّ $DC < AC+BD$ ؛ يمكن إذاً أن نرسم المثلّث DCE بحيث يكون $DB = DE$ و $CA = CE$.



الشكل ١٧

نمدّ CE على استقامة بمقدار $CD = GC$ ، فيكون $AD = GE$. يكون معنا

$EC^2 = AC^2 = BC.CD$، فإذاً $\frac{BC}{EC} = \frac{EC}{CD}$.

المثلّثان BCE و DCE متشابهان ولهما زاوية مشتركة في النقطة C. ولكنّ

$$(٣) \qquad 2\widehat{CED} = 2\widehat{EBD} = \widehat{BED} + \widehat{DBE} = \widehat{EDC} ،$$

وكذلك $2\widehat{DGC} = \widehat{CGD} + \widehat{CDG} = \widehat{ECD}$ ؛

كما أنَّ لدينا من جهة أخرى $AC^2 = DA.AC$، فنحصل على $DE^2 = GE.EC$؛ فيكون معنا: $\frac{DE}{EC} = \frac{GE}{DE}$، ويكون المثلّثان GED وَ DEC اللذان لهما الزاوية المشتركة في النقطة E متشابهين. يكون معنا بالتالي $\widehat{EDC} = \widehat{DGC}$، فيكون :

$$2\,\widehat{EDC} = \widehat{ECD}. \qquad (٤)$$

ونستخرج من (٣) وَ (٤) أنَّ: $4\,\widehat{CED} = 2\,\widehat{EDC} = \widehat{ECD}$.

يُحقق المثلث DCE إذاً الشروط المطلوبة في المسألة.

يقوم القوهي، أخيراً، في القضيّة ٧ بعمل المسبَّع؛ فهو يرسم في الدائرة المعلومة مثلّثاً ABC مشابهاً للمثلّث السابق؛ فتكون القوس $\widehat{BC}$ سبع الدائرة ويكون الوتر BC ضلع المسبَّع.

١-٣-١-٣-٢ الصاغاني

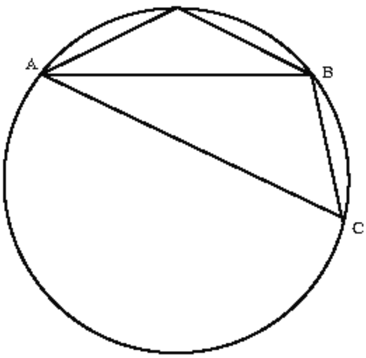
باشر الصاغاني البحث في مقدِّمة أرشميدس وفي عمل المسبَّع بعد أبي الجود بما يقرب من سنتين، وبعد ابن سهل بأقلّ من ذلك، وبعد القوهي بأقلّ من سنة. أتمَّ في أوّل الأمر رسالة مخصَّصة لمكتبة الملك عضد الدولة. ثمَّ أعاد كتابة هذه الرسالة ليؤلّف منها رسالة ثانية، مهداة أيضاً إلى الملك. وهذه الرسالة هي التي وصلت إلينا.

لا يُعطي الصاغاني إلا القليل حول تاريخ المسألة. فهو يكتفي بالتذكير "وقد كان استخراج وتر المسبَّع معتاصاً على المهندسين، فإنّ أرشميدس وضع مقدِّمة إذا حصلت هي ، يحصل بحصولها وتر المسبَّع. وعلى هذه السبيل جرت هذه المسألة إلى زماننا هذا"[٤٨]. يمكن أن نجد على أبعد تقدير إشارة إلى البحث في هذه المسألة. وتبقى دراسة الصاغاني من بين الدراسات الأكثر تفصيلاً.

---

[٤٨] انظر ص. ٧٠٧.

يُبيِّن الصاغاني، في البداية، أنّه إذا كانت النقاط A ، H ، B وَ C رؤوساً متتالية لمسبَّع متساوي الأضلاع، يكون معنا: $4\widehat{BAC} = 2\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$. فيكون المثلّث ABC من النوع T_2 [1, 2, 4].



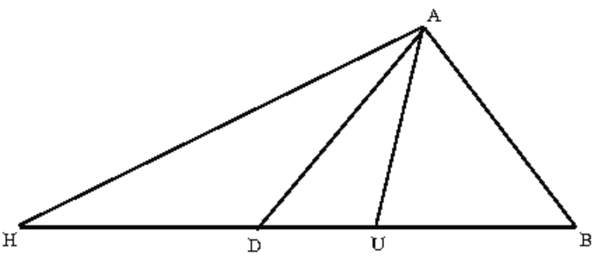
الشكل ١٨

لنلاحظ أنَّ المثلّث AHB هو من النوع T_1 [1, 5, 1]. يؤكِّد الصاغاني، عندئذ، أنّنا إذا كنا نعرف كيف نعمل المثلّث T_2، يكون عمل المسبَّع محققّاً.

والقضايا التالية مُكرّسة لدراسة مثل هذا المثلّث.

القضيّة الأولى: ليكن ADU مثلّثاً بحيث يكون $4\widehat{A} = 2\widehat{D} = \widehat{U}$. نُمدِّد القاعدة DU على استقامة بالاتجاهين مع $DA = DH$ وَ $AU = UB$.

يكون معنا $2\widehat{BAU} = 2\widehat{ABU} = \widehat{AUD}$، فنحصل على $\widehat{BAU} = \widehat{ADU}$ ؛ فيكون



الشكل ١٩

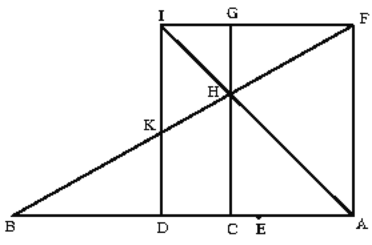
المثلّثان ABU وَ ADB متشابهين ومتساويَي الساقين، $AD = AB$. يكون معنا عندئذ $\frac{DB}{AB}=\frac{AB}{BU}$، فنحصل على $AB^2 = DB.DU$ أو أيضاً على $DH^2 = DB.DU$.

يكون معنا كذلك $\widehat{DAU} = \widehat{AHU}$، فيكون $2\widehat{AHU} = 2\widehat{DAU} = \widehat{ADU}$؛ فيكون المثلّثان AUD وَ AUH متشابهين، ويكون معنا $\frac{AU}{UD}=\frac{UH}{AU}$، فنحصل على $AU^2 = UD.UH$ أو أيضاً على $BU^2 = UH.UD$.

وهكذا يُبيِّن التحليل أنَّ ADU، المثلّث من النوع $[1, 2, 4]$، مُرْفَقٌ بقسمة أرشميدس $- D_1 - (B, U, D, H)$.

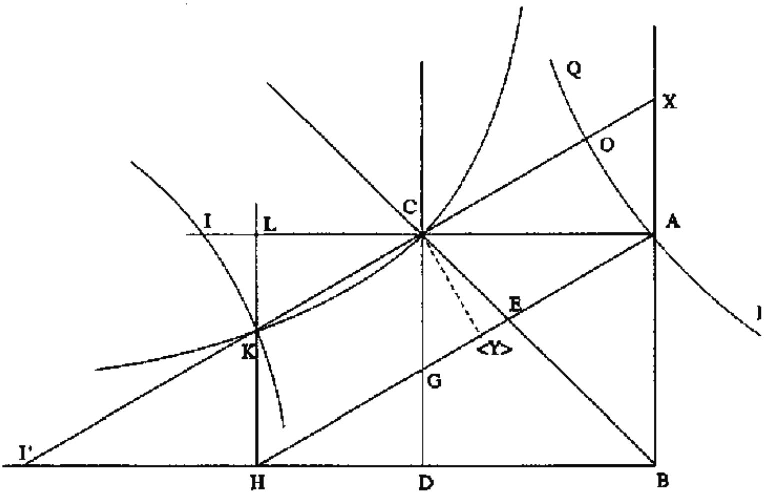
يتناول الصاغاني في القضيّة الثانية قسمة مثيلة لهذه القسمة، يرمز إليها بِـ (B, U, D, H)، ثمَّ يرسم على AD المربَّع $AFID$ ؛ يقطع الخطُّ FB الخطَّ ID على النقطة K والخطَّ IA على النقطة H . نبيِّن عندئذ أنَّ:

- النقطتين C وَ E متطابقتان
- المثلّثين IFH وَ KBD لهما المساحة نفسها.



الشكل ٢٠

يتناول الصاغاني في القضيتين الثالثة والرابعة المربَّعَ $ABDC$ ذا القطر BC ويبيِّن بالتحليل والتركيب كيف نرسم خطّاً خارجاً من A يقطع BC على E ويقطع BD على H، بحيث تكون مساحة AEC مساوية لمساحة GDH.



الشكل ٢١

لنبدأ بالتحليل، ولنفرض أنّ AH هو الخط المطلوب، وأنّ نقطة L هي الرأس الرابع للمستطيل $ABHL$، وأنّ XC الخط، الموازي للخط AH، الذي يقطع HL على النقطة K كما يقطع BD على النقطة I'. يكون معنا $AC = I'H$. ويكون لدينا عندئذ $AC.AE = HD.HG$ ، لأنّ المثلثين AEC وَ GDH لهما المساحة نفسها ولأنّ $\widehat{GHD} = \widehat{EAC}$؛ فنحصل على $\frac{AC}{DH} = \frac{GH}{AE}$، ولكنّ $\frac{AC}{DH} = \frac{AG}{GH}$، فيكون معنا $\frac{GH}{AE} = \frac{AG}{GH}$ ، فنحصل على $GH^2 = AG.AE$.

ولكنّ معنا في المثلّث ACG، $AC^2 > AG.AE$ (لأنّ $AY > AE$ إذا كان $AG \perp AY$)، فيكون إذاً $GH < AC$، فنحصل على $KC < AC < CX$. نـُعلّم نقطة O على CX بحيث يكون $GH = KC = CO$، فيكون $OC^2 = AG.AE$.

القطع الزائد $\mathcal{H}_1$، الذي يمرُّ بالنقطة A والذي له الخطّان المقارَبان CB وَ CD، يمرُّ أيضاً بالنقطة O [٤٩].

---

[٤٩] انظر : *Apollonius, Les Coniques, II.11, Heiberg*.

القطع الزائد $\mathcal{H}_2$، الذي يمرُّ بالنقطة C والذي له الخطَّان المقارَبان BX وَ BI'، يمرُّ أيضاً بالنقطة K لأنَّ $KI = XC$[٥٠].

نحن نعلم أنَّ $CL < GH < AC$؛ لتكن I نقطة على الامتداد المستقيم للخطّ CL بحيث يكون $CI = CA$. والنقطتان I وَ K متناظرتان مع A وَ O بالنسبة إلى النقطة C التي هي مركز $\mathcal{H}_1$، فيكون الفرع الثاني للقطع $\mathcal{H}_1$ مارّاً بالنقطتين I وَ K. فتكون النقطة K، التي هي نقطة التقاطع بين $\mathcal{H}_1$ وَ $\mathcal{H}_2$، معلومة، فيكون الخطّان CK وَ AH معلومين.

يقوم الصاغاني في القضيّة الرابعة بتركيب هذا التحليل.

نأخذ مربَّعاً $ABDC$ ذا قطر BC، ونأخذ I على الامتداد المستقيم للخطّ AC بحيث يكون $CI = CA$. نرسم القطع الزائد $\mathcal{H}_1$، ذا الخطّين المقارَبين CB وَ CD، الذي يمرُّ أحد فرعيه بالنقطة A، بينما يمرُّ الفرع الآخر، إذاً، بالنقطة I؛ ثمَّ نرسم القطع الزائد $\mathcal{H}_2$، ذا الخطّين المقارَبين BA وَ BD، الذي يمرُّ بالنقطة C. يقطع KI وهو فرع $\mathcal{H}_1$، الخطّين المتوازيين AI وَ BD، فيقطع إذاً $\mathcal{H}_2$ على النقطة K بين الخطّين AI وَ CD. ويقطع الخطُّ KC الخطَّ AB على النقطة X، كما يقطع BD على I'. ونُخرِج KH عمودياً على BD؛ ونصل بين A وَ H، فتقطع AH الخطّين CB وَ CD حسب الترتيب على E وَ G.

ونبيِّن عندئذ أنَّ المثلّثين GDH وَ AEC لهما المساحة نفسها.

يكون معنا $KI' = XC$[٥١] فيكون المثلّثان AXC وَ KHI' متقايسين؛ فنحصل على $HI' = AC$؛ فيكون معنا $AH \parallel XI'$. وإذا كانت O نقطة التقاطع بين XI' والقطع الزائد $\mathcal{H}_1$، يكون معنا $CO = CK$[٥٢]؛ ولأنَّ $AG \parallel OC$، يكون معنا $CO^2 =$

---

[٥٠] انظر: Apollonius, Les Coniques, II.8, Heiberg.
[٥١] انظر: Apollonius, Les Coniques, II.8, Heiberg.
[٥٢] انظر: Apollonius, Les Coniques, I.30, Heiberg.

$AG.AE$، وفقاً للقضيّة ٣٢ لأبلونيوس. ولكنَّ $CO = CK = GH$، فيكون $GH^2 = AG.AE$، فنحصل على $\frac{GH}{AE} = \frac{AG}{GH}$.

المثلثان ACG وَ DGH متشابهان، فيكون $\frac{AC}{DH} = \frac{GH}{AE}$. ولكنَّ $\widehat{GHD} = \widehat{EAC}$ فنحصل على النتيجة.

وهكذا عرضنا تحليل وتركيب الصاغاني.

لنتناول هذا البرهان بلغة أخرى، لغة التحليل.

ليكن (BD, BA) المعلم (Bx, By) مع $a = BD = BA$.

$\mathcal{H}_1 = \left\{(x, y), y = x - \frac{a^2}{x-a}\right\}$، $\mathcal{H}_2 = \left\{(x, y), y.x = a^2\right\}$.

تُكتَب معادلة الإحداثيّات الأولى لنقاط التقاطع: $x^3 - ax^2 - 2.a^2x + a^3 = 0$،

ولها ثلاثة جذور $x_1 < 0$ ، $0 < x_2 < a$ وَ $a < x_3 < 2a$. والنقطة المطلوبة تتوافق مع الجذر x_3.

ملاحظة ١: لتكن النقطة U المسقط العموديّ للنقطة E على BD . لِنضعْ $a = BD$ ، ولنبحث عن U وَ H بحيث يكون: $BU^2 = UH.UD$ وَ $BU.BD = HD^2$.

لنضع $x = BH$ ، $y = BU$، $a = BD$، مع $a < x < 2a$ وَ $0 < y < a$. يكون معنا:

$$y = \frac{ax}{a+x} \Leftrightarrow y^2 = (x-a)(a-y) \qquad (١)$$

$$a.y = (x-a)^2. \qquad (٢)$$

نستخرج من (١) وَ (٢) أنّ $a^2 x =(x-a)^2(a+x)$، وهذا ما يُعادل، بعد الاختزال، معادلة الدرجة الثالثة السابقة نفسها التي تُعطي الإحداثيّة الأولى لنقطة التقاطع K بين $\mathcal{H}_1$ وَ $\mathcal{H}_2$، وهي النقطة التي لها الإحداثية الأولى نفسها التي للنقطة H.

ملاحظة ٢: يُبيِّن الصاغاني في التحليل العلاقة التضمينيّة:

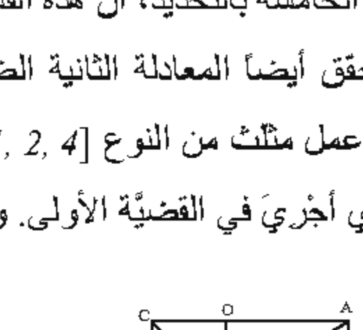
$\widehat{GHD} = \widehat{CAE}$ وَ مساحة (ACG) = مساحة (GDH) $\Leftarrow$ $GH^2 = AG.AE$ ،

كما يُبيِّن في التحليل أنّ:

$GH^2 = AG.AE$ وَ $\widehat{GHD} = \widehat{CAE}$ $\Leftarrow$ مساحة (AEC) = مساحة (GDH).

وهكذا لا يَستخدِم الاستدلال سوى إحدى المعادلتين اللتين تُميِّزان قسمة أرشميدس (A, E, G, H)، أي القسمة التي حصل عليها الصاغاني في القضيّة الأولى.

ويُبيِّن الصاغاني، في القضيّة الخامسة بالتحديد، أنّ هذه القسمة (A, E, G, H) الواردة في القضيّتين الثالثة والرابعة تُحقق أيضاً المعادلة الثانية الضرورية لتمييز القسمة D_1 لأرشميدس؛ ويستخرج من ذلك عمل مثلّث من النوع $[1, 2, 4]$. فتكون القضيّة الخامسة التركيبَ الذي يخصّ التحليل الذي أجْرِيَ في القضيّة الأولى. وهو يتبع الطريقة التالية:



الشكل ٢٢

لنتناول من جديد المربّع $ABDC$ والخطّ AH مع النقطتين E وَ G اللتين حصلنا عليهما في القضيّة الرابعة. نخرج من E العمود على BD الذي يقطع AC على النقطة O

ويقطع BD على النقطة U.

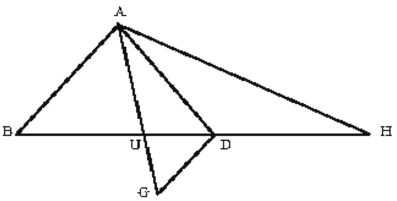
نحن نعلم أنّ $GH^2 = AG.AE$؛ ولكنّ القسمتين (A, E, G, H) وَ (B, U, D, H) متشابهتان، فيكون $DH^2 = DB.DU$. والمثلثان AOE وَ EUH هما، من جهة أخرى، متشابهان، فيكون: $\frac{AO}{OE} = \frac{HU}{UE}$؛ ولكنّ $UD = OC = OE$ وَ $EH.EG = AE$ ، فتكون القسمتان من النوع D_1.

ولقد رأينا في القضيّة الثالثة أنّ $AC > GH$؛ ولكنّ $DH > GH$ وَ $AC = BD$؛ فيكون $BD > DH$، أي أنّ $BU + UD > DH$. ويكون من جهة أخرى $BU^2 = HU.UD$، مع $HU > UD$؛ فيكون معناً، إذاً، $BU + DH > UD$ وَ $HD + DU > BU$. يُمكن إذاً أن نعمل مثلثاً من القطع BU، UD وَ DH.

لم يوضّح الصاغاني، في الحقيقة، أنّ القسمتين (A, E, G, H) وَ (B, U, D, H) متشابهتان؛ ولكنه يُضمِر ذلك بوضوح، عندما يقول:

"وكذلك يُمكن أن يعمل من خط اح مع نقطتيْ هـ زَ مثلث أضلاعه مساوية لخطوط اهـ هـز زح".

فهو يعمل، إذاً، بالاستناد إلى القسمة (B, U, D, H) المثلث ADU مع $AU = UB$ وَ $DA = DH$، ويُبيِّن أنّ $\widehat{AUD} = 2\widehat{ADU}$ وَ $\widehat{ADU} = 2\widehat{UAD}$.



الشكل ٢٣

ويقام البرهان بشكل مباشر: نمدّد AU على استقامة بطول UG مساوٍ لِـ UD، ونستخدم التشابه بين المثلثات AUD، AUH، وَ ADG فنستخرج معادلات بين الزوايا. وهذه المثلثات هي من النوع [*1, 2, 4*].

ويكفي، لعمل المسبَّع، أن نحيط مثلّثاً، ABC، مشابهاً للمثلّث AUD ؛ وهذا ما يفعله الصاغاني في القضيتّين الخامسة والسادسة من مؤلّفه.

لقد درس أبو الجود بانتباه حلَّ الصاغاني هذا في "رسالة إلى أبي محمَّد عبد الله بن علي الحاسب". لا يتناول أبو الجود من جديد تحليل الصاغاني، ولكنّه يعطي ثانية برهان التركيب للصاغاني بكامله متتبِّعاً إيّاه خطوة خطوة (لم يتغيَّر في الشكل سوى حرفين).

١-٣-١-٣-٣ القوهي: المؤلّف الثاني

قدَّم القوهي، بعد عدّة سنوات من تحرير كتابه الأوَّل الذي قام فيه بعمل المسبَّع بواسطة مثلّث من النوع [*1, 2, 4*]، كتاباً ثانياً قام فيه بعمل المسبَّع استناداً إلى مثلّث من النوع [*1, 1,5*]، مستعيناً هذه المرّة أيضاً بقسمة من النوع D_1. وكان قد حرَّر الكتاب الأوَّل حوالى ٩٧٠ وأهداه إلى الملك عضد الدَّولة، في حين إنّه قد أهدى الثاني إلى ابن الملك أبي الفوارس. إنَّ صغر سنّ هذا الأخير والطريقة التي يتوجَّه فيها إلى القوهي، كما لاحظ ذلك عادل أنبوبا[٥٣]، لا يتركان أيَّ شكٍّ في الترتيب الزمني لتحرير الكتابين. فقد لحق هذا الكتاب بالكتاب الأوَّل بعد عدَّة سنوات [حوالى ٣٦٧-٣٦٨ للهجرة]، وحُرِّر على كلّ حال قبل وفاة الملك الأب سنة ٩٨٢ للميلاد، أي قبل أن يُصبح أبو الفوارس الأميرَ شرف الدّولة لبلاد فَرْس.

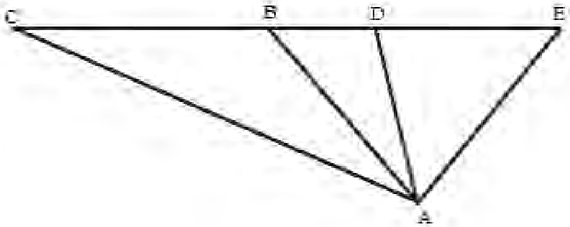
يبدأ القوهي، هذه المرّة أيضاً، بالتذكير بإسهام أرشميدس؛ ومن المدهش أنَّ هذا الاسم

---

٥٣ انظر: عادل أنبوبا، "تسبيع الدائرة".

هو الاسم الوحيد الذي يشير إليه بخصوص عمل المسبّع؛ حتّى إنّه لا يُشير في هذا الكتاب الثاني إلى دراسته الأولى ولا إلى أيّة دراسة أخرى.

يتناول القوهي ثلاثة رؤوس متتالية A، B وَ C لمسبّع متساوي الأضلاع مُحاط بدائرة ويُبيّن أنّ المثلث المتساوي الساقين ABC هو من النوع $[1, 5, 1]$. ويُبيّن في القضيّة الثانية أنّ تحليل عمل المثلث المتساوي الساقين ABC مع $BC - AB$ ومع $\widehat{BCA} - 5\widehat{BAC} - \widehat{ABC}$، يؤدّي إلى قسمة أرشميدس (C, B, D, E). لنتتبّع منهج القوهي في عمل مثل هذا المثلث ABC.



الشكل ٢٤

لتكن D وَ E نقطتين على BC بحيث يكون $\widehat{BAC} - \widehat{BAD}$ وَ $DE = AD$. المثلثان ACD وَ ABD متشابهان، فيكون معنا $\frac{CD}{DA} - \frac{DA}{DB}$، فنحصل على $DB.DC = DA^2$، وبالتالي:

$$DB.DC - DE^2. \qquad (١)$$

يكون معنا: $5\widehat{BAD} - \widehat{ABC}$ وَ $\widehat{BAD} + \widehat{BDA} = \widehat{ABC}$؛ فيكون $4\widehat{BAD} - \widehat{BDA}$.

ويكون معنا من جهة أخرى $DE = AD$، فإذاً $2\widehat{DEA} - 2\widehat{DAE} - \widehat{BDA}$. فيكون المثلثان ADE وَ ABE متشابهين، فيكون معنا $\frac{EA}{ED} - \frac{EB}{EA}$، فيكون $EB.ED - EA^2$. ولكنّ $AB - EA$ وَ $AB - BC$، فنحصل على:

$.EB.ED = BC^2$ (٢)

إنّه من الضروريّ، إذاً، أن نجد على الخطّ BC النقطتين D وَ E بحيث تتحقّق (١) وَ (٢).

ويؤدّي التحليل إذاً إلى العلاقة التضمينيّة :

(المثلّث هو من النوع $[1, 5, 1]$) $\Leftarrow$ قسمة أرشميدس D_1 .

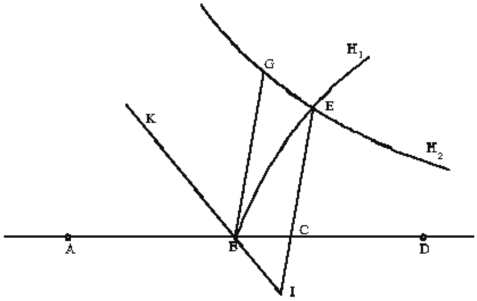
ملاحظة: نجد في هذا الشكل المثلّثين ABD وَ CAE من النوع $[1, 2, 4]$ والمثلّث DAE من النوع $[3, 2, 2]$. ولكنَّ القوهي لا يهتمُّ بهذه المثلّثات[٥٤]. ونجد في المؤلّف الأوّل الشكل المستَخدَم نفسه لدراسة المثلّث $[1, 2, 4]$، والأنواع الأخرى المتواجدة لم تؤخَذ بعين الاعتبار. إنَّ ابن الهيثم هو الذي عالج، كما قلنا، كلّ أنواع المثلّثات، مُتّبعاً منهجاً "يستوعب جميع الوجوه التي يتمُّ بها عمل المسبَّع"، وفقاً لعباراته الخاصّة.

يقوم القوهي، في القضيَّتين الثالثة والخامسة من مؤلفه، بعمل القسمة (A, B, C, D) من النوع D_1 ، بواسطة التحليل والتركيب. يُقدّم في القضيَّة الثالثة التحليل التالي:

لتكن $a = \widehat{ABG}$ زاوية معلومة، وليكن الخط CE موازياً للخط BG، مع $BG = BA$ وَ $CD = CE$. يقطع KB، منصّف الزاوية a ، الخط CE، على النقطة I. يكون معنا، وفقاً للفرضيّات، $AC.AB = CE^2 = CD^2$ ؛ فتكون النقطة E على القطع الزائد $\mathcal{H}_1$ ذي القطر AB والضلع القائم $AB = c$ ، بحيث تكون $a = \widehat{ECB}$ زاوية الترتيب (فتكون BG خطّ التماسّ في B على هذا القطع الزائد).

يكون معنا $\widehat{KBA} = \widehat{CBI}$ وَ $\widehat{CIB} = \widehat{KBG}$، فنحصل على $\widehat{CBI} = \widehat{CIB}$ وَ $CB = CI$ ، فيكون بالتالي $BD = IE$ ؛ فيكون معنا إذا $BG^2 = BA^2 = IE.EC$ ؛ فتكون النقطة E على

[٥٤] يقوم القوهي، ضمن نسخة مختصرة (Thurston 3, fol. 130^v; Marsh 720, fol. 264^v) من مؤلفه حول تثليث الزاوية وعمل المسبّع، بعمل المثلّث من النوع $[3, 3, 1]$، مُسَلماً بذلك بالعلاقة بين العملين.



الشكل ٢٥

قطع زائد $\mathcal{H}_2$ الذي له الخطان المقارَبان KB وَ BD والذي يمرّ بالنقطة G.

ينتهي القوهي عندئذ إلى أخذ قطعة AB ذات طول وموضع معلومين بعد اختيار الزاوية a؛ وهذا ما يسمح له بتحديد G وبرسم BK منصِّف الزاوية. ثمَّ يستخرج من ذلك القطعين الزائدين $\mathcal{H}_1$ وَ $\mathcal{H}_2$ ونقطة تقاطعهما E. ويحصل على النقطتين C وَ D استناداً إلى النقطة E، فتصبح القسمة (A, B, C, D) معلومة. يتوافق هذا المنهج، في الحقيقة، مع نتيجة التركيب التي هي موضوع القضيّة الخامسة. ولكن، يجب التأكد، من قبْلُ، من بعض المتباينات التي تستخرَج مباشرة من خواصّ قسمة أرشميدس والتي هي ضرورية لعمل المثلث.

يُبيِّن القوهي فعلاً، في القضيّة الرابعة، المتباينات التالية:

$$AB < BC + CD \text{،} \quad BC < AB + CD \quad \text{وَ} \quad CD < AB + BC \text{.}$$

لنعرض الآن التركيب مع الاحتفاظ برموز وبشكل التحليل.

لتكن BA قطعة معلومة، ولتكن BG قطعة بحيث يكون $BG = BA$، ولتكن $a = \widehat{ABC}$ زاوية معلومة، وليكن KB، منصِّف الزاوية $\widehat{ABG}$.

نرسم القطعَ الزائد $\mathcal{H}_1$ ذا القطر المستعرض BA والضلع القائم BA وزاوية الترتيب a . ثمَّ نرسم القطعَ الزائد $\mathcal{H}_2$ الذي يمرُّ بالنقطة G والذي له الخطان المقاربَان BA وَ KB. يتقاطع القطعان الزائدان بالضرورة على نقطة E. لتكن EC إحداثيّة الترتيب (الإحداثيّة الثانية) لهذه النقطة، فيكون EC موازياً للخطّ BG، ويقطع KB على النقطة I.

يكون معنا وفقاً لخاصَّة $\mathcal{H}_1$ المميِّزة، $CA.CB = EC^2$. نمدِّد AC، على استقامة، بطول $CE = CD$، فيكون معنا $CA.CB = CD^2$. وتعطي معادلة $\mathcal{H}_2$ $EC.EI = GB^2$، ولكنَّ $GB = AB$ ، $CE = CD$ وَ $EI = BD$ ؛ فيكون معنا $DB.DC = AB^2$.

إذا كانت القطعة AB والزاوية a معلومتين (مهما كانت قيمة كلّ منهما) نُحدِّد $\mathcal{H}_1$ وَ $\mathcal{H}_2$ ونقطة تقاطعهما E؛ ونحصل من E على النقطتين C وَ D اللتين لا تتعلّقان بالزاوية a.

لنشرح منهج القوهي بلغة مختلفة عن لغته.

ليكن (BD, BG) المعلَم (Bx, By) مع $a = GB = AB$. يكون للقطع الزائد $\mathcal{H}_1$، الذي يمرُّ بالنقطة B والذي له خطّ التماسّ By، المعادلة التالية:

$$x(a+x) = y^2 \quad (١)$$

يكون للقطع الزائد $\mathcal{H}_2$، الذي يمرُّ بالنقطة $G(0, a)$ والذي له الخطّان المقاربَان BD وَ BK، المعادلة التالية:

$$y(y+x) = a^2 \quad (٢)$$

ونحصل من (١) وَ (٢) على المعادلة:

$$(a^2-x^2-ax)^2 = x^2(x^2+ax) \quad (٣)$$

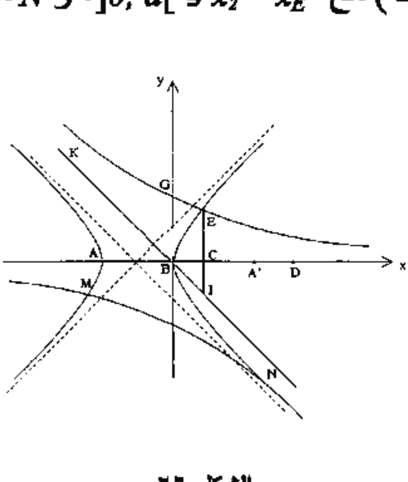
التي تُكتب بعد الاختزال كما يلي:

$$. x^3-ax^2-2a^2.x+a^3=0 \qquad (٤)$$

وتحقق الجذور الثلاثة لهذه المعادلة المتباينات: $0 > x_1$، $0 < x_2 < a$، $a < x_3$. وأحد الجذرين الموجبين هو الإحداثيّة الأولى للنقطة E. ونحن نعلم أنَّ من المفروض أن تكون الإحداثيّة الثانية للنقطة E موجبة. ولكنَّ $y=\frac{a^2-x^2-ax}{x}=\frac{a^2}{x}-(x+a)$، فيكون $x_2 \in]0, a[$، وتكون x_2 الإحداثيّة الأولى للنقطة E (لأنَّ $a < x_3$ تعطي $0 > y$).

وهكذا نتفهَّم خيار القوهي. يبقى علينا أن نُـعلِّل اختفاء الحدّ x^4 من المعادلة (٣). وسبب ذلك هو أنَّ أحد الخطّين المقاربين للقطع $\mathcal{H}_1$ موازٍ للخطّ المقارب GK للقطع $\mathcal{H}_2$ الخارج من وسط AB، القطر المجانب للقطع $\mathcal{H}_1$. لنرسم الشكل عندما يكون $\alpha=\frac{\pi}{2}$. فيكون القطع الزائد $\mathcal{H}_1$ متعامد الخطّين المقاربين ؛ وتُكتب معادلتاهما: $y=x+\frac{a}{2}$ وَ $y=-x-\frac{a}{2}$.

لتكن النقطة A' بحيث يكون: $a = BA' = AB$. يكون لدينا ثلاث نقاط تقاطع: M مع $x_1 = x_M$، E (وهي حلّ المسألة) مع $x_2 = x_E \in]0, a[$، وَ N مع $a < x_N$ وَ $0 > y_N$.



الشكل ٢٦

يُبيِّن القوهي، في القضيّة السادسة، القضيّة الثانية العكسيّة (التي كانت تحليلاً)، وهي أنَّ كلَّ قسمة D_1 لأرشميدس مُرفقة بمثلّث من النوع $T_1 - [1, 5, 1]$.

إنّنا نعلم، فعلاً، أنَّ عملَ مثل هذا المثلّث ممكنٌ، وفقاً للقضيَّة الرابعة. ليكن DEC مثلّثاً بحيث يكون $DE = DB$ وَ $CE = CA$. يقطع الخطُّ CE على النقطة I الخطَّ الموازي للخطّ AE والخارِج من D. يكون معنا $CD = CI$، ويكون المثلّث CDI متساويَ الساقين مثل المثلّث ACE؛ فنحصل على $AD = IE$.

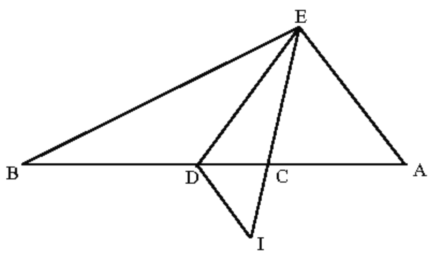
يكون معنا إذاً $DE^2 = DB^2 = DA.AC = EC.IE$. فنحصل من ذلك على: $\frac{IE}{ED} = \frac{ED}{EC}$،

فيكون المثلّثان EDC وَ EID متشابهين ويكون معنا: $4\widehat{EBD} = 2\widehat{EDC} = 2\widehat{CID} = \widehat{ECD}$.

ويكون معنا من جهة أخرى، $EC^2 = AC^2 = BC.CD$، فنحصل على $\frac{EB}{EA} = \frac{EA}{ED}$؛ فيكون المثلّثان ECD وَ BCE متشابهين ويكون $\widehat{EDC} = \widehat{EBD}$، فيكون معنا عندئذ:

$2\widehat{DEC} = \widehat{EDC}$ وَ $4\widehat{DEC} = \widehat{ECD}$. والزاوية $\widehat{BDE}$ هي خارجة بالنسبة إلى المثلّث ECD، فيكون $5\widehat{DBE} = 5\widehat{DEC} = \widehat{DCE} + \widehat{DEC} = \widehat{BDE}$.

فيكون المثلّث المتساوي الساقين EBD حلاً للمسألة.



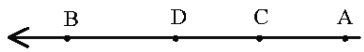
الشكل ٢٧

يعود القوهي، في القضيّة التالية، وهي السابعة، إلى عمل المسبَّع المتساوي الأضلاع

المحاط بدائرة معلومة؛ وذلك بطريقة تفحّصناها أكثر من مرّة : وهي عمل مثلّث مشابه لمثلّث القضية السابقة وإحاطته بالدائرة.

توجَد فكرة مشتركَة لعمل قسمة أرشميدس (D_1) بين المؤلّفين الثلاثة الأكثر أهميّة، أي ابن سهل والقوهي في مؤلّفيْه وابن الهيثم في مؤلّفيْه للمثلّث من النوع [*1, 2, 4*]؛ ترتكز هذه الفكرة على اعتبار أنَّ نقطتين من النقاط الأربع معلومتان، على أن تُحدَّد النقطتان الأخريان بواسطة شَرطَي أرشميدس. وهم يعتبرون هذين الشرطين، في الواقع، كخاصّتين مميِّزتين للقطعين المخروطيّين اللذين يتقاطعان على النقطتين المطلوبتين. إحدى هاتين النقطتين هي، بالفعل، المسقط على محور القسمة لنقطة تقاطع يتمُّ اختيارها بشكل ملائم، بينما نحصل على النقطة الأخرى عندما ننقل على المحور إحداثيَّة الترتيب لنقطة التقاطع ابتداءً من إحدى النقاط المعلومة من قَبْلُ.

$$AC^2 = BC.BD \text{ ،} \qquad BD^2 = AD.CD$$



الشكل ٢٨

يعتبر ابن سهل، وكذلك القوهي في مؤلّفه الأوّل، أنَّ النقطتين C وَ D معلومتان وأنَّ النقطة B هي مسقط نقطة تقاطع قطع مكافئ مع قطع زائد، وأنَّ AC هي إحداثيّة الترتيب لهذه النقطة. لنضع $a = CD$ ، $x = BD$ وَ $y = AC$ ؛ فيُكتَب شرطا أرشميدس على الشكل التالي:

$x(a+x) = y^2$، معادلة قطع زائد متعامد الخطَّين المقارَبين مع محور مستعرض CD؛

وَ $x^2=a(a+y)$ ، معادلة قطع مكافئ ذي محور ED عموديّ على CD، وذي رأس E بحيث يكون $a = CD = ED$ ، وذي الضلع القائم a.

لا توجَد سوى نقطة تقاطع وحيدة مقبولة، لأنّ المفروض أن يكون x و y موجبين.

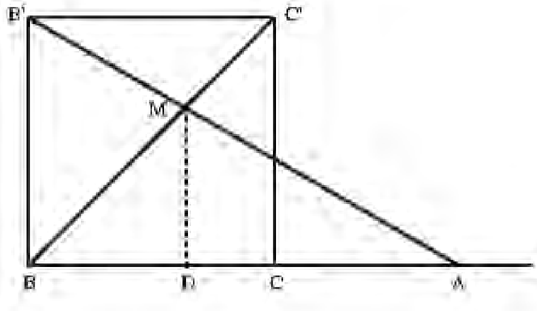
لنلاحظ أنّ إشارة y قد غُيِّرت في حالة القوهي. ويفرض ابن الهيثم، مثلما فعل القوهي في مؤلّفه الثاني، أنّ النقطتين C و D معلومتان، وأنّ النقطة C هي مسقط نقطة التقاطع بين قطع مكافئ وقطع زائد، في حين إنّ CA مساوية للإحداثيّة الثانية لهذه النقطة. لنضع $BD = a$ ، $CD = -x$ و $AC = y$ ؛ فيُكتب شرطا أرشميدس على الشكل التالي:

$a(a-x) = y^2$، معادلة قطع مكافئ ذي محور BD ورأس B وضلع قائم a؛

و $a^2=x(x-y)$، معادلة قطع زائد ذي الخطين المقارِبين $x = 0$ و $y = x$).

يكون معنا هنا $x < 0$ و $y > 0$، وهذا ما يُحدِّد نقطة التقاطع المفيدة. يحسن أن نبدّل إشارتيْ x و y لكي نجد ثانية المعادلات الواردة في الشرح.

إنّ منهج الصاغاني مختلف تماماً، مع أنّه يعتبر، هو أيضاً، أنّ نقطتين من النقاط الأربع معلومتان، فيستخدمهما ليحدّد النقطتين الأخريين. وهو، في الواقع، يفترض أنّ B و C معلومتان؛ ويُحدِّد A كمسقط تقاطع قطعين زائدين، ويستخرج النقطة D من A بواسطة العمل الهندسيّ للمربّع ذي الضلع BC، وهو $BCC'B'$، حيث تكون D المسقط على BC لنقطة التقاطع بين الخطّين AB' و BC'.

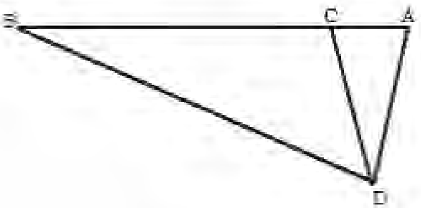


الشكل ٢٩

يحلُّ هذا العمل محلَّ استخدام العلاقة الأولى، لأرشميدس، التي لم يكتبها الصاغاني بالمرّة. يتمُّ، أوّلاً، اختيار القطع الزائد الأوّل ذي المعادلة: $a^2 = yx$ $(BC = a)$؛ ويتمّ اختيار القطع الزائد الثاني بحيث تتحقّق علاقة أرشميدس الثانية. وهكذا لا يدخل في تحديد A، كما رأينا في الشرح، سوى هذه العلاقة الأخيرة. إنّ منهج الصاغاني أقلُّ وضوحاً بكثير من منهج المؤلّفين الآخرين.

١-٣-٢ قسمة أبي الجود/ السجزي (D_2)

يتعلّق الأمر، في الواقع، بالقسمة الأولى لأبي الجود: أيّ قسمة قطعة من خطّ مستقيم AB في نقطة C بحيث يكون $\frac{AB}{AB+BC} = \frac{\sqrt{AB\,AC}}{BC}$.



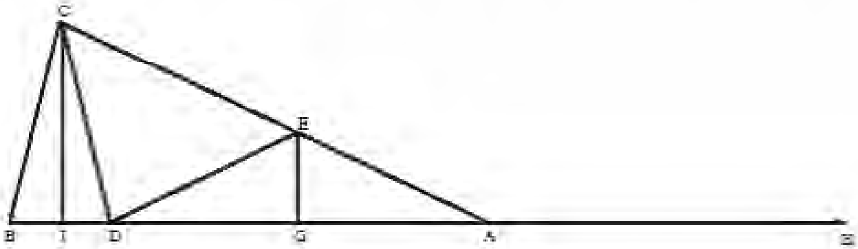
الشكل ٣٠

نستنتج من هذه القسمة تحديد النقطة D بحيث يكون $BA = BD$ و $\sqrt{AB\,AC} = AD$. ونبيّن أنّ D موجودة على الخطّ المنصّف العموديّ للقطعة AC، وأنّ المثلّثين ABD و ACD متساويا الساقين ومتشابهان؛ وهما من النوع T_3.

وكان أبو الجود قد أورد هذه القسمة، وفقاً لأقواله، في رسالته الأولى التي كتبها في سنة ٩٦٨-٩٦٩. وهو يشرح كيف توصّل إلى هذه المسألة، وإلى هذه القسمة. وهو يتبع مثال أقليدس وعمله للمخمّس المتساوي الأضلاع. ويُدخِل في هذا العمل الأخير مثلّثاً متساويَ الساقين بحيث تكون كل زاوية من زاويتي قاعدته مساوية لضعف زاوية رأسه α، فيكون $\alpha = \frac{\pi}{5}$. والزاوية α المحاطة بالدائرة توتّر قوساً بحيث يكون

وترها مساوياً لضلع المخمّس. يلاحظ أبو الجود أنّ الفكرة صالحة لمضلّع ذي عدد فرديّ من الأضلاع. وهكذا نستخدم لمضلّع، ذي $2n+1$ ضلعاً، مثلّثاً متساوي الساقين بحيث تكون كل زاوية من زاويتي قاعدته مساوية لـ n ضعف زاوية رأسه α، أي المثلّث $[1, n, n]$ مع $\alpha=\frac{\pi}{2n+1}$، وهذا ما يفسّر اختيار أبي الجود للمثلّث $[1, 3, 3]$ في عمل المسبّع.

إنّ التماثل له حدوده بدون شكّ، وكان على أبي الجود أن يعلم أنّ عمل المسبّع غير ممكن بواسطة المسطرة والبيكار. نورد فيما يلي التحليل الذي قام به لعمل مثل هذا المثلّث.



الشكل ٣١

ليكن ABC مثلّثاً بحيث يكون AB AC و $3\widehat{BAC}=\widehat{BCA}=\widehat{ABC}$. لتكن D نقطة على AB و E نقطة على AC بحيث يكون $\widehat{BAC}=\widehat{BCD}$ و $\widehat{BAC}=\widehat{ADE}$.

يكون معنا BC CD و DE EA.

ويكون لدينا من جهة أخرى $\widehat{DCE}=2\hat{A}$، فيكون DE CD ويكون معنا EA BC.

والمثلّثان ABC و BCD متساويا الساقين ومتشابهان؛ فيكون

$$\frac{AB}{BC}=\frac{CB}{BD} \Leftarrow AB.BD=BC^2;$$

فنحصل على

$$. AB.BD = AE^2 \qquad (١)$$

نُخرج IC عموديّاً على BD ونَخرج GE عموديّاً على AD؛ فنحصل على $IB = ID$ وَ $GA = GD$. يكون معنا $\frac{AB}{AI} = \frac{AC}{AI} = \frac{AE}{AG}$.

نُمدِّد BA على استقامة بمقدار $AD = AH$، فيكون $2.AI = BH$. ولكنَّ $2.AG = AD$، فإذاً

$$. \frac{AB}{BH} = \frac{AE}{AD} \qquad (٢)$$

تحقّق النقاط B، D، A ، H، إذاً، العلاقتين (١) وَ (٢)؛ ولكنَّ $AB + AD = HB$.
يمكن أن نميِّز، عندئذ القسمة (B، D ، A) بالعلاقة

$$. \frac{\sqrt{AB.BD}}{AD} = \frac{AB}{AB+AD} \qquad (٣)$$

والعكس بالعكس، إذا أخذنا خطّاً AB ونقطة D، على هذا الخطّ، تحقّق العلاقة (٣)، يُمكن أن نحصل على مثلّث متساوي الساقين بحيث يكون مجموع زواياه مساوياً لسبعة أضعاف زاوية الرأس α، فيكون $\alpha = \frac{\pi}{7}$. فنستخرج من ذلك عمل المسبَّع.

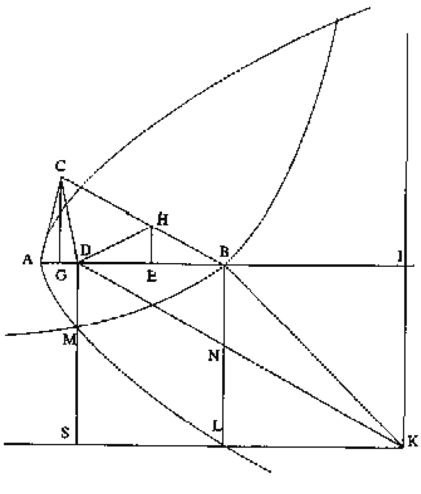
لا يعرض أبو الجود، هنا، عمل القسمة ولا عمل المسبّع، ولكنه يُشير فقط إلى أنّه قد قام بكلّ هذا، في رسالته التي حرَّرها سنة ٩٦٨-٩٦٩ للميلاد، بواسطة قطع مكافئ وفرع من قطع زائد. ولكنّنا نقع هنا بالتحديد على النقطة التي تثير الجدل. فهو يعود إلى هذه الرسالة القديمة في رسالة أخرى عنوانها "كتاب عمل المسبّع في الدائرة "، ويكتب:

"فأمّا رسالتي القديمة في عمل المسبَّع الذي سبقت الجميع إليه، وتفرَّدت الطريق الذي سلكته إليه،

فإني أعيد لك جملته هاهنا في شكل واحد مبرهن عليه[...]"[٥٥]

ثم يعطي أبو الجود البرهان التالي:

لتكن AI قطعة، من خطّ مستقيم، ذات الوسط B، وليكن $BIKL$ مربّعاً؛ وليكن $\mathcal{P}$ قطعاً مكافئاً ذا رأس A ومحور AI وضلع قائم AB؛ وليكن $\mathcal{H}$ فرع قطع زائد ذي رأس B وقطر مجانب $(2.BK)$ وضلع قائم $(2.BK)$؛ فيكون للقطع $\mathcal{H}$ الخطّان المقارَبان IK وَ LK. تكون النقطة B، رأس $\mathcal{H}$، داخل ، فيتقاطع $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$ على نقطتين؛ فلتكن M تلك التي هي بين A وَ L. نـُخرِج DM الخطّ العموديّ على AB ونحدّد نقطة C بحيث يكون $DM = CD = AC$. فيكون معنا $AB\,AD = AC^2$؛ ويكون المثلّثان ABC وَ ADC متشابهين؛ وهما من النوع $[1, 3, 3]$ فيكون بالتالي $\widehat{ABC} = \widehat{ACD} = \frac{\pi}{7}$.



الشكل ٣٢

لنلاحظ أنّ هذا العمل يُظهر مثلّثين آخرين: CBD من النوع T_2 و DHB من النوع T_1.

[٥٥] انظر: كتاب عمل المسبّع في الدائرة أرسله إلى أبي الحسن أحمد بن محمّد بن إسحاق الغادي، ص. ٦٣٩.

يُعطي أبو الجود إذاً القسمة (A, D, B) من النوع D_2، وهو لا يُشير إلى ذلك. فهو يستخدم فقط المعادلة $AB.AD = AC^2$ مع $DM = AC$. وهو لا يورد، أخيراً، سوى التركيب.

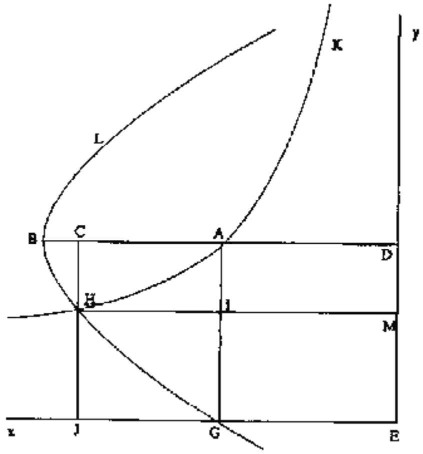
فهل يتعلق الأمر بتحرير الرسالة القديمة، حيث يُصحِّح أبو الجود بعض الأخطاء التي قد آخذه البعض عليها؟ إنَّ التعليل الوحيد لمنطق الشكِّ هذا هو هذا الجدل نفسه ؛ فلو كان البرهان موجوداً في هذه الرسالة، لكان من الصعب أن نفهم انتقاد السجزي.

يقوم هذا الأخير في مؤلّفه بعمل القسمة D_2، فيكون هذا المؤلّفُ أقدم نصٍّ وصل إلينا متضمِّناً هذا البرهان؛ وهو يعترف بأنّه مَدينٌ في أهمّ قسم من هذا البرهان إلى ابن سهل. يعطي السجزي، إذاً، برهان المقدِّمة التالية:

مقدِّمة السجزي: حدِّدْ على قطعة AB، من خطٍّ مستقيم، نقطة C بحيث تتحقّق القسمة D_2.

لتكن النقطة D بحيث يكون $BD= 2\ BA$، وليكن $ADEG$ المربَّع المرسوم على الضلع AD. لنأخذ قطعاً زائداً $\mathcal{H}$ ذا الرأس A والخطّين المقارَبين ED وَ EG ؛ ولنأخذ القطعَ المكافئَ $\mathcal{P}$ ذا الرأس B والمحور BD والضلع القائم AB. يمرُّ هذا القطع المكافئ بالنقطة G، فيقطع القطعَ الزائد على النقطة H.

نـُخرِج من H العمود على BA؛ وليكن CHJ، كما نُخرِج من H الخطَّ الموازي للخطّ AB وليكن HIM. يكون معنا



الشكل ٣٣

مساحة $(HMEJ)$ = مساحة$(ADEG)$ $\Leftarrow$ مساحة $(JHIG)$ = مساحة $(IADM)$

$\Leftarrow$ مساحة $(JCAG)$ = مساحة $(HCDM)$.

يكون معنا، إذاً، $CA.AG = CH.CD \Leftarrow CA.AG = CH.CD$.

ولكنّ $H \in \mathcal{P}$ $\Leftarrow$ $CH^2 = BC.AB$ وَ $AB + AC = CD$ ، فنحصل على

$$(AB + AC)\sqrt{AB.BC} = AB.AD = CA.AG.$$

يوجَد إذاً حلٌ للمسألة؛ ونبيِّن أنّه وحيدٌ. لنتناول المسألة ثانية بلغة أخرى. لنأخذ معلماً متعامداً مُنَظّماً (Ex, Ey) ولنأخذ النقطتين $A(a\,;\,a)$، $B(2a\,;\,a)$، مع $0 < a$. المسألة، إذاً، هي أن نجد نقطة $C \in [AB]$، $C(x, a)$، مع $a < x < 2a$ بحيث يكون: $\frac{\sqrt{a(2a-x)}}{x-a} = \frac{a}{x}$.

تُكتَب معادلتيْ $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$ حسب الترتيب كما يلي:

(١) $a^2 = xy$ ، ولا نأخذ سوى الفرع $0 < x$، $0 < y$

(٢) $(a-y)^2 = a(2a-x)$.

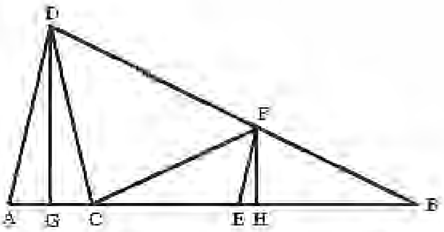
يكون معنا لكلّ نقطة من $\mathcal{H}$: $a^2 = xy \Leftrightarrow x(a-y) = a(x-a)$؛ فنحصل، إذا كان $x \neq 0$ وَ $x \neq a$:

$$\frac{a}{x} = \frac{a-y}{x-a} \qquad (٣)$$

فإذا كانت $H(x_0, y_0)$ نقطة تقاطع بين $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$، يكون معنا، وفقاً للعلاقتين (٢) وَ (٣)، $\frac{a}{x_0} = \frac{\sqrt{a(2.a-x_0)}}{x_0 - a}$، وإذا كان $0 < x_0 < 2a$، تكون النقطة H حلاًّ للمسألة.

ولنلاحظ، لكي نتأكّد من وجود النقطة H، أنَّ النقطة A التي هي رأس فرع القطع الزائد المعني بالأمر موجودة داخل $\mathcal{P}$؛ يقطع $\mathcal{H}$ إذاً $\mathcal{P}$ على نقطتين موجودتين على $\mathcal{H}$ من جهتي الرأس A. والنقطة الملائمة هي التي أقرب من B، رأس القطع المكافئ. وهكذا أثبت رياضيّو ذلك العصر – وخاصّة ابن الهيثم – بهذه الطريقة (بالاستخدام الضمني للاتّصال والتحدُّب) وجودَ نقطة تقاطع بين منحنييْن محدَّبين. وتعطينا دراسة $\mathcal{H} \cap \mathcal{P}$ التحليلية، إذا استبعدنا y بين (٢) وَ (٣)، المعادلة التالية: $x^3-ax^2-2a^2.x+a^3=0$ التي لها ثلاثة حلول: $x_1 < 0$، $0 < x_2 < a$، $a < x_3 < 2a$. فيكون لدينا حلٌّ وحيدٌ يتوافق مع الجذر x_3.

يعالِج السجزي، بعد إثبات القسمة D_2، في مقدِّمة ثانية عَمَلَ مثلّث ABC من النوع $[1, 3, 3]$ مُدخِلاً القسمة (B, C, A) من هذا النوع نفسه (في هذه المقدِّمة، يُصبح الترتيب A، B الذي كان في المقدِّمة الأولى، على شكل B، A). يستخدم البرهانُ النقطة B على القطعة $[B, A]$ بحيث يكون $BE^2 = AB.AC$؛ فتصبح القسمة (B, E, C, A) عندئذ قسمة من النوع D_3 التي تصوَّرها أيضاً أبو الجود.



الشكل ٣٤

قضيّة السجزي الثانية: إذا كانت القطعة AB معلومة، إعمَلْ مثلّثاً ABD بحيث يكون $BD = AB$ و $\hat{A} = 3\hat{B}$.

لتكن C النقطة، على AB، الحاصلة من القسمة D_2 (مع الترتيب A، B). يكون معنا

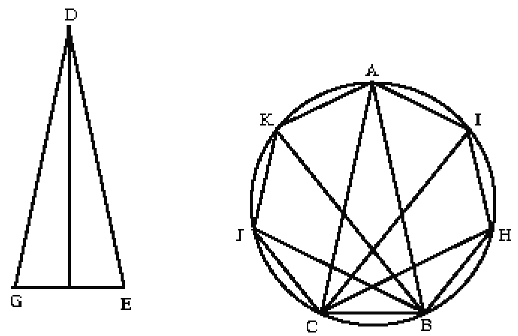
$$\frac{\sqrt{AB.AC}}{BC} = \frac{AB}{AB+BC}.$$

نحدّد النقطة D بحيث يكون $BD = AB$ و $AD = \sqrt{AB.AC}$ ؛ فتكون D النقطة المطلوبة. لنتتبّع برهان السجزي؛ يكون معنا $\frac{AD}{BC} = \frac{AB}{AB+BC}$ ، فيكون $AD < BC$.

لتكن E نقطة بحيث يكون $BE = AD$، $EF \parallel AD$، $FH \perp AB$ ، $DG \perp AB$. يكون معنا $AD^2 = AB.AC$، فيكون $\frac{AD}{AD} = \frac{AD}{AC}$ ، ويكون المثلّثان ABD و ADC متشابهين (الزاوية $\hat{A}$ مشتركة بينهما). يكون المثلّث ADC متساوي الساقين وتكون النقطة G في وسط AC؛ فنحصل على: $\frac{1}{2}(AB+CB) = \frac{1}{2}(AC+2CB) = GC+CB = GB$. ولكنّ $\frac{AD}{BC} = \frac{AB}{AB+BC}$ و $AD = EB$ ، فنحصل على $\frac{AB}{GB} = \frac{AB}{\frac{1}{2}(AB+BC)} = \frac{EB}{\frac{1}{2}BC}$.

ويكون المثلّثان FHB وَ DGB، من جهة أخرى، متشابهين، فنحصل على $\frac{AB}{GB} - \frac{EB}{HB}$،
لأنّ $FB - EB$ وَ $AB - BD$. يكون معنا عندئذٍ $HB - \frac{1}{2}BC$، أي أنّ H هي وسط BC،
فيكون $FC - FB - EB - AD - DC$ ، فنحصل على $2\widehat{B} - \widehat{FCB} + \widehat{B} - \widehat{DFC}$،
$2\widehat{B} = \widehat{CDF}$ وَ $3\widehat{B} - \widehat{CDF} + \widehat{B} - \widehat{ACD}$.

ولكنّ $\widehat{ACD} = \widehat{A}$، فيكون معنا أخيراً $3\widehat{B} - \widehat{A}$، فنحصل على $\widehat{B} - \frac{\pi}{7}$، ويكون CB ضلع المسبَّع المتساوي الأضلاع. يأخذ السجزي، لتحديد رؤوس المسبَّع، النقطة H على الدائرة بحيث يكون $\widehat{BAC} = \widehat{BCH}$ ويكون CI منصِّف الزاوية $\widehat{ACH}$؛ فيكون عندئذٍ $\widehat{ICA} = \widehat{HCI} = \widehat{BCH} = \widehat{BAC}$، فنحصل على $CB - BH - HI - IA$. ونحصل كذلك على النقاط J و K بحيث يكون $CJ - JK - KA$ ، وبالتالي نحصل على المسبَّع المتساوي الأضلاع $AIHBCJK$.



الشكل ٣٥

ولكنّنا نلاحظ أنّ السجزي لا يُشير إلى كيفيّة عمل المثلّث المشابه للمثلّث DEG. وهذا ما هو ممكن بالطريقة التالية: ليكن R نصف قطر الدائرة المعلومة، وليكن r نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلّث DEG، فيكون معنا: $\frac{BC}{EG} - \frac{R}{r}$، وهذا ما يتوافق

مع العمل الذي أشار إليه أبو الجود في مقدّمته الثالثة والذي ذكره السجزي بنفسه. وكذلك نعمل AB بحيث يكون $\frac{R}{r}=\frac{AB}{DE}$.

لم ننسَ، خلال دراستنا مؤلّفات أبي الجود والسجزي، أن نشيرَ، مرَّة بعد مرَّة، إلى أنَّ القسمات ذات النوع D_1 وَ D_2 قد حُدِّدت بأشكال متطابقة بواسطة تقاطع قطع مكافئ $\mathcal{P}$ مع قطع زائد $\mathcal{H}$. لنتناول من جديد دراسة هذا التقاطع، بطريقة مختلفة قليلاً.

ليكن $ABCD$ مربَّعاً ذا ضلع a، ولنأخذ (AD, AB) كمَعلَم (Ax, Ay)، ولتكن I نقطة بحيث يكون $2a = 2BC = IB$. نتناول قطعاً زائداً $\mathcal{H}$ (نتناول فرعاً منه) متعامد الخطَّين المقارَبين ومارّاً بالنقطة C، على أن يكون Ax وَ Ay خطّاه المقارَبان؛ ولنأخذ القطعَ المكافئ $\mathcal{P}$ ذا الرأس I والضلع القائم a والمحور BI الموازي للخطّ المقارَب Ax. يمرُّ القطعَ المكافئ $\mathcal{P}$ بالنقطة D ، وتوجَد النقطة C داخل $\mathcal{P}$ (انظر الشكل أدناه)؛ يكون معنا:

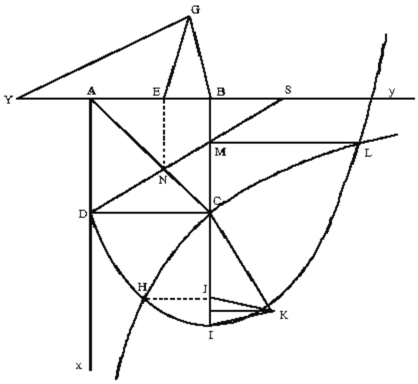
$$\mathcal{H} = \left\{(x, y); x.y = a^2\right\} \quad \text{مع} \quad 0 < x ،0 < y؛$$

$$\mathcal{P} = \left\{(x, y); (a-y)^2 = a(2a-x)\right\}.$$

تكون معادلة إحداثيّات نقاط التقاطع : $x^3\text{-}ax^2\text{-}2a^2.x+ a^3=0$، ويكون لها جذران موجبان: الجذر $x_2 \in]0 , a[$ وهو الإحداثيّة الأولى للنقطة L، والجذر $x_3 \in]a ,2 a[$ وهو الإحداثيّة الأولى للنقطة H.

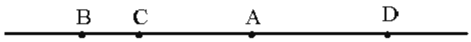
يستخدم أبو الجود النقطة H في "كتاب عمل المسبَّع" وكذلك يفعل السجزي في مؤلّفه؛ ويعطي مسقطها J على محور القطع المكافئ القسمة (I, J, C) من النوع D_2 مع $HJ^2 = IJ.IC$. المثلّثُ المتساوي الساقين ذو القاعدة IJ مع $IK=JK=HJ$ مشابهٌ للمثلّث IKC، وهما مثلّثان من النوع $[1, 3, 3]$.

يستخدم أبو الجود – مثل مؤلّف آخر مجهول[٥٦] – النقطة L ؛ ويحدِّد مسقطَــها M ، على الضلع BC، القسمة (D, N, M, S) من النوع D_1 (أي قسمة أرشميدس). والقسمة (A, E, B, S) هي، أيضاً، من النوع D_1. يستخرج أبو الجود القسمة (B, E, A, Y)، واضعاً $BS = AY$، فيكون $BA.BE = BS^2 = AY^2$؛ وهذه القسمة هي من النوع D_3، فتكون القسمة (B, E, Y) من النوع D_2. المثلّثُ EBG المتساوي الساقين، ذو القاعدة EB مع $BS = EG = BG$، مشابهٌ للمثلّث BGY، وهما مثلّثان من النوع $[1, 3, 3]$.



الشكل ٣٦

سنبحث، إذاً، في ختام هذه الدراسة لطريقة أبي الجود والسجزي، عن قسمة القطعة AB على النقطة C بحيث يكون: $\frac{AB}{AB+BC} = \frac{\sqrt{AB.AC}}{AC}$.



الشكل ٣٧

[٥٦] انظر لاحقاً ص. ٤٠٠–٤٠٢.

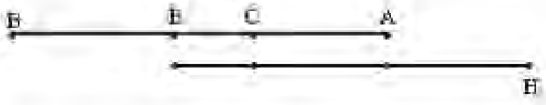
إذا أخذنا أصل الإحداثيات الأولى في النقطة D المتناظرة مع B، وإذا وضعنا $a = AB$، يُكتَب هذا الشرط كما يلي: $\frac{a}{x} = \frac{\sqrt{a(2a-x)}}{x-a}$.

لنُدخِل المقدار z بحيث يكون $\frac{a}{x} = \frac{z}{x-a}$. يكون معنا $z = \sqrt{a(2a-x)}$ أو $z^2 = a(2a-x)$، وهذه هي معادلة قطع مكافئ ذي الإحداثيّتين (x, z)؛ رأس هذا القطع هو النقطة B، ومحوره هو BD وضلعه القائم هو a. أمّا العلاقة $\frac{a}{x} = \frac{z}{x-a}$، فهي معادلة قطع زائد متعامد الخطّين المقاربين ومارّ بالنقطة A، وخطّاه المقاربان هما $x = 0$ و $z = a$، ويتوافق z في الشرح مع $a-y$. ولنلاحظ أنّ السجزي يُثبِت وجود نقطة التقاطع بين القطعين المخروطيين.

لنتذكّر بأنّ للقسمة D_1 أربع نقاط، بينما ليس للقسمة D_2 سوى ثلاث نقاط وعلاقة واحدة، وذلك أنّ الاعتبارات الهندسيّة الخاصّة بالمثلّثات $[1, 3, 3]$ تسمح بحذف إحدى النقاط المعلومة.

١-٣-٣ قسمة أبي الجود (D_3)

لنتناول ثانية القسمة D_2 (A, C, B) السابقة. كان معنا[٥٧] $AD = \sqrt{AB.AC}$. لتكن E نقطة على $[AB]$ بحيث يكون $AB.AC = BE^2$.



الشكل ٣٨

يكون معنا $BE = AD$ وبالتالي:

[٥٧] انظر ص ٣٦٨، ٣٦٩

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BE}{EC}\Leftarrow\frac{AB}{AB+BC}=\frac{\sqrt{AB.AC}}{AC}=\frac{BE}{BC}$$

$$AE.EC=BE^2\Leftarrow\frac{AE}{BE}=\frac{BE}{EC}\Leftarrow\frac{AB}{BE}=\frac{BC}{EC}\Leftarrow$$

وهكذا يمكن أن نحدِّد القسمة $(A,\ C,\ E,\ B)$ بالعلاقة: $AE.EC=BE^2$ وبالعلاقة $\frac{BE}{BC}=\frac{AB}{AB+BC}$، أو بالعلاقتين $AB.AC=BE^2$ وَ $AE.EC=BE^2$.

لنلاحظ أنّنا إذا مدَّدنا AB على استقامة بطول HA مساوٍ لـِ EB، يكون عندئذ يكون $EH = AB$ وتكون القسمة (H, A, C, E) قسمة D_1 لأرشميدس.

يكون معنا فعلاً: $AE.EC=HA^2$، ومن جهة أخرى:

$$.\frac{EC}{CA}=\frac{CH}{EC}\Leftarrow\frac{AE}{AC}=\frac{HE}{EC}\Leftarrow HE.AC=AE.EC\Leftarrow AB.AC=AE.EC$$

يُمكن، إذاً، أن نتحوّل من القسمة (A, C, E, B) التي هي من النوع D_3 إلى القسمة (H, A, E, C) التي هي من النوع D_1، فتكون القسمتان D_1 و D_3، بعكس ذلك، متعادلتين. يستخدم أبو الجود القسمة D_3 في رسالته إلى أبي محمَّد عبد الله بن علي الحاسب. وهو يتناول ثانية التحليل الذي يقوده إلى مثلّث من النوع [1, 3, 3] ويُرفق بهذا المثلّث القسمة D_3. وهو يقوم بذلك كما يلي:

لتكن E، B، H، G أربع نقاط على دائرة بحيث يكون $2\widehat{EB}=\widehat{HB}=\widehat{GH}=\widehat{EG}$؛ فتكون القوس $\widehat{EB}$ مساوية لسبع الدائرة.

يتقاطع الخطّان GE وَ HB على النقطة A. ونحصل من العلاقة $\widehat{BH}=\widehat{EG}$ على ما يلي: ا) $BH = GE$ وَ ب) $\widehat{EGH}=\widehat{BHG}$، فنحصل على $AH = GA$؛ ونحصل من ا) وَ ب) على $AB = AE$ وعلى $EB // GH$.

ونحصل من $\widehat{HG} = 2\widehat{EB}$ على $\widehat{GEH} = \widehat{EHB}$؛ ولكنَّ $\widehat{GEH} = \widehat{EAH} + \widehat{EHB}$ فيكون $\widehat{EHB} = \widehat{EAH}$ وبالتالي يكون $EH = EA = AB$.

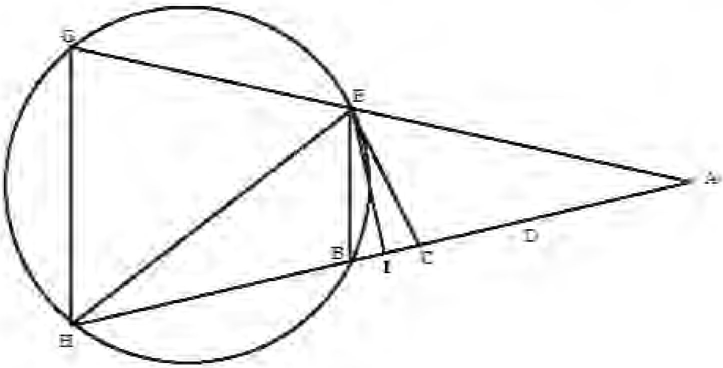
وإذا كان $EI \perp AB$ ، يكون $IA = IH$. وإذا أخذنا النقطة C على IA بحيث يكون $IB = IC$، يكون عندئذ $BH = CA$؛ ولكنَّ $BH > BE$، فيكون $AC > BE$.

لتكن D على CA بحيث يكون $EB = AD$؛ يكون معنا

$$\frac{GH}{AH} = \frac{EB}{AB} = \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AH} \text{ (لأنّ } GH = BH = AC\text{)}.$$

فنستخرج من ذلك:

$$\frac{AC}{CH} = \frac{AD}{DB} \Leftarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DB}{CH} \Leftarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DB}{AB} \Leftarrow \frac{AD}{DC} = \frac{DB}{AD} \Leftarrow DC.DB = AD^2.$$



الشكل ٣٩

والزاوية I قائمة و $IB = IC$ فنستنتج أنَّ $EB = EC$؛ والمثلّثان ABE و CBE، المتساويا الساقين، متشابهان، فيكون $\frac{EB}{BC} = \frac{AB}{BE}$؛ ولكنَّ $EB = AD$، فيكون $AB.BC = AD^2$.

وهكذا قُسِمت القطعة AB إلى ثلاثة أقسام AD، DC، وَ CB، بحيث يكون

$AB.BC = AD^2$ وَ $DC.DB = AD^2$.

وهكذا تكون القسمة (A, D, C, B) من النوع D_3.

١-٣-٤ المقارنة بين قسمات: أبي الجود والشَّنِّي وكمال الدين بن يونس

كان اختيار القسمة من بين المسائل التي أثيرَت خلال المجادلة. إنّ أيَّة مجادلة حول أسبقيّة الاكتشاف، بعد تخليصها من عناصرها غير المؤكّدة، تــرجِعنا في أغلب الحالات إلى أساس الاكتشاف: يتعلّق الأمر هنا بنوع القسمة. وذلك أنّنا إذا قرأنا بدقّة ما كتبه أبو الجود، نلاحظ أنّ أهمّ ادّعاءاته تخصّ جِدَّة قسمته واقتصادها وسهولة استعمالها. وهكذا يكتب حول القسمة ذات النوع D_2:

"وأنّ قسمة الخطّ المفروض بقسمين، كما عملت، أقرب من قسمته بثلاثة أقسام، كما عملاه" (المقصودان بالكلام، هنا، هما أبو سهل القوهي وأبو حامد الصاغاني)[٥٨].

وهذا يعني أنّه لا يُعلّل تفضيله للقسمة D_2 على قسمة أرشميدس، بمعيار الحقيقة – والقسمتان من وجهة النظر هذه متكافئتان – بل بمعيار الفعاليّة وهو، بالإضافة إلى ذلك، يمدح نفسه على اكتشافه للقسمة D_2، وعلى اكتشافه أيضاً للقسمة D_3. وهو يُقدِّم، بالفعل، القسمة D_3 بحجج مشابهة. فهو يكتب حول هذه القسمة الأخيرة:

"وهذا أقرب وأسهل من إيجاد خطّ مقسوم بثلاثة أقسام، وضرب مجموع القسمين الأوّل والثاني في الأوّل مثل مربّع القسم الثالث، وضرب مجموع القسمي الثاني والثالث في الثاني مثل مربّع القسم الأوّل، كما وضعه أرشميدس وعمله الأستاذ أبو سهل وشيخنا أبو حامد، أيّدهما الله، لعمل المسبّع. وهو أيضاً أسهل من قسمة الخطّين بقسمين، ضرب جميع الخطّ في أحدهما مثل مربّع

---

[٥٨] انظر: رسالة أبي الجود محمّد بن الليث إلى الأستاذ الفاضل أبي محمّد عبد الله بن علي الحاسب في الدلالة على طريقي الأستاذ أبي سهل القوهي المهندس وشيخه أبي حامد الصاغاني وطريقه التي سلكها في عمل المسبّع المتساوي الأضلاع في الدائرة، أدناه ص. ٦٤٨.

خطّ نسبته إلى القسم الآخر كنسبة جميع الخطّ إلى مجموعه وذلك القسم الآخر، كما عملته أنا من قبل لعمل المسبَّع أيضاً"[٥٩].

ويبدو أنَّ الترتيب الذي يفضّله أبو الجود هو D_1، D_2، D_3، بمقتضى معيار الفعالية دائماً؛ ولقد ظهرت المقارنة بين أنواع القسمات في الوقت نفسه الذي بدأ فيه البحث في عمل المسبَّع.

يتبنّى السجزي، بدون أن يُصرِّح بذلك، قسمة من النوع D_2 عائدة إلى أبي الجود. يتناول الشَّنّي، فيما بعد من جديد، هذه المسألة بمناسبة انتقاده لأبي الجود. وانتقاده مزدوج؛ فمن جهة، إذا بيّنّا المعادلة بين الأنواع الثلاثة من القسمات – أو على الأقلّ إذا بيّنا ارتباطاتِها بين بعضها – فإنَّ مُطالبة أبي الجود بالأسبقيّة تتزعزع إلى حدٍّ بعيد، حتّى لو أنّها لا تنهار. وكان أبو الجود يدَّعي، من جهة أخرى، أنّه قام بالقسمة D_2 بواسطة قطع مخروطيّ واحد. هذا القول، الذي أخذه الشَّنّي حرفيّاً، مغلوطٌ بدون أيّ شكٍّ. ولكنَّ هناك إمكانيات أخرى – ربَّما ظنَّ أنّه توصّل إلى ذلك بواسطة قطع مخروطيّ ودائرة[٦٠] – إلا أنَّ أبا الجود لا يعطي أيَّ توضيح، وهذا ما يجعل من الصعب مواصلة المناقشة. فيكون الانتقاد الأوّل الانتقادَ الوحيدَ الذي يهمُّنا هنا.

يبدأ الشَّنّي، لتفنيد حجَّة أبي الجود، بإقامة البرهان على أنَّ D_2 تتضمَّن D_3؛ وبما أنَّ D_3 تتضمَّن أيضاً D_2، تكون معنا المكافأة بين هذين النوعين من القسمة. لتكن C وَ E نقطتين على AB بحيث يكون: $AB.AC = BE^2$ وَ $\frac{AB}{AB+BC}=\frac{EB}{BC}$؛ يكون معنا عندئذ $AB.AC = BE^2$ وَ $AE.EC = BE^2$، لأنَّ معنا:

$$\frac{AB}{AB+BC}=\frac{BE}{BC} \Leftarrow \frac{AB}{BC}=\frac{BE}{EC} \Leftarrow \frac{AB}{BE}=\frac{BC}{EC} \Leftarrow \frac{AE}{EB}=\frac{EB}{EC} \Leftarrow AE.EC = EB^2 .$$

---

[٥٩] انظر المرجع السابق، ص. ٦٥٠.

[٦٠] نحن نعلم، وفقاً للكتاب الثالث لهندسة ديكارت (Descartes)، أنَّ مثل هذا العمل ممكنٌ دائماً مع قطع مكافئ ودائرة.

ولكنَّ $AB.AC = BE^2$ ، وفقاً للفرضيّات، فنحصل على النتيجة.



الشكل ٤٠

لنمدّد الآن AB على استقامة بطول $BE = AD$، فتكون القسمة (E, C, A, D) عندئذ من النوع D_1 لأرشميدس، ويكون معنا $AE.EC = AD^2$ و $DC.CA = EC^2$.

إنَّ لدينا بالفعل: $BE = AD \Leftarrow EB^2 = AE.EC \Leftarrow AD^2 = AE.EC$.

ويكون معنا، من جهة أخرى، $AE.EC = AB.AC$ ؛ ولكنَّ $AB = DE$، فيكون $ED.AC = AE.EC$، فنحصل على:

$$\frac{ED}{EA} = \frac{EC}{AC} \Leftarrow \frac{EA}{AC} = \frac{ED}{EC} \Leftarrow \frac{EC}{CA} = \frac{DC}{EC} \Leftarrow DC.CA = CE^2$$ ؛ فيكون $D_3 \Leftarrow D_1$.

وهكذا بيَّن الشنّي أنَّ القسمة (A, C, B) من النوع D_2 تتضمَّن القسمة (A, C, E, B) من النوع D_3 وهذه الأخيرة تتضمَّن بدورها القسمة (D, A, C, E) من النوع D_1.

يُمكننا، بعكس ذلك، أن نتحوّل من قسمة من النوع D_1 إلى قسمة من النوع D_3 ، أي من (E, C, A, D) إلى (A, C, E, D)، وهذا ما فعله أبو الجود. فتكون القِسَم الثلاثة بالفعل متكافئة.

يمكننا، أخيراً، أن نتساءل إذا كانت المقارنة بين القِسَم قد توقّفت، بعد أن خفَّت حِدّة المجادلة، وبعد أن تناول ابن الهيثم المسألة بكاملها؛ ولعلَّ ذلك قد حصل في زمن الشّنّي أو بعده بقليل. ليس لدينا شيءٌ مؤكّد بهذا الخصوص. ولكنَّ من الممكن أن نستثني على الأقلّ مؤلّفاً واحداً هو كمال الدين بن يونس المتوفّـى في سنة ١٢٤٢/٦٣٩. فقد رجع، بالفعل، هذا الأخير الذي كان تلميذاً لشرف الدين الطوسي،

إلى هذه المسألة؛ حتّى إنّه دخل نوعاً ما في المجادلة التي حدثت قبل ما يزيد على قرنين قبل زمانه. ولقد ذكّره أحد مراسليه، وهو محمّد بن الحسين أنّ السجزي أعظـم أمر هذه المقدّمة حتّى حكى في مبدإ كتابه في تسبيع الدائرة قول من قال: "لعلّها أصعب عملاً وأبعد برهاناً مما له قدّمها، ولعلّ ذلك غير ممكن"[61].

وهكذا يستعيد ابن يونس مواضيع المجادلة، وكأنّه يشارك فيها مع أبي الجود والسجزي. وهو يلوم السجزي على عدم رؤيته للعلاقة $D_2 \Leftarrow D_1$. فهو يريد أن يبرهن بدوره ما يلي:

ليكن AB خطّاً ولتكن (A, C, B) قسمة من النوع D_2 محدّدة بالعلاقة:

$$\frac{\sqrt{AB.AC}}{AC}=\frac{AB}{AB+BC}؛$$

إذا حدّدنا على AB النقطتين N و P بحيث يكون $BP = CN = \sqrt{AB.BC}$، يكون عندئذ: $AP.AN = BP^2$ و $NB.NP = AN^2$؛ أي أنّ القسمة (A, N, B, P) هي من النوع D_1 لأرشميدس.



الشكل ٤١

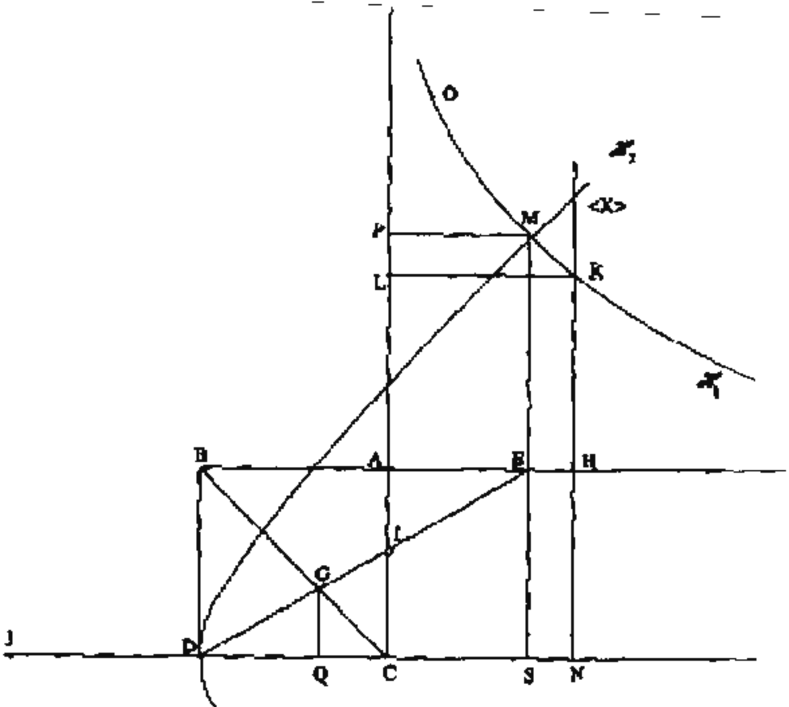
لنتناول ثانية مجمل برهانه بسرعة بدءاً ببرهان المقدّمة. ليكن معنا المربّع $ABCD$؛ لنأخذ النقطة H بحيث يكون $AB = AH$، ولنأخذ على DC النقطتين N و J بحيث يكون $JD = DC = CN$؛ ولنمدّد على استقامة NH بحيث يكون $HK = HN$ ولنخرج الخطّ KL العموديّ على AL.

[61] انظر أعلاه: رسالة كمال الدين بن يونس إلى محمّد بن الحسين في البرهان على إيجاد المقدّمة التي أهملها أرشميدس في كتابه في تسبيع الدائرة، ص ٧٤٩.

ليكن $\mathcal{H}_1$ القطع الزائد الذي يمرُّ بالنقطة K والذي له الخطّان المقاربان AH وَ AL؛ وليكن $\mathcal{H}_2$ القطعَ الزائد ذا الرأس D وذا القطر المجانب والضلع القائم DJ ؛ يقطع القطع $\mathcal{H}_2$ الخطّ NK على نقطة X بحيث يكون: $NK^2 < JN.ND = NX^2$، فنحصل على $NK < NX$.

والنقطة K هي نقطة التقاطع الوحيدة بين $\mathcal{H}_1$ والخطّ HK الموازي للخطّ المقارَب AL.

يتقاطع القطعان المخروطيّان $\mathcal{H}_1$ وَ $\mathcal{H}_2$ على نقطة M تكون إحداثيّتها الثانية MS مع $KN < MS$. يقطع الخطُ MS الخطَّ BA على النقطة E التي هي النقطة المطلوبة لحلّ مقدّمة أرشميدس.



الشكل ٤٢

والمثلّثان ESD وَ GQD متشابهان، فعلاً، فيكون معنا $\frac{EC}{CA}=\frac{DJ}{DS}=\frac{GQ}{DQ}=\frac{ES}{DS}$،
فنحصل على $\frac{CD}{DQ}=\frac{JS}{SD}$. ولكنَّ $M \ni \mathcal{H}_2$ فيكون $\frac{MS^2}{SD^2}=\frac{JS}{SD}$ ؛ وكذلك $M \ni \mathcal{H}_1$،
فنحصل على تساوي مساحات المستطيلات $AEMP$، $AHKL$ وَ $ABDC$؛ فنستنتج من ذلك أنَّ المستطيلين $EBDS$ وَ $MPCS$ لهما المساحة نفسها؛ وهذا يعني أنَّ $MS.SC = ES.\ SD$، أي أنَّ $\frac{MS}{SD}=\frac{ES}{SC}$. فيكون بالتالي $\frac{CD}{SC}=\frac{ES}{SC}=\frac{CD}{DQ}$، فنحصل على $\frac{CD}{SC}=\frac{SC}{DQ}$ أو $\frac{CD}{EA}=\frac{EA}{DQ}$. ولكنَّ المثلّثين EAI وَ GDQ متشابهان، فيكون $\frac{AI}{GQ}=\frac{EA}{DQ}$؛ فإذاً $\frac{CD}{EA}=\frac{AI}{GQ}$، فنحصل على $CD.GQ = AI.AE$ ؛ فتكون مساحتا المثلّثين EAI وَ GDG متساويتين، فيكون برهان المقدِّمة قد تمَّ.

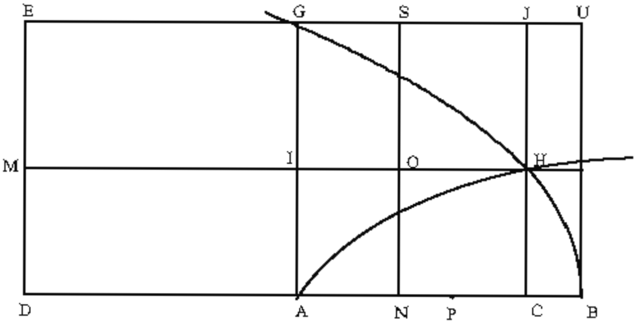
يقوم ابن يونس، هنا، بتركيب: تـُحدِّدُ النقطة E، وهي المسقط العموديّ على AB لنقطة التقاطع M بين $\mathcal{H}_1$ وَ $\mathcal{H}_2$، قسمة أرشميدس (E, I, G, D) بحيث تكون مساحتا المثلّثين AEI وَ CGD متساويتين. ولنلاحظ أنّه يُثبت وجودَ نقطة التقاطع بين $\mathcal{H}_1$ وَ $\mathcal{H}_2$ ؛ وهذا الإثبات مماثل للإثبات الذي يُقدِّمه ابن الهيثم، في القسم الأوّل من مؤلّفه الأوّل "مقدّمة ضلع المسبَّع"، للتقاطع بين قطع مكافئ وقطع زائد. ويستخدم كلا المؤلّفين، في الواقع، القضيّة ١٣ من المقالة الثانية من "كتاب المخروطات": كل خط موازٍ لخطٍّ مقارَب يقطع القطع الزائد على نقطة وحيدة.

ثمَّ يقوم ابن يونس بإثبات العلاقة التضمينيّة $D_2 \Leftarrow D_1$. هذا هو برهانه[٦٢]:

لنضع $CH=BP=CN$. نخرِج من N الخطّ الموازي للخطّ A؛ وهو يقطع EG على النقطة O، ويكون معنا $AI=CH=CN$. ولقد كان معنا $AB.BC = CH^2$ ، فيكون $\frac{CN}{AC}=\frac{CH}{AC}=\frac{AB}{AB+AC}$، فنحصل على $\frac{AB}{AC}=\frac{CN}{NA}$.

---

[٦٢] الشكل مطابق للشكل الوارد في كتاب السجزي (انظر ص. ٦٦٧) لدراسة القسمة (A, C, B) التي هي من النوع D_2 ؛ يكون معنا $AB=AD=AG$ وَ $AB.AC=CH^2$.



الشكل ٤٣

ولكنّ $\frac{CN}{NA}=\frac{AI}{IO}$ وَ $\frac{AB}{AC}=\frac{AG}{HI}$؛

يكون معنا، إذاً: $.CN^2 = AI.CN = GI.IO \Leftarrow \frac{AB}{AC}=\frac{AG}{HI}=\frac{AI}{IO}=\frac{GI}{HO}=\frac{GI}{CN}$

ولكنّ $GI = PA$، فيكون:

$$.BP^2 = CN^2 = PA.AN \qquad (١)$$

ولكنّنا رأينا[63] أنّ المستطيلات $[H, G]$، $[I, D]$ وَ $[B, I]$ لها المساحة نفسها؛ فإذا زدنا على هذه المساحة مساحة المستطيل $[H, U]$، تكون مساحة $[U, I]$ مساوية لمجموع مساحة $[C, U]$ ومساحة $[C, I]$؛ ولكنّ مساحة $[C, U]$ تساوي:

$AB.CB = CH^2 = PA.AN = GI.IO =$ مساحة $[G, O]$، فتكون مساحة $[C, I]$ مساوية للفرق بين مساحة $[U, I]$ ومساحة $[G, O]$، أي إلى مساحة $[U, O]$.

[63] انظر مؤلّف السجزي.

ولكنَّ مساحة $[C, I]$ تساوي $AG.AN = AB.IO = CA.AI$، ومساحة $[U, O]$ تساوي $US.SO$. يكون معنا إذاً $\frac{AG}{US} = \frac{AB}{BN} = \frac{SO}{AN} = \frac{AP}{AN}$، (لأنَّ $AP= SO$). يكون معنا عندئذ $\frac{AB}{BN} = \frac{AP}{AN} \Leftarrow \frac{AB}{BN} = \frac{PN}{AN}$، فنحصل على:

$$BN.NP = AN^2. \qquad (٢)$$

فتكون القسمة (A, N, P, B) من النوع D_1، فيكون $D_1 \Leftarrow D_2$.

ونقول، بعبارات أخرى، إنَّ ابن يونس، بعد أن أثبت مقدِّمة أرشميدس، وبعد أن حدَّد القسمة (D, G, I, E)، يتناول ثانية الشكل الذي استخدمه السجزي لقسمة أبي الجود، وهو الشكل الخاصّ بقسمة القطعة AB على النقطة C بحيث يكون $\frac{\sqrt{AB.AC}}{AC} = \frac{AB}{AB+BC}$.

حدَّد السجزي النقطة H التي تحقّق $CH = \sqrt{AB.AC}$ بواسطة تقاطع بين القطع المكافئ ذي الرأس B والمحور AB والضلع القائم AB، وبين القطع الزائد الذي يمرّ بالنقطة A والذي له الخطّان المقارَبان المتعامدان ED وَ EG. وبَيَّن السجزي أنَّ النقطة H هي النقطة المطلوبة إذا كان $HC \perp AB$.

يُبيِّن كمال الدين بن يونس، عندئذ، أنّنا إذا أخذنا النقطتين N و P على AB، بحيث يكون $CN = BP = CH$، فإنّنا نقسم AB على النقطتين N وَ P بالطريقة المطلوبة. ويُبيِّن أنَّ لدينا: $PA.AN = BP^2$ وَ $NA^2 = BN.BP$، وهما المعادلتان اللتان تحدِّدان قسمة أرشميدس.

إنَّ دراسة ابن يونس، المحرَّرة في القرن الثالث عشر للميلاد، تبدو كأنّها دراسة لرياضيّ من النصف الثاني من القرن العاشر؛ فهي، التي أُلِّفَت بعد ابن الهيثم بقرنين تقريباً، تنتسب، في الواقع، إلى مرحلة سابقة بوضوح لهذا الأخير. فهل كان ابن يونس يجهل إسهام ابن الهيثم؟ هل كان على علمٍ بالتقليد الذي حضَّر لوصول هذا

الإسهام؟ هذان السؤالان يُمهِّدان الطريق لطرح أسئلة أخرى كثيرة، تتعلّق خاصّة بمسائل انتشار المؤلّفات العلمية في البلاد الإسلامية خلال هذين القرنين. إنّه من السابق لأوانه أن نغامر بالخوض في مثل هذه المسائل. ومهما يكن من أمر، فإنّ إسهام ابن يونس يأخذ معناه الحقيقي ضمن هذه المناقشة الدائرة حول أنواع القسمة والمكافأة فيما بينها.

١-٣ – ٥ قسمتا ابن الهيثم (D_4، D_5)

إنّ مؤلّفَي ابن الهيثم، المكرَّسين للمسبّع المتساوي الأضلاع، لا ينتسبان إلى فترتين مختلفتين فحسب ، بل يندرجان أيضاً ضمن مشروعين مختلفين. والمؤلّف **الأوّل** لابن الهيثم في هذا الموضوع، "مقدّمة ضلع المسبّع"، هو من نفس نوع أعمال أسلافه. يحاول فيه ابن الهيثم برهنة مقدِّمة أرشميدس وعمل المثلّث من النوع [*1, 2, 4*]، قبل أن ينتهي إلى عمل المسبَّع. إنّه، بالتأكيد، مؤلّفٌ تقليديٌّ، مع فارق وحيد هو أنّ ابن الهيثم كان أكثر حرصاً من أسلافه على برهنة وجود النقاط التي هي، هنا، نقاط التقاطع بين القطوع المخروطية. لا يظهر هذا الاختلاف، الجوهريّ في نظرنا وغير الملحوظ في أغلب الأحيان، في بحث ابن الهيثم حول المسبَّع فقط؛ لذلك نؤكِّد أنّ ابن الهيثم هو، بالفعل، في هذا المؤلّف، رياضيّ من القرن العاشر.

أمّا المؤلّف **الثاني** لابن الهيثم "في عمل المسبَّع المتساوي الأضلاع" ، فهو أعظم أهمّيّة وأكثر طموحاً أيضاً. كلٌّ شيء يدلٌّ على أنّه أراد تحقيق مشروع كان قد نجح فيه في مكان آخر، وهو "إتمام" التقليد وإكماله. يتعلّق الأمر، هنا، غالباً بعمل إصلاحيّ يتطلّب تغيير نقاط انطلاق المشروع.

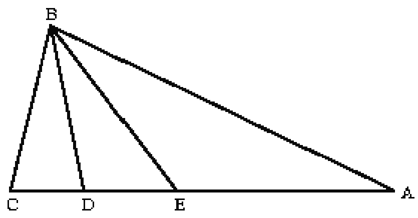
يبدو أنّ ابن الهيثم على معرفة جيِّدة بهذا التقليد. فقد كان لديه مؤلّفٌ للقوهي، ومؤلّفٌ آخر لم يذكر اسم كاتبه، بُرهِنت فيه مقدِّمة أرشميدس وعُمِلَ فيه المسبَّع؛ وربّما كان لديه أيضاً مؤلّفات أخرى ذات خاصّة مشتركة أراد التخلّص منها. فهو يكتب فعلاً:

"ولم نجد لأحدٍ من المتقدّمين ولا من المتأخِّرين قولاً مشروحاً يستوعب جميع الوجوه التي يتمّ فيها عمل المسبّع".[64]

وهكذا لم يتمّ الانطلاق من مقدّمة أرشميدس، ولا من أيّة مقدّمة أخرى معادلة لها، بل من مسألة المسبّع في مجملها، لشقّ طريق يسمح بالتوصّل إلى جميع الوجوه التي يتمّ فيها عمل المسبّع". وهكذا توجّب إيجاد كلّ المثلثات الممكنة التي تؤدّي إلى عمل المسبّع. إنّ هذا البحث عن "الممكن" يسمح بالكلام على عمومية هذا المنهج الشامل (فابن الهيثم يستخدم الفعل "استوعب") الذي ليس له مثيلٌ سابقٌ. وهكذا كفّ ابن الهيثم بوضوح، في هذا المؤلّف الأخير، عن متابعة التقليد. ويتعلّق الأمر، على حدٍّ سواء، باختلاف في المشروع وبانقطاع في الأسلوب، إذ إنّ عمل القِسَم يتطلّب إثبات وجود نقاط التقاطع. فإذا أخذنا بعين الاعتبار ترتيب صدور المؤلّفين، بدون أن نأخذ بعين الاعتبار هذا الاختلاف بين هذين المؤلّفين لابن الهيثم، لا يمكننا أن نقدّر إسهامه أو الروابط التي تربطه إلى التقليد الخاصّ به.

ولكن، توجَد لدينا وسيلة مختصرة وبسيطة لتقدير كلّ هذا؛ وهي أن نلخّص هنا قِسَم ومثلّثات ابن الهيثم، وأن نقارنها بقِسَم ومثلّثات أسلافه.

١–٣–٥–١ المثلّث [1, 3, 3] وقسمة ابن الهيثم (D_5)



الشكل ٤٤

أدّى التحليل إلى القسمة (A, E, D, C) بحيث يكون:

[64] انظر أدناه: "في عمل المسبّع في الدائرة"، ص. ٤٧٣.

(١) $CE^2 = AC.CD$ و $AD.DE = CE^2$.

يوجَد المثلّث [$1, 3, 3$] عند أبي الجود والسجزي والقوهي عندما يقومون بتثليث الزاوية؛ كما نجده بعد ذلك عند نصر بن عبد الله. ولكنّ قسمة ابن الهيثم D_5 لا توجَد عند أيٍّ سلف من أسلافه، معروف لدينا.

لنلاحظ أنّ القسمة (C, D, A) هي قسمة أبي الجود والسجزي، وأنّ الحصول على النقطة E يتمّ استناداً إلى هذه النقاط الثلاث بواسطة العلاقة $CE^2 = AC.CD$.

لنلاحظ أيضاً أنّ قسمة ابن الهيثم هذه مختلفة عن قسمة أبي الجود D_3 (C, D, F, A) التي تُستخرَج من (C, D, A) إذا أخذنا النقطة F المحدّدة بالعلاقة $AC.CD = AF^2$.



الشكل ٤٥

ونستخدم، للحصول على هذه القسمة D_5 لابن الهيثم، قطعين مخروطيّين زائدين أحدهما متعامد الخطّين المقارِبين[٦٥].

١-٣-٥-٢ المثلّث [$3, 2, 2$] والقسمة من النوع D_3

لا يوجَد هذا المثلّث عند أيٍّ من أسلاف ابن الهيثم؛ وهذا ما يُبيِّن عدم وجود بحث عن كل المثلّثات الممكنة في مسألة المسبّع.



الشكل ٤٦

[٦٥] انظر لاحقاً.

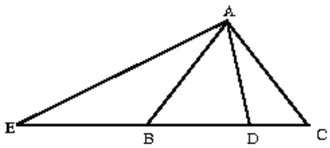
يؤدِّي التحليل إلى القسمة (B, E, D, C) بحيث يكون:

$EB^2 = CE.CD$ و $BD.BC = EB^2$،

وهذه هي القسمة D_3 التي قدَّمها أبو الجود.

يحصل ابن الهيثم كذلك على هذه القسمة بواسطة قطعين زائدين، أحدهما متعامد الخطّين المقارَبيْن، وذلك بطريقة مختلفة تماماً عن طريقة أبي الجود.

١-٣-٥-٣ المثلّث $[1, 5, 1]$ وقسمة ابن الهيثم (D_4)



الشكل ٤٧

يؤدِّي التحليل إلى القسمة (B, E, D, C) بحيث يكون:

$EB^2 = BC.CD$ و $BD.BC = CD^2$،

لا توجَد هذه القسمة عند أيٍّ من أسلاف ابن الهيثم. وهو يحصل عليها بواسطة قطع زائد وقطع مكافئ.

لنلاحظ أنَّ نصر بن عبد الله يستخدم القسمة D_4 لعمل مثلّث من النوع $[1, 3, 3]$ وهو المثلّث ABE. ولنلاحظ أيضاً أنَّ القوهي قد درس هذا المثلّث $[1, 5, 1]$.

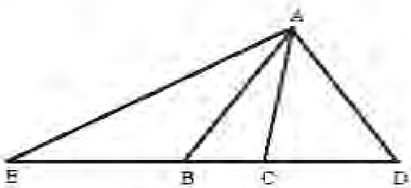
١-٣-٥-٤ المثلّث [1, 2, 4] والقسمة (D_1)

يبدأ ابن الهيثم، هذه المرّة خلافاً لأسلافه وخلافاً للمنهج الذي اتّبعه في مؤلّفه الأوّل، بتبيين أنّ الحصول على مثل هذا المثلّث ممكن استناداً إلى كلّ من المثلّثات التي دُرست سابقاً. وذلك أنّنا إذا قسمنا الزاوية $\widehat{ACB}$ إلى أربع زوايا متساوية، تكون كل زاوية منها مساوية للزاوية $\widehat{A}=\frac{\pi}{7}$ ؛ فنحصل عندئذ على النقاط D ، E و G الموجودة على القطعة AB بحيث يكون ACD مثلّثاً من النوع [1, 3, 3]، فيكون EBC مثلّثاً من النوع [3, 2, 2]، ويكون AGC مثلّثاً من النوع [1, 5, 1]؛ ونستخرج من عمل أحد هذه المثلّثات عملَ المثلّث ABC الذي هو من النوع [1, 2, 4]. فلا يكون هذا الأخير سابقاً من الناحية المنطقية للمثلّثات الأخرى، ولا يكون مركزُه المفضّل سوى نتيجة لصدفة تاريخيّة.



الشكل ٤٨

يُقدّم ابن الهيثم، عندئذ، تحليل عمل هذا المثلّث الذي يقود إلى القسمة D_1 لأرشميدس بحيث يكون: $DB.DC - EB^2$ و $DC^2 - EC.BC$.



الشكل ٤٩

يستخدم ابن الهيثم، لأجل الحصول على هذه القسمة، القطعين المخروطيّين نفسهما المستخدَمين في الحالة السابقة. وكنا قد وجدنا هذا المثلّث في النصّ المنسوب إلى أرشميدس عند القوهي وعند الصاغاني، كما أنَّ أبا الجود قد أشار إليه.

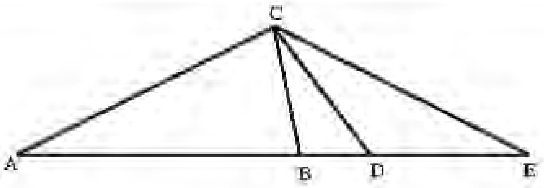
وهكذا نرى بالتفصيل، وحول نقطة مُهمَّة خاصّة بعمل المسبَّع، المسافة التي اجتازها ابن الهيثم انطلاقاً من تقليده الخاصّ. لم يختفِ هذا التقليد تماماً، لأنَّ ابن الهيثم يُرجع في كلّ مرّة عملَ المثلّث إلى قسمة قطعة من خطّ مستقيم في نقطتين. ويبدو، مع ذلك، أنَّ ابن الهيثم يُلمِّح، عند إدخاله قسمة جديدة في كلِّ حالة، إلى أنَّ اختيار القسمة لم يَعُد له أيَّة أهمِيَّة. ويمكن، بالفعل، أن نقوم بعمل القسمة بواسطة أيّ قطعين مخروطيّين تابعين لرِزمة ذات نقطتين أساسيَّتين ثابتتين؛ وكلّما اخترنا قطعين مخروطيّين نحصل على خاصَّتين مميِّزتين؛ فتــفَرض هاتان الخاصَّتان قسمة للقطعة.

١ – ٤ عملان إضافيّان: لنصر بن عبد الله ولمؤلّف مجهول

لقد تمَّ مع ابن الهيثم تقليدُ البحث حول المسبَّع المتساوي الأضلاع. وكنّا قد رأينا أنَّ الإسهام المتأخِّر لابن يونس لم يقدِّم في الواقع شيئاً كبير الأهمّيّة. يبقى علينا، إذا أردنا أن تكون دراستنا شاملة، أن نعرض عملين للمسبَّع. العمل **الأوّل** هو لنصر بن عبد الله **والثاني** لمؤلّف مجهول.

١ – ٤ – ١ نصر بن عبد الله

لا ينطلق نصر بن عبد الله، مثلما فعل القوهي وابن الهيثم ("في عمل المسبَّع")، من المربَّع المعلوم في مقدّمة أرشميدس، بل ينطلق مباشرة من مثلّث من النوع [*1, 3, 3*]. وهكذا يُرفق بالوتر BC، الذي هو ضلع المسبَّع المتساوي الأضلاع المحاط بدائرة، النقطة A التي هي وسط القوس الكبرى $\widehat{BC}$ ؛ فيكون المثلّث ABC المتساوي الساقين مثلّثاً من النوع [*1, 3, 3*].



الشكل ٥٠

يؤدي تحليل مثل هذا المثلّث إلى القسمة (A, B, D, E) بحيث يكون

(١) $AB^2 = AE.ED$ و (٢) $AD.DB = DE^2$.

وهكذا نتحقق من أنّ الأمر يتعلّق هنا بالقسمة D_4 التي نجدها عند ابن الهيثم – ولا نجدها عند أحد غيره – في دراسة المثلّث [I, 3, I]. ولكنّ نصر، في هذه الدراسة للقسمة D_4، يفرض أنّ القطعة AB معلومة، بينما يفرض ابن الهيثم قطعة معلومة تتوافق مع القطعة AE. يُفسّر هذا الاختلافُ الاختلافَ الآخر في اختيار القطعين المخروطيّين؛ وذلك أنّ ابن الهيثم يختار قطعاً مكافئاً وقطعاً زائداً لبرهنة القسمة، بينما يقوم نصر ببرهنة القسمة بواسطة قطعين زائدين (وهو يستخدم فرعاً من كلّ منهما).

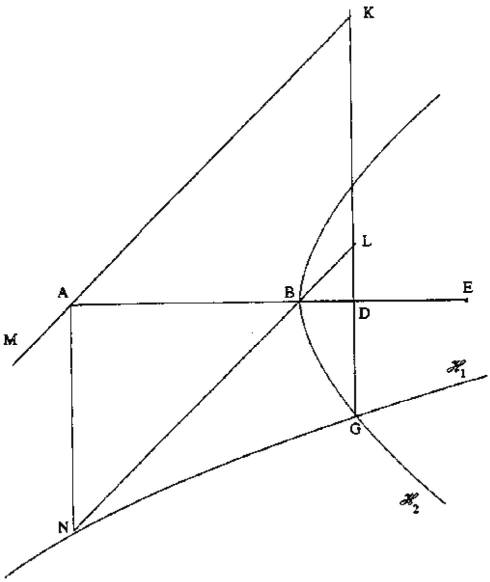
لنسترجع تحليله وتركيبه.

نخرج الخطّين AN و DG العموديّين على AD، مع $AN = AB$ و $DG = DE$. يقطع **الخطّ NB الخطّ DG على النقطة L؛ فيكون معنا $DB = DL$. يقطع الخطُّ AM، الموازي للخطّ NB، الخطّ DG على النقطة K؛ ويكون معنا $LK = AN = AB$، ويكون إذاً $KG = AE$، وينتج من (١) أنّ: $AN^2 = AB^2 = KL^2 = KG.GD$.**

تكون النقطتان N و G، إذاً، على قطع زائد $\mathcal{H}_1$ ذي الخطّين المقاربين AM و AE. ويكون معنا كذلك $DA.DB = DE^2 = DG^2$، فتكون النقطتان G و B، إذاً، على قطع زائد $\mathcal{H}_2$ ذي الرأس B والمحور المجانب AB والضلع القائم AB. فتكون G

نقطة التقاطع بين $\mathcal{H}_1$ وَ $\mathcal{H}_2$ ($\mathcal{H}_2$ هو قطع زائد متعامد الخطّين المقارَبين؛ ويمرُّ هذان الخطَّان في وسط AB وأحدهما موازٍ للخطّ AM).

لنلاحظ أنَّ القسمة (A, B, D, E) تستخرَج من القسمة (K, L, D, G) بدوران ٩٠ درجة حول D.



الشكل ٥١

لنعرض الآن التركيب الذي يُصاغ كما يلي: إذا كانت القطعة AB معلومة، جِدِ القطعتين BD وَ DE على امتداد AB المستقيم بحيث تحقّقُ القسمة (A, B, D, E) العلاقتين (١) وَ (٢).

نخرِج الخطّ AN العموديّ على AB، فيكون $AB = NA$ ؛ ونخرِج الخطّين BN وَ MA بحيث يكون $NB \,//\, MA$. ليكن $\mathcal{H}_1$ القطع الزائد الذي يمرُّ بالنقطة N والذي له الخطّان المقارَبان AM وَ AB. ليكن $\mathcal{H}_2$ القطعَ الزائد ذا الرأس B والمحور المجانب AB والضلع القائم المساوي للقطعة AB. يتقاطع القطعان بالضرورة لأنَّ محور $\mathcal{H}_2$ هو خطّ مقارَب للقطع $\mathcal{H}_1$. لتكن G نقطة تقاطعهما. نُخرِج DG عموديّاً على AB؛

يقطع DG الخطّ AM على النقطة K. ليكن E على امتداد AD، بحيث يكون $DG = DE$. فنحصل على: $G \in \mathcal{H}_1 \Leftarrow GD.GK = NA^2$؛

ولكنَّ $DK = DA$، فيكون $AE = AD + DE = KD + DG = KG$، فنحصل على العلاقة (١).

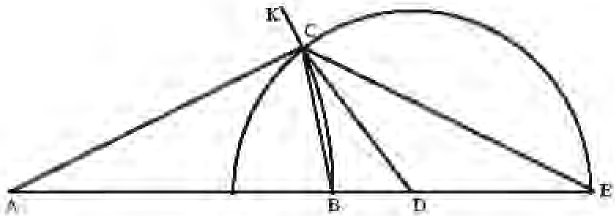
ويكون معنا، من جهة أخرى، $G \in \mathcal{H}_2 \Leftarrow BD.AD = GD^2$، فنحصل على المعادلة (٢).

لنعبِّر عن برهان نصر بلغة أخرى. لنضع $a = AB$، $x = DB$ وَ $y = DE$. تعطي العلاقتان (١) وَ (٢) معادلتي $\mathcal{H}_1$ وَ $\mathcal{H}_2$ (لأنَّ $DG = DE$). يمكننا أن نكتب:

$$\mathcal{H}_1 = \{(x, y); y(y + x + a) = a^2\} \text{، } \mathcal{H}_2 = \{(x, y); x(a + x) = y^2\}.$$

فنكتب معادلة الإحداثيّات الأولى لنقاط التقاطع: $x^3 + 4ax^2 + 3a^2x - a^3 = 0$، فيكون لهذه المعادلة جذرٌ موجب يتوافق مع النقطة G، وجذران آخران سالبان يتوافقان مع نقطتي التقاطع بين الفرع الثاني للقطع $\mathcal{H}_2$ و كلٍّ من فرعي $\mathcal{H}_1$.

يقوم نصر، بعد الحصول على هذه القسمة، بعمل مثلّث من النوع $[1, 3, 3]$. لتكن معنا الدائرتان (A, AB) وَ (D, DE) اللتان تتقاطعان لأنَّ $DB < DE$؛ ولتكن C نقطة تقاطعهما؛ يكون معنا: $DA.DB = DE^2$ وَ $DC = ED$، فنحصل على $\frac{DA}{DC} = \frac{DC}{DB}$، فيكون المثلّثان DCA وَ DCB متشابهين فنحصل على $\widehat{BCD} = \hat{A}$.



الشكل ٥٢

يُبدِّل لصر AB بـ EC في المعادلة $DE.AE = AB^2$، لكي يُبرهن التساوي بين الزاويتين $\hat{A}$ وَ $\hat{E}$ ولكنّ العلاقة $CE = AC = AB$ المُثبتة في التحليل ليست فرضيّة في التركيب، لأنّ الفرضيات في هذا الأخير لا تتعلق إلا بالقسمة (A, B, D, E). يجب، إذاً، أن نُبيِّن أنّ $\hat{A} = \hat{E}$، ولكنّ هذه النقطة ناقصة في برهان لصر، وإنّه من الخطأ التأكيد على أنّ التركيب هو عكس التحليل بشكل حصريّ. لنبيّن أنّ $\hat{A} = \hat{E}$.

يكون معنا $2\widehat{AEC} = \widehat{CDB}$ وَ $\pi - \hat{A} - \hat{E} = \widehat{ACE}$.

ويكون معنا في المثلّث ACD: $\frac{CD}{\sin\hat{A}} = \frac{AC}{\sin\widehat{CDB}}$، فنحصل على $\frac{\sin 2\hat{E}}{\sin\hat{A}} = \frac{AC}{CD}$.

ولكنّ $AC = AB$ وَ $CD = DE$، فيكون $\frac{\sin 2\hat{E}}{\sin\hat{A}} = \frac{AB}{DE}$. ولكنّ $DE.AE = AB^2$، فيكون معنا $\frac{AE}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{\sin 2\hat{E}}{\sin\hat{A}}$. ولكنّ معنا في المثلّث AEC: $\frac{\sin(\hat{A}+\hat{E})}{\sin\hat{E}} = \frac{\sin\widehat{ACE}}{\sin\hat{E}} = \frac{AE}{AC}$،

فيكون معنا إذاً $\frac{\sin 2\hat{E}}{\sin\hat{A}} = \frac{\sin(\hat{A}+\hat{E})}{\sin\hat{E}}$، فنحصل على $\sin(\hat{A}+\hat{E}).\sin\hat{A} = \sin 2\hat{E}.\sin\hat{E}$،

$\hat{E} = \hat{A} \Leftarrow 3\hat{E} = 2\hat{A} + \hat{E} \Leftarrow \cos\hat{E} - \cos(2\hat{A}+\hat{E}) = \cos\hat{E} - \cos 3\hat{E}$،

فيكون بالتالي $\widehat{ECD} = \hat{A}$؛ فنحصل على $2\hat{A} = \widehat{BDC}$ وَ $3\hat{A} = \widehat{BCD} + \widehat{BDC} = \widehat{ABC}$.

وينتهي نصر، كما فعل كلّ الآخرين، إلى إحاطة المثلّث المتساوي الساقين، المشابه لهذا المثلّث الأخير، بالدائرة المعلومة.

١-٤-٢ نصٌّ لمؤلّف مجهول

لا يترك لنا هذا النصّ، الذي نُسِخ بيد مصطفى صدقي بدون ذكر اسم مؤلّفه، أيّة إشارة لتخمين اسم مؤلّفه أو العصر الذي كُتِب فيه. يتعلّق الأمر، كما يظهر من العنوان، بتركيب لتحليل مقدِّمة أرشميدس، ولكن بطريقة مختلفة ترتكز على قسمة القطعة AB إلى قسمين AC وَ CB بحيث يكون $x^2 = AB(AB+AC)$ مع $\frac{AC}{BC} = \frac{x}{AB}$.

يتمّ الحصول على هذه القسمة بواسطة التقاطع بين قطع مكافئ وقطع زائد، كما شرحنا سابقاً.

يقوم المؤلّف بتحديد الخطّ، الخارِج من النقطة A التي هي رأس المربَّع $ABCD$، الذي يقطع القطر BC على النقطة E ويقطع الخطّ CD على النقطة H، والذي يقود إلى التساوي بين مساحة المثلّث AEB والمثلّث GDH. وهو يستخدم لأجل ذلك النقطة G على القطعة DB المحدَّدة بالعلاقة $f^2 = BD(BD+BG)$ مع $\frac{BG}{GD} = \frac{f}{BD}$.

لقد استخدم المؤلّفون، الذين عالجوا هذه المسألة، النقطة H على القطعة CD، بشكل عامّ. ولقد أدّى بهم التحليل إلى وصف القسمة (A, E, G, H) أو القسمة المشابهة لها، المستخرَجة منها بواسطة إسقاط عموديّ على الخطّ CD.

إذا أسقطنا النقطة E عمودياً على الخطّ BD، نحصل على النقطة I، وتكون القسمة (B, I, G, D) مشابهة للقسمة (A, E, G, H) التي تحقّق

(١) $AE^2 = EH.EG$ وَ (٢) $AG.AE = HG^2$.

ويكون معنا أيضاً

(٣) $BI^2 = ID.IG$ و (٤) $BG.BI = DG^2$.

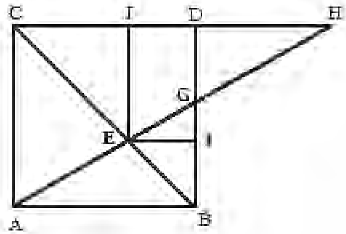
نحصل من (٣) على $(BD-BI-GD)\ (BD-BI)= BI^2 = ID.IG$،

وهذا ما يُعطي $BI(BD+BG) = BD.BG \Leftarrow \frac{BD.BG}{BD+BG} = BI$.

نحصل من (٤) على $DG^2 = \frac{BG^2.BD}{BD+BG} \Leftarrow \frac{DG^2}{BG^2} = \frac{BD}{BD+BG} = \frac{BD^2}{BD(BD+BG)}$؛

فيكون معنا عندئذ $\frac{BG}{DG} = \frac{\sqrt{BD(BD+BG)}}{BD}$.

إذا وضعنا $BD(BD+BG) = f^2$ ، نجد المعادلتين اللتين أعطيتا لتمييز النقطة G والقسمة.



الشكل ٥٣

ويجب أن نلاحظ بعضَ التماثل بين هذا المنهج ومنهج أبي الجود الذي حلّلناه سابقاً. يقوم هذا الأخير، لأجل الحصول على مثلّث من النوع [1, 3, 3] بقسمة مماثلة للقسمة (C, J, D, H) التي لدينا هنا. يحصل أبو الجود على هذه القسمة بتحديد نقطة مماثلة للنقطة G استناداً إلى تقاطع قطع مكافئ مع قطع زائد، وهما بالتحديد القطعان

اللذان يستخدمهما هنا المؤلّف المجهول. فهل قام هذا الأخير بتركيبه مسترشِداً بدراسة أبي الجود؟ ما هذا إلا تخمين.

١–٥ مؤلَّفا ابن الهيثم حول عمل المسبَّع

١–٥–١ "في مقدِّمة ضلع المسبَّع"

يقصد ابن الهيثم، هنا، المقدِّمة التي قدَّمها أرشميدس حول عمل المسبَّع.

مقدِّمة[٦٦]: ليكن $ABCD$ مربَّعاً ذا القطر AC. لنمدِّد AC على استقامة حتى E ولنرسم الخطّ $BGHE$ بحيث يكون للمثلّثين BGC و HDE المساحة نفسها. لنخرِج الخطّ KGI الموازي للخطّ BA ، فيكون معنا:

(١) $DA.AI = DE^2$ وَ (٢) $EI.ID = IA^2$.

ولكن، إذا كان بالإمكان استخراج (١) وَ (٢) من التساوي بين مساحتَي المثلّثين BGC وَ HDE، فإنَّ عملَ الزوج (E, I) لا يُمكن تحقيقه إلا بواسطة القطوع المخروطية.

وهكذا أراد ابن الهيثم برهنة هذه المقدِّمة في أوّل الأمر. فبدأ بمحاولة لتبسيط المسألة المطروحة، وذلك عن طريق التحليل. لنصل إذاً بين D و B ، فتقطع BD الخطّ AC على النقطة M التي هي وسط AC . يكون معنا

(٣) مساحة المثلّث AMD = مساحة المثلّث BMC

ومساحة المثلّث BMC = مساحة المثلّث BMG+ مساحة المثلّث EDH،

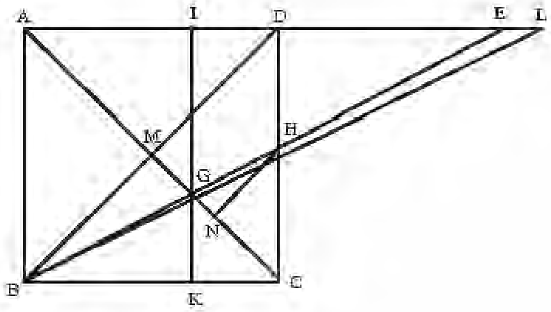
[٦٦] لنلاحظ أنَّ بالإمكان إرجاع هذه المقدِّمة إلى الشكل التالي: جد على قطعة معلومة AD نقطة I وجد على امتدادها المستقيم نقطة E بحيث تتحقّق العلاقتان (١) وَ (٢).

إذا وضعنا $a = AD$، $y = ID$ وَ $x = DE$ ، نحصل على $\begin{cases} x^2 = a(a-y) \\ (a-y)^2 = (x+y)y \end{cases}$ *،

فيكون معنا في النهاية $x^3 + 2ax^2 = a^2x + a^3$ ، وهي المعادلة التي يُمكن حلّها بواسطة التقاطع بين المنحنيَيْن المعرّفين بالمعادلتين

* المنحني الأوّل قطع مكافئ، والثاني قطع زائد.

فنحصل على: مساحة المثلّث AMD= مساحة المثلّث BMG+ مساحة المثلّث EDH.



الشكل ٥٤

فلنضف إلى طرفي هذه المعادلة مساحة رباعيّ الأضلاع $MDHG$، فيكون معنا

مساحة المثلّث BDE = مساحة رباعي الأضلاع $ADHG$.

لتكن النقطة L بحيث يكون: مساحة المثلّث BEL =مساحة المثلّث CGH.

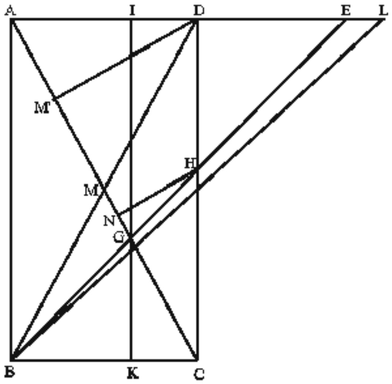
يكون معنا: مساحة المثلّث BDL = مساحة المثلّث ADC، وهذان المثلّثان موجودان بين خطّين متوازيين. فيكون معنا إذاً:

$$DA = DL \qquad (٤)$$

ويكون معنا $\dfrac{\text{مساحة}(BDL)}{\text{مساحة}(BDL)} = \dfrac{\text{مساحة}(ADC)}{\text{مساحة}(CGH)}$.

لنخرِج الخطّ HN بحيث يكون عمودياً على GC، فتكون مساحة المثلّث GHC مساوية لـ $\frac{1}{2}.GC.NH$، وكذلك تكون مساحة المثلّث ADC مساوية لـ $\frac{1}{2}.AC.DM$، لأنّ $DM \perp AM$ ، فيكون $\dfrac{\text{مساحة}(ADC)}{\text{مساحة}(CGH)} = \dfrac{DM}{HN}.\dfrac{AC}{GC} = \dfrac{DC}{CH}.\dfrac{AC}{GC}$؛ ولأنّ $\dfrac{BE}{BH} = \dfrac{DC}{CH}$ وَ $\dfrac{EB}{BG} = \dfrac{AC}{GC}$، يكون معنا: $\dfrac{\text{مساحة}(ADC)}{\text{مساحة}(CGH)} = \dfrac{EB}{BH}.\dfrac{EB}{BC} = \dfrac{EB^2}{BH.BG}$.

إذا كان $ABCD$ مستطيلاً [انظر الشكل ٥٥]، يكون من الضروريّ أن نخرِج العمود DM' على AC. فيكون هذا العمود بديلاً من DM' ، فنرجع بذلك إلى النِّسَب السابقة.



الشكل ٥٥

يكون معنا $\frac{\text{مساحة}(ADC)}{\text{مساحة}(CGH)} = \frac{\text{مساحة}(BDL)}{\text{مساحة}(BEL)} = \frac{DL}{LE}$ ،

فيكون بالتالي: $\frac{DL}{LE} = \frac{EB}{BG} \cdot \frac{EB}{BH} = \frac{EA}{AD} \cdot \frac{EA}{AI} = \frac{EA^2}{AD.AI}$ ؛

ولكنّ $DE^2 = DA.AI$ [٦٧]، فنحصل على:

$$\frac{AE^2}{LE^2} = \frac{DL}{LE} \quad (٥)$$

ولكنّ $DL = DA$، وفقاً للمعادلة (٤). فيرجع العمل إلى قسمة AL على النقطة E بحيث تتحقق العلاقة (٥). ولكن قسمة AL هذه لا يمكن عملها إلا بواسطة القطوع المخروطية.

[٦٧] تعبّر هذه العلاقة، وفقاً للنصّ المنسوب إلى أرشميدس، عن تساوي مساحتي المثلثين BGC وَ DEH. فمساحة المثلث الأول تساوي: $\frac{1}{2}.AD.DI - \frac{1}{2}.BC.GK$ أو $\frac{1}{2}AD.DI.\frac{AB}{BC}$. أمّا مساحة المثلث الثاني فهي $\frac{1}{2}DH.DE = \frac{1}{2}IG.DE.\frac{DE}{EI}$ أو $\frac{1}{2}.\frac{AI.DE^2}{EI}$ أو $\frac{AB}{BC}.\frac{AI.DE^2}{EI}.\frac{1}{2}$؛ فتكتَب العلاقة المطلوبة إذاً كما يلي: $AI.DE^2 = AD.DI.EI$. ولكنّ $IE.DI = AI^2$ ، بفضل التشابه بين المثلثين KGB وَ IGE. فيكون معنا $AD.AI = DE^2$

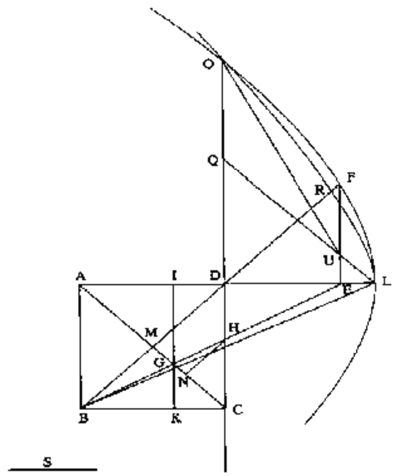
لنتابع التحليل ولنفرض أنّ القطعة AL قد قُسِمت بهذه الطريقة. فلنمدّد الخطّ CD على استقامة حتّى O بحيث يكون $AE = DO$.

لنخرج من E الخطّ EF العموديّ على AL بحيث يكون $DE = EF$ [انظر الشكل ٥٦]. يكون معنا

$$\frac{OD^2}{EF^2} = \frac{DL}{LE} \cdot \qquad (٦)$$

وهذا ما يُكتَب على الشكل:

$$OD^2 = DLs \text{ ، مع } \frac{EF^2}{OD^2} = s \cdot \qquad (٧)$$



الشكل ٥٦

يمرُّ القطع المكافئ، ذو المحور DL والضلع القائم s، بالنقطة O، إذاً، وفقاً للعلاقة

(٧). ليكن (L, F, O) هذا القطع المكافئ؛ إنّه يمرُّ، بالفعل، بالنقطة F، لأنّ لدينا، وفقاً للعلاقتين (٦) وَ (٧)،

$$EF^2 = LEs \cdot \qquad (٨)$$

لنفرِض أنَّ $DL = DQ$، ولنصل بين L وَ Q. يقطع LQ الخطّ EF على النقطة U. يكون المثلّث QDL معلوماً، وهو قائم الزاوية ومتساوي الساقين، وتكون الزاوية $\widehat{OQU}$ معلومة، فهي تساوي ١٣٥ درجة. والنسبة $\frac{QU}{DE}$ هي أيضاً معلومة، لأنَّ $\frac{QU}{DE} = \frac{QL}{DL} = \sqrt{2}$.

ولكنَّ $EA = OD$ وَ $DA = DL = QD$، فيكون $ED = OQ$، فتكون $\frac{OQ}{QU}$، بالتالي معلومة. وهكذا يكون شكل المثلّث OQU معلوماً، وتكون النسبةَ $\frac{UO}{OQ}$ معلومة.

يكون معنا $DE = OQ$ وَ $EF = DE$، فيكون $EF = OQ$ وتكون النسبة $\frac{UO^2}{FE^2}$ معلومة.

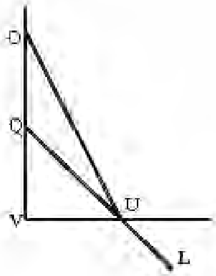
إنَّ لدينا: النسبة $\frac{LE.s}{EF^2}$ معلومة وفقاً للعلاقة (٨)، والنسبة $\frac{EL}{LU}$معلومة، فتكون النسبة $\frac{LU.s}{OU^2}$ معلومة وتكون الزاوية $\widehat{OUL}$ معلومة.

يمرُّ القطعُ المكافئ، ذو القطر LQ والرأس L وزاوية الترتيب $\widehat{OUL}$ والضلع القائم المحدَّد بحيث تكون نسبته إلى s معلومة، إذاً بالنقطة O. ليكن (L, R, O) هذا القطعَ المكافئ. [$k = \frac{LU.s}{OU^2} \Leftarrow OU^2 = LU\frac{s}{k} \Leftarrow OU^2 = LU.s_1 \Leftarrow$الضلع القائم هو s_1].

ولكنَّ معرفة الضلع القائم s تفرض، للأسف، أن تكون النقطة E، التي نسعى إلى تحديدها، معلومة؛ وذلك أنَّ s محدَّدة بواسطة العلاقة $s = \frac{OD^2}{DL} = \frac{EA^2}{DL}$.

يمكننا، رغم ذلك، أن نتصوَّر، استناداً إلى تحليل ابن الهيثم، تركيباً يسمح بعمل المربَّع $ABCD$ وفقاً لشروط مقدِّمة أرشميدس. إذا افترضنا النقطة L معلومة وكذلك

المحور LD والطول s، يكون القطع المكافئ LFO، ذو المحور LD والضلع القائم s، معلوماً. والقطع المكافئ الثاني المساعد يمرُّ بالنقطة L وله القطر LQ بحيث تساوي الزاوية $\widehat{DLQ}$ ٤٥ درجة. أمّا زاوية الترتيب لهذا القطر فإننا نحدّدها بالطريقة التالية. لنأخذ مثلّثاً متساوي الساقين UVQ قائم الزاوية في V، ولنمدّد الضلع VQ على استقامة بالطول $VQ = QO$؛ ولنصل بين O وَ U، ولنمدّد UQ على استقامة حتّى L؛ والزاوية المطلوبة هي $\widehat{OUL}$.



الشكل ٥٧

ويمكن أن نحدِّد الضلع القائم s_1 لهذا القطع المكافئ الثاني، إذا لاحظنا أنّه يساوي $\frac{OU^2}{LU} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{OU^2}{LE}$، حيث يكون $5DE^2 = 5QV^2 = OQ^2 + QU^2 + OQ.QU\sqrt{2} = OU^2$؛ وهكذا يكون $s_1 = \frac{DE^2}{LE}.\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}s$، لأنّ $s = \frac{EA^2}{DL}$ وَ $\frac{EA^2}{DE^2} = \frac{DL}{LE}$.

يكون القطع المكافئ الثاني المساعد، إذاً، معلوماً. ويتقاطع القطعان المكافئان على النقطة O (المختلفة عن النقطة L) التي يُحدِّد مسقطُها على LD النقطةَ D. نأخذ النقطة A على الامتداد المستقيم للخطّ LD بحيث يكون $DA = LD$، ونأخذ النقطة E بحيث يكون $DE = OQ$، حيث تكون Q نقطة التقاطع بين القطر LQ والخطّ OD. ولقد أعيد رسم شكل أرشميدس أيضاً، باستثناء تحالكٍ اختياريٍّ على التقريب.

يُتبـِـع ابن الهيثم هذا الحلَّ بحلٍّ آخر يُصحِّح فيه القسمة المفروضة استناداً إلى المعطيات الأوَّليّة؛ وهذا الحلُّ هو، فضلاً على ذلك، استعادة من أسلافه؛ فيمكن أن نرى في ذلك ما يُبيِّن أنَّ الحلَّ الأوّل لم يكن يُرضيه.

لقد اعتقد البعض أنَّ ابن الهيثم يقوم، في هذا القسم الثاني من هذا المؤلَّف، "بالتحليل والتركيب في آن واحد"، وأنَّ التحليل قد ورد بشكل غامض"[٦٨]. ولكنَّ دراسة بسيطة للنصّ تُبيِّن أنّه لا يتضمّن أيّ تحليل، وأنَّ ابن الهيثم يقوم فيه فقط بالتركيب.

وهذا التركيب يستند إلى معطيات مختلفة عن تلك التي فُـرِضت في البداية؛ وهنا تكمن كلُّ المسألة؛ فهذا التركيب لا يفرض أنَّ القطعة AD معلومة، بل يفرض أنَّ الطول s معلومٌ. لعلَّ هذا هو السبب الذي دفع ابن الهيثم إلى البحث عن طريقة أخرى وإلى عدم كتابة التركيب السابق[٦٩].

٢- كلُّ شيء يدلُّ إذاً على أنَّ ابن الهيثم تناول هذه المسألة ثانية، في القسم الآخر من مؤلَّفه الأوّل، وذلك لمواجهة هذه الصعوبة. ويلاحظ في أوّل الأمر أنَّ عمل المسبَّع المتساوي الأضلاع، وفقاً لمقدّمة أرشميدس، يرجع، في الواقع، إلى قسمة القطعة AB بحيث يكون: $DB^2 = DA.AC$ و $AC^2 = BC.CD$، مع $DC < AC$ و $DC < DB$.



الشكل ٥٨

وهو، في هذه المرّة، يُهمل التحليل ليُقدِّم مباشرة التركيب.

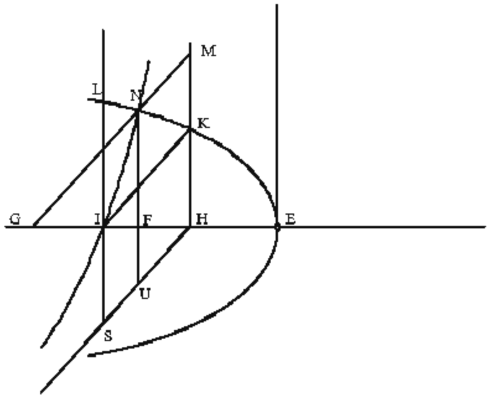
---

[٦٨] انظر: هوجنديجك، «Greek and Arabic Constructions of the Regular Heptagon»، ص. ٢٢٤.

[٦٩] لقد لامنا البعض على أنّنا أكّـدنا أنّ تحليل ابن الهيثم "معلومٌ"؛ إنّنا لم نكتب أبداً مثل هذا، بل إنّنا كتبنا فقط " لا يؤدّي التحليل إلى حلّ المسألة كما كانت مطروحة"، أي مع قطعة AD معلومة؛ انظر "عمل المسبّع"، ص. ٣٦٤. وربّما ينبغي، من جهة أخرى، أن نرى في ذلك السببَ الذي جعل ابن الهيثم يعتبر أنّ تحريرَ هذا التركيب غيرُ نافع، إذ إنّ هذا التركيب لا يتضمّن أيّة صعوبة. ولقد تعرّضنا لانتقادات أخرى تتعلّق بالقسم التالي من تحقيقنا وشرحنا، ولكنّ أهمّيّتها لا تتعدى أهمّيّة الانتقادات السابقة. لذلك لن نتوقّف عندها.

ليكن معنا قطعة اختياريّة IE وليكن H وسطَها. ليكن HK عموديّاً على HE، وليكن $HE = HK$ و $HK // IL$.

لنرسم القطع المكافئ $\mathcal{P}$ ذا المحور EG والرأس E والضلع القائم EH؛ فيكون معنا $K \in \mathcal{P}$، وفقاً للقضيَّة ٥٢ من المقالة الأولى من المخروطات (انظر الشكل ٥٩–ا).



الشكل ٥٩-ا

لتكن $L \in \mathcal{P}$ بحيث يكون $LI \perp IE$. لنمدِّد LI على استقامة حتّى النقطة S بحيث يكون $KH = IH = IS$. يكون رباعيُّ الأضلاع $KISH$ متوازيَ الأضلاع.

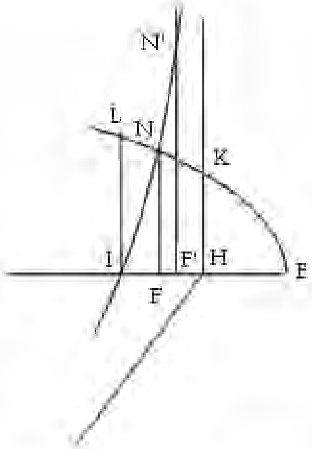
لنرسم القطع الزائد $\mathcal{H}$ الذي يمرُّ بالنقطة I والذي له الخطّان المقارَبان HK و َHS؛ القطع الزائد $\mathcal{H}$ موجود ، وفقاً للقضيَّة الرابعة من المقالة الثانية من "المخروطات".

ولكنَّ $KH // IL$ كما أنَّ KH خطٌّ مقارَبٌ. يقطع الخطُّ IL القطع $\mathcal{H}$ على نقطة وحيدة هي I. ويوجَد نصف الخطّ المستقيم IL داخل $\mathcal{H}$ ولا يلتقي به إلا بالنقطة I.

لنأخذ أيَّ نقطتين N وN' على $\mathcal{H}$، ولتكن النقطتان F و F' مسقطيهما على EG (انظر الشكل ٥٩– ب):

إذا كان $NF < N'F'$ يكون $d(N, HK) > d(N', HK)$؛

إذا كان $N'F' \to +\infty$ يكون، عندئذ، $d(N', HK) \to 0$.



الشكل ٥٩- ب

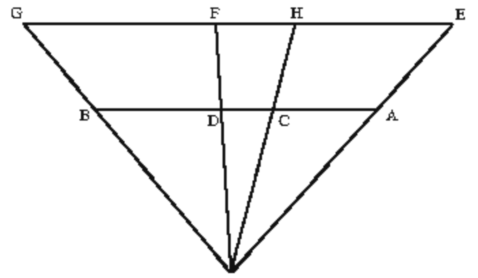
يكون قسم $\mathcal{H}$ الواقع في الرقعة (IL, HK) مقطوعاً بالقسم KL من $\mathcal{P}$، على نقطة هي N. ليكن NM موازياً للخطّ KI، وليكن NU موازياً للخطّ HK (انظر الشكلين ٥٩- أ و٥٩- ب). يكون معنا:

$KI.IS = NM.NU$ [وفقاً لمعادلة $\mathcal{H}$]، وتكون مساحة متوازي الأضلاع (N, H) مساوية لمساحة متوازي الأضلاع (S, K).

ولكنّ $HF \perp NU$ و $HI \perp IS$، فيكون إذاً $EH^2 = SI.IH = HF.NU$.

لنضع $NF = FG$. يكون معنا عندئذ $NU = HG$، لأنّ $FH = FU$، فنحصل على $EH^2 = HF.GH$. ولكنّ معنا من جهة أخرى $FE.EH = FN^2$ [معادلة $\mathcal{P}$]، ولكنّ $NF = FG$، فيكون $FE.EH = FG^2$.

وهكذا ننتقل من هذه القسمة للقطعة EG إلى قسمة القطعة AB بواسطة تحاكٍ يحوّل (E, F, G, H) إلى (A, D, B, C)، فيكون معنا $DA.AC = DB^2$ و $BC.CD = CA^2$.



الشكل ٦٠

يبقى علينا أن نبرهنَ أنَّ $DC < AC$ وَ $DC < DB$. يكون لدينا

$FN^2 = FG^2 = FE.EH$؛ ولكنَّ $EH < FE$؛ فيكون $EH < FN$.

ولكنَّ $EH = HI$ فنحصل على $HI < FN$ وَ $HF < HN$، لأنَّ $HF < HI$. ولكنَّ $NF = FG$ فيكون $FH < FG$ ؛ كما أنَّ $HF < EH$ لأنَّ $EH = HI$. يكون إذاً $HF < EH$ وَ $FH < FG$، فنحصل بالتحاكي على $DC < AC$ وَ $DC < DB$.

وهكذا قسمنا AB في النقطتين C وَ D وفقاً للشروط المعلومة. وهذا ما أردنا أن نبيِّن.

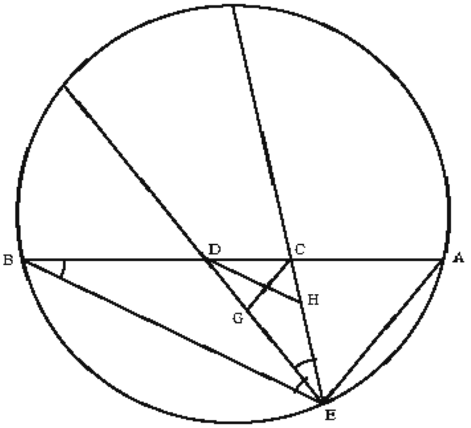
يعود عمل المسبَّع أخيراً إلى عمل مثلّث ECD بحيث يكون $CA = EC$ وَ $DB = ED$. إذا رسمنا، بالفعل، الدائرة المحيطة بالمثلّث AEB، فتكون AB قطر المسبَّع المطلوب، وتكون E رأساً مجاوراً للنقطة A؛ EC وَ ED هما قطران آخران للمسبَّع، لأنَّ زوايا المثلّث ECD هي، كما سنثبت ذلك أدناه، $\frac{\pi}{7}$، $\frac{4\pi}{7}$ وَ $\frac{2\pi}{7}$.

تعطي الدائرة المحيطة بهذا المثلّث، مباشرة، المسبَّعَ المتساوي الأضلاع المحاط بها. وكان ابن الهيثم قد تأكّد من إمكانيّة عمل هذا المثلّث، لأنَّ

$$DC < AC \text{ و } DC < DB \Leftarrow CD < DB + AC؛$$

ومن جهة أخرى $CD.BC = AC^2$ وَ $DC < AC \Leftarrow CB > AC$ ، فنحصل على

$CD+DB > AC$، فيكون $CD > AC - DB$، فيكون $AC+DB > DC > AC-DB$.



الشكل ٦١

لنبيّن أنّ المثلّث ECD من النوع [$1, 2, 4$]، أي أنّ $2\widehat{CED}=\widehat{EDC}$ وَ $4\widehat{CED}=\widehat{ECD}$.

ليكن DH منصّف الزاوية $\widehat{EDC}$، فيكون معنا $\frac{EH}{HC}=\frac{ED}{DC}=\frac{EH}{EC}$، فنحصل من التركيب بين النسبتين الأولى والثالثة على $\frac{EC}{CH}=\frac{BC}{CD}$؛ ولكنّ $\frac{AC^2}{CD^2}=\frac{BC}{CD}$ لأنّ $CD.BC = AC^2$، فيكون $\frac{CE^2}{CD^2}=\frac{AC^2}{CD^2}=\frac{EC}{CH}$؛ فنحصل على $CH.EC = CD^2$، فنحصل على $\frac{CE}{CD}=\frac{CD}{CH}$. يكون المثلثان DEC وَ CDH متشابهين، ويكون بالتالي:

$\widehat{EDC}=\widehat{DHC}$ وَ $\widehat{EDH}+\widehat{DEH}=\widehat{DHC}$ ، $\widehat{HDC}=\widehat{DEH}$ $2\widehat{HDC}=\widehat{EDC}$ وَ $2\widehat{DEC}=\widehat{EDC}$.

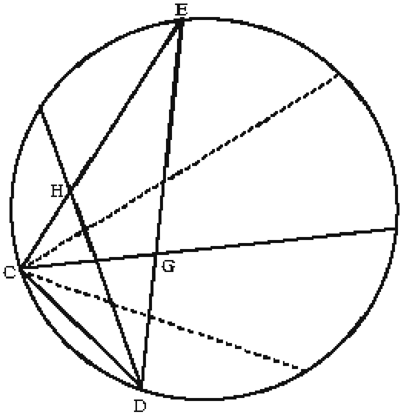
ويكون معنا أيضاً $\frac{CD}{AC}=\frac{CD}{CE}=\frac{DG}{EG}$، فنحصل بالتركيب على $\frac{DE^2}{CE^2}=\frac{BD^2}{AC^2}=\frac{AD}{AC}=\frac{DG}{EG}$،

فيكون بالتالي $\frac{CE}{EG}=\frac{DE}{CE}$؛ فيكون المثلّثان DEC وَ ECG متشابهين، ويكون بالتالي:

$\widehat{ECD}=\widehat{CGE}$ وَ $\widehat{GDC}+\widehat{GCD}=\widehat{CGE}$ ، $\widehat{ECG}=\widehat{EDC}$ ، $2\widehat{ECG}=\widehat{ECD}$ ، $2\widehat{EDC}=\widehat{ECD}$

وَ $4\widehat{CED}=\widehat{ECD}$.

إذا رسمنا الآن المثلّث، المحاط بالدائرة، الذي تكون زواياه مساوية لزوايا المثلّث DEC، وإذا قسمنا الزاوية $\widehat{ECD}$ إلى نصفين، وقسمنا الزاوية الحاصلة إلى نصفين، وإذا قسمنا الزاوية $\widehat{EDC}$ إلى نصفين، تقسِم الخطوطُ المرسومة الدائرة إلى سبعة أقسام متساوية.



الشكل ٦٢

ويُمكن أن نقول، بعبارات أخرى، إنّ ابن الهيثم يأخذ (HI, HK)، لأجل قسمة قطعة من خطّ مستقيم وفقاً للشروط المعلومة، كمَعْلَــمٍ ينسِب إليه القطوعَ المخروطية اللازمة لعمل القسمة.

ليكن، إذاً، $(HI, HK) - (Ox, Oy)$؛ وليكن $a = EH$؛ يكون معنا:

$$\mathcal{P} = \left\{(x, y); (y^2 = a(x+a)\right\}\text{ ، }\mathcal{H} = \left\{(x, y); y = \frac{a^2}{x} \quad x\right\}.$$

يُبيِّن ابن الهيثم أنّ هذين المنحنييْن يتقاطعان بالضرورة على نقطة بحيث تكون إحداثيّتها الأولى محصورة بين 0 وَ a. ومعادلة الإحداثيّات الأولى لنقاط التقاطع هي من الدرجة الرابعة، ولها جذر ظاهر $x = -a$ (يمرُّ الفرع الثاني للقطع الزائد، بالفعل،

بالنقطة E المتناظرة مع النقطة I). وهي $(a^2 - x^2)^2 = ax^2 (a + x)$ ، فنحصل على $x^3-2ax^2+a^3 = 0$.

إنّه من الواضح أنّ لهذه المعادلة ثلاثة جذور بحيث يكون: $x_1 < 0$، $0 < x_2 < a$ وَ $0 < x_3$؛ والجذر الموجب x_2 هو الذي يخصّ النقطة N.

تسمح ميزّة الخطّ المقارَب للقطع الزائد بإثبات وجود هذا الجذر الموجِب.

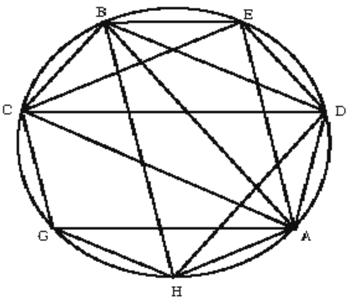
يعمل ابن الهيثم، بعد ذلك، مثلّثاً من النوع [$1, 2, 4$] لإتمام حلّ المسألة. وإذا استثنينا المناقشة ذات الأهميّة التاريخية (تقاطع القطعين المخروطيّين)، فإنّ حلّ ابن الهيثم، مع أنّه مُقدَّم بشكل مختلف، لا يتميَّز ، في الحقيقة، من الحلّين اللذين قدّمهما الصاغاني والقوهي. أمّا تجديد ابن الهيثم فيظهر في مؤلّفه الثاني حيث يُعيد صياغة مسألة المسبَّع نفسها.

١–٥–٢ "في عمل المسبَّع"

يبدأ ابن الهيثم بالتذكير، في مقدِّمة هذا المؤلّف، بأنَّ أعمال المسبَّع المتساوي الأضلاع كانت تستند من قبلُ إلى مقدِّمة أرشميدس، أي إلى قسمة أحد أقطار المسبَّع بقطرين آخرين. أمّا ابن الهيثم فهو يبحث عن أعمال المسبَّع استناداً إلى عمل المثلّثات التي يمكن تشكيلها مع الأضلاع والأقطار. هذا التحوُّل في وجهة نظر ابن الهيثم، الذي لم يُؤكّده بشكل كافٍ، حَفز ابن الهيثم على القيام منهجيّاً بكلّ الأعمال الممكنة، متجاوزاً بذلك الحلّ الوحيد الذي قدَّمه أسلافه في كلّ مرّة، بعد أن أخذ بعين الاعتبار كل التقسيمات الصحيحة للعدد ٧. وهكذا يكون حلّه، وفقاً لهذا المعنى بالتحديد، أكثر عموميّة.

وهو يُشير بالفعل إلى ريّاضيّين عالجوا قبله هذه المسألة؛ يتعلّق الأمر بالقوهي وبمؤلّف آخر مجهول يرتكز حلّه على مقدِّمة أرشميدس، وهو الصاغاني على أرجح الاحتمالات. يقوم ابن الهيثم، إذاً، بتحليل المسائل ويعرض القضيّة التالية:

لتكن ABC دائرة؛ ولنفرض أنَّ المسألة محلولة. ليكن $ADEBCGH$ المسبَّع المتساوي الأضلاع الذي تمَّ الحصول عليه. لتكن BEC، BDC، BAC وَ BDH المثلّثات الأربعة المحاطة بالدائرة. كلُّ مثلّث آخر مشكــَّل انطلاقاً من هذه النقاط السبع يُساوي أحد هذه المثلّثات الأربعة.



الشكل ٦٣

يكون معنا بالفعل:

١- ABC : $\widehat{A}=\frac{\pi}{7}$، $\widehat{B}=\frac{3\pi}{7}$، $\widehat{C}=\frac{3\pi}{7}$ $[1, 3, 3]$

٢- BDH : $\widehat{B}=\frac{2\pi}{7}$، $\widehat{D}=\frac{3\pi}{7}$، $\widehat{H}=\frac{2\pi}{7}$ $[2, 3,2]$

٣- EBC : $\widehat{E}=\frac{\pi}{7}$، $\widehat{B}=\frac{5\pi}{7}$، $\widehat{C}=\frac{\pi}{7}$ $[1,5,1]$

٤- DBC : $\widehat{D}=\frac{\pi}{7}$، $\widehat{B}=\frac{4\pi}{7}$، $\widehat{C}=\frac{2\pi}{7}$ $[1,4 ,2]$.

وهذا يعني أنّه لا يوجد سوى أربع ثلاثيّات مشكــّلة انطلاقاً من ثلاثة أعداد صحيحة a، b وَ c مع $7 = a+ b+c$. لا يُعلّل ابن الهيثم هذا القول الذي يُبرهن مباشرة. لنقم بهذا البرهان حسب الأسلوب المتّبع في ذلك العصر.

لنفرض بالفعل أنّ $a \geq b \geq c$. لا يُمكن أن يكون معنا $a = b = c$، لأنّنا نحصل عندئذ على المعادلة $3a = 7$ التي ليس لها حلٌ في N. ليكن $b + c \geq 2$ ، يكون معنا $a \leq 5$؛ ويكون من جهة أخرى $3a > a + b + c = 7$، فيكون إذاً $a > 2$. فيمكننا أن نأخذ ثلاث قِيَم لـِـ a:

$a = 5$ $b + c = 2$ $b = 1$ $c = 1$ $[1,5,1]$

$a = 4$ $b + c = 3$ $b = 2$ $c = 1$ $[1,2,4]$

$a = 3$ $b + c = 4$ $b = 3$ $c = 1$ $[1,3,3]$

$b \geq c$ ، $b = 2$ ، $c = 2$ $[2, 3, 2]$.

وتكرَّس بقيّة المؤلّف، إذاً، لتركيب القضيّة السابقة. والهدف هو تبيين أنَّ كلَّ مثلّث من هذه المثلّثات يمكن أن يعطي عملاً للمسبَّع.

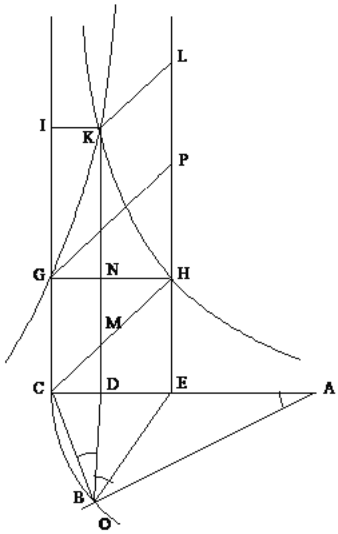
١ – الحالة الأولى [$1, 3, 3$]

<u>التحليل:</u> نفرض أننا وجدنا مثلّثاً ABC بحيث تكون زواياه من النوع [$1,3,3$]. يكون المثلّث ABC متساوي الساقين. لتكن D نقطة على AC بحيث يكون $\widehat{BAC} = \widehat{CBD}$. فيكون المثلّثان ABC وَ BCD متشابهين.

يكون معنا $BC = BD$ وَ $\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{CB}$، فنحصل على:

$$BC^2 = AC.CD \qquad (١)$$

لتكن E نقطة على AD بحيث يكون $\widehat{BAC}=\widehat{DBE}$. فيكون معنا، بما أنَّ $\widehat{ABC}$ تساوي ثلاثة أضعاف $\widehat{BAC}$، $\widehat{ADB}=\widehat{BEC}=\widehat{CBE}=\frac{2\pi}{7}$، فيكون $CB = EC$.



الشكل ٦٤

ولكنَّ المثلّثين ABD وَ DBE متشابهان، فيكون

$$DB^2 = AD.DE \qquad (٢)$$

ويكون معنا، وفقاً للعلاقتين (١) وَ (٢)، وبما أنَّ $BC = BD$: $AD.DE = AD.DE$ وَ $CE = BC = BD$.

فنحصل، وفقاً للعلاقة (٢)، على:

$$CE^2 = AD.DE \qquad (٣)$$

$$CE^2 = AC.CD \qquad (٤)$$

إنَّ القسمة (A, E, D, C) للقطعة AC، التي قام بها ابن الهيثم للحصول على المثلّث الذي تــحقّق زواياه النسَب $(1, 3, 3)$، والتي تحقّق العلاقتين (٣) وَ (٤)، غير موجودة عند سلف من أسلاف ابن الهيثم.

ونعمل على CE، عندئذ، المربَّع $CEHG$ والقطع الزائد $\mathcal{H}_1$ الذي يمرُّ بالنقطة H والذي له الخطّان المقارَبان CE وَ CG. ويقطع الخطُّ، الخارج من D والموازي للخطّ CG، الخطَّ GH على النقطة N.

ليكن $P \in HE$ بحيث يكون $HP = HE$؛ ولنصل بين P وَ G وبين H وَ C. تقطع القطعة HC الخطّ DN على النقطة M.

يكون معنا:

$$(٥) \qquad DM = CD \quad \text{و} \quad HN = DE.$$

لنخرِج الخطّ KI الموازي للخطّ DC، فيكون معنا:

$$(٦) \qquad CE^2 = HE.EC = KD.KC \; [\text{معادلة } \mathcal{H}_1].$$

يكون معنا، وفقاً للعلاقة (٤)، $KD = AC$، كما يكون، وفقاً للعلاقة (٥)، $KM = AD$. فنحصل، وفقاً للعلاقتين (٣) وَ (٥)، على $CE^2 = KM.NH$؛ ويكون معنا، بما أنَّ $\frac{GH}{CH} = \frac{NH}{MH}$، $\frac{KM.NH}{KM.MH} = \frac{GH}{CH} = \frac{GH^2}{GH.CH} = \frac{GH^2}{ND.HC}$. ولكنَّ $CE = GH$، فنحصل على:

$$HP.HC = ND.HC = KM.MH.$$

لنخرِج KL على موازاة HM مع $L \in HE$، يكون معنا $HP.PG = KL.MK$، فالقطع $\mathcal{H}_2$، الذي يمرُّ بالنقطة G والذي له الخطّان المقارَبان HC وَ HL، يمرُّ أيضاً بالنقطة K. فيكون معنا $K \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$. أمّا مسقط K على CE فهو النقطة D.

التركيب: لتكن CE قطعة اختياريّة من خطّ مستقيم؛ ولنرسم على CE المربّع $EHGC$؛ ولنضع P على EH بحيث يكون $HE = HP$. ولنرسم بعد ذلك القطع الزائد $\mathcal{H}_1$ الذي يمرّ بالنقطة H والذي له الخطّان المقاربَان CE وَ CG، ولنرسم القطع $\mathcal{H}_2$، الذي يمرّ بالنقطة G والذي له الخطّان المقاربَان HC وَ HL. يتقاطع قسما $\mathcal{H}_1$ وَ $\mathcal{H}_2$، المحصوران في الرُّقعة المحدَّدة بالخطّين المقاربَين المتوازيين، على النقطة K.

ليكن: $D \in CE$ بحيث يكون $KD \parallel GC$،

$I \in CG$ بحيث يكون $KI \parallel CE$،

$L \in EH$ بحيث يكون $KL \parallel MH$،

$(DK) \cap (CH) = \{M\}$، $A \in CE$ بحيث يكون $KD = CA$.

لنرسم الدائرة (C_1) ذات المركز A ونصف القطر AC؛ ولنرسم الدائرة (C_2) ذات المركز C ونصف القطر CE. تتقاطع الدائرتان (C_1) وَ (C_2) على النقطة B، ويكون معنا:

$CE^2 = GH.HE = KD.KI = KD.DC = AC.CD$ [معادلة $\mathcal{H}_1$].

ويكون معنا، بما أنّ $CE=CB$،

(٧) $CE^2 = AC.CD$؛

ويكون معنا $KM = AD$ ، لأنّ $KD = AC$ وَ $DM = CD$.

ولكنّ $GC.GP = MK.KL$ [معادلة $\mathcal{H}_2$]؛ فنحصل على $KM.MH = GC.CH$ ؛ ولكن $\frac{MH}{HN} = \frac{CH}{HG}$ [بفضل الموازاة]، فنحصل على $\frac{KM.MH}{KM.HN} = \frac{CH.HG}{HG^2} = \frac{PG.GH}{CG^2}$؛

ولكنّ $PG.GH = KM.MH$ [معادلة $\mathcal{H}_2$]، فيكون $CE^2 = CG^2 = KM.HN$ ، فنحصل على:

$CB^2 = CG^2 = CE^2 = AD.DE$.

يكون المثلّثان ABC وَ BDC متشابهين، وفقاً للعلاقة (٧)؛ فيكون $\widehat{ABC} = \widehat{BDC}$ وَ $\widehat{BAC} = \widehat{CBD}$، وَ $BD = BC$، لأنَّ المثلّث متساوي الساقين، فنحصل على $BD^2 = AD.DE$.

المثلّثان ABD وَ BED هما، إذاً، متشابهان، فيكون $\widehat{ABD} = \widehat{BED}$ وَ $\widehat{BAD} = \widehat{DBE}$،

فنحصل على $\widehat{CBD} = \widehat{DBE}$.

المثلّثان ABC وَ CBD متشابهان، فنحصل على $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{BC}$. ولكنَّ $BC = BD =$ EC، فيكون $\frac{AB}{BD} = \frac{CE}{CD} = \frac{AC}{CE}$؛ كما نجد، إذا طرحنا الصورة من الصورة والمخرج من المخرج في النّسبتين الأخيرتين، أنَ هذه النّسَب مساوية أيضاً للنسبة $\frac{AE}{ED}$.

تكون النقطة E، إذاً، على منصّف الزاوية $\widehat{ABD}$، فيكون $\widehat{ABE} = \widehat{DBE}$. فتكون الزاوية $\widehat{ABC}$ مقسومة إلى ثلاثة أقسام متساوية. ويتمُّ عمل المسبَّع كما حصل سابقاً.

يُمكن، أخيراً أن نـــلُخِّص حلَّ ابن الهيثم كما يلي:

ليكن (CE, CG) المَعْلَم (Ox, Oy). لنضع $a = CE$، ولنأخذ القطعين الزائدين:

$\mathcal{H}_1 = \left\{(x, y); xy = a^2\right\}$، $\mathcal{H}_2 = \left\{(x, y); y = x - \frac{a^2}{x-a}\right\}$؛

يتقاطع $\mathcal{H}_1$ وَ $\mathcal{H}_2$ بالضرورة على النقطة $K(x_0, y_0)$ بحيث يكون $x_0 \in]0, a[$.

توجَد، إذاً، قيمة وحيدة $x_0 \in]0, a[$ بحيث يكون $0 = x_0^3 - ax_0^2 - 2a^2x_0 + a^3$.

يكون بالفعل، لمعادلة الإحداثيّات الأولى لنقاط التقاطع، ثلاثة جذور، يكون من بينها الجذر x_0 الذي يعطي الحلَّ.

لتكن النقطة $D(x_0, 0)$ مسقط $K(x_0, y_0)$ على CE. ولتكن $A \in CE$ بحيث يكون $y_0= DK= CA$. تتقاطع الدائرتان (C_1) وَ (C_2). ولتكن B إحدى نقاط التقاطع. والمثلّث CBA الحاصل هو من النوع $[1, 3, 3]$. ونعمل في الدائرة المعلومة، بواسطة التحاكي، مثلّثاً مشابهاً للمثلّث CBA. نلاحظ أنَّ ابن الهيثم هنا يقوم بتثليث الزاوية $\widehat{CBA}$. ونلاحظ أيضاً أنَّ (C_1) تمرُّ بمركز (C_2)؛ فتتقاطع الدائرتان، إذاً، ولسنا بحاجة إلى المتباينة المتعلّقة بالمسافة بين مركزي الدائرتين ونصف قطر كلّ منهما.

٢- الحالة الثانية $[3, 2, 2]$

لنلاحظ أوّلاً أنَّ هذه الحالة لم تـُدرَس من قِبَل أيّ سلف من أسلاف ابن الهيثم الذين نعرفهم.

التحليل: لنفرض أنّنا وجدنا المثلّث ABC (انظر الشكل ٦٥)؛ فتكون زواياه $\widehat{A}$، $\widehat{B}$ وَ $\widehat{C}$ من النوع $[3, 2, 2]$.

يكون المثلّث ABC، إذاً، متساويَ الساقين، مع $AB = AC$. ليكن $D \in BC$ بحيث يكون $\widehat{C} = \widehat{BAD}$. لنمدّد CB على استقامة حتّى E بحيث يكون $BA = BE$. يكون المثلّثان ABD وَ CBA، عندئذ، متشابهين؛ يكون معنا $BE^2 = CB.BD$.

والمثلّث ABE متساوي الساقين، فيكون معنا: $\widehat{BAE} = \widehat{BEA} = \frac{\widehat{B}}{2}$ وَ $\widehat{CAD} = \widehat{AEC}$، لأنَّ $\widehat{BAC}$ تساوي ثلاثة أضعاف $\widehat{BEA}$، وفقاً للفرضيّات؛ والمثلّثان ABD وَ CBA، هما، إذاً، متشابهان؛ فيكون معنا:

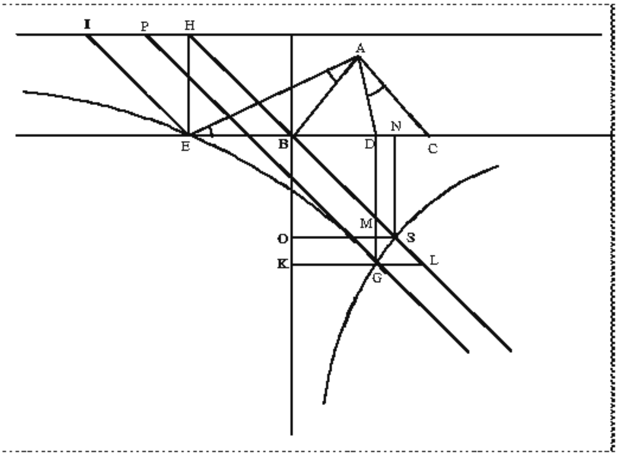
$$EB^2 = AC^2 = EC.CD \qquad (١)$$ ،

فيكون $CB.BD = EC.CD$.

ليكن معنا: قطعة EH بحيث يكون $BE \perp EH$ وَ $BE = EH$،

قطعة HI بحيث يكون $BE \,//\, HI$ وَ $BE = HI$،

قطعة BK بحيث يكون $BE \perp BK$ وَ $BC = BK$،



الشكل ٦٥

قطعة KL بحيث يكون $BC \,//\, KL$ و $BC = KL$،

قطعة DG بحيث يكون $DG \,//\, BK$، $G \in KL$؛ فتقطع DG الخطّ BL على M.

ليكن P الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع $HLGP$.

ليكن $N \in BC$ بحيث يكون $BN = BE$؛ وليكن $BNSO$ المربَّع المرسوم على BN. تساوي مساحة هذا المربَّع BE^2 ويكون $BE^2 = KB.KG$، فنحصل على $DG.GK = NS.SO$.

القطع الزائد $\mathcal{H}_1$ الذي يمرُّ بالنقطة S، والذي له الخطّان المقارَبان DB وَ BO، يمرُّ، إذاً، بالنقطة G. يكون معنا $\frac{LB}{BK} = \frac{LB}{BC} = \frac{BH}{BE} = \frac{LH}{CE}$، فنحصل على $\frac{BH.BE}{BE^2} = \frac{LH.CD}{CE.CD}$؛

ويكون معنا، وفقاً للعلاقة (١): $HB.BE = LH.CD$؛ ويكون معنا $LH = PG$ و $GL = CD$، لأنَّ $BC = KL$ وَ $BD = KG$، فنحصل على $PG.GL = HB.BE = IE.EB$؛ والقطع $\mathcal{H}_2$، الذي يمرُّ بالنقطة E والذي له الخطَّان المقارَبان HI وَ HL يمرُّ، إذاً، بالنقطة G. فيكون $G \ni \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$.

ومسقط G على BC هو النقطة D ؛ فيستخرج ابن الهيثم من ذلك أنَّ $BE^2 = CB.BD$؛ وهكذا تكون القطعتان BA وَ AC معلومتين. ولكنَّ الأمر يتعلق بعدُ بالتركيب.

التركيب: لتكن BE قطعة اختياريّة من خط مستقيم، ولتكن N النقطة المتناظرة مع E بالنسبة إلى النقطة B، وليكن $BNSO$ المربَّع المرسوم على BN. لنرسم القطع الزائد $\mathcal{H}_1$ الذي يمرُّ بالنقطة S والذي له الخطَّان المقارَبان BN وَ BO. ولتكن النقطة H بحيث يكون $HE \perp EB$ و $EB = HE$ ، ولتكن النقطة I، بحيث يكون $BE \,//\, HI$ وَ $BH \,//\, EI$. لنرسم القطع الزائد $\mathcal{H}_2$ الذي يمرُّ بالنقطة E الذي له الخطان المقارَبان HI وَ HS. يتقاطع $\mathcal{H}_1$ وَ $\mathcal{H}_2$ على النقطة G لأنَّ $\mathcal{H}_2$ يقترب بلا نهاية من HS.

لتكن D مسقط G على EB، ولتكن $L \ni HS$ بحيث يكون $EB \,//\, GL$، ولتكن $C \ni BE$ بحيث يكون $DC = GL$، ولتكن $K \ni BO$ بحيث يكون $EB \,//\, GK$.

يكون معنا $BC = KL = KB$، فيكون، إذاً،

$$BE^2 = CB.BD \quad [\text{معادلة } \mathcal{H}_1] \qquad (١)$$

$$PG.PL = EI.EB \quad [\text{معادلة } \mathcal{H}_2] \qquad (٢)$$

ولكنَّ $\frac{LB}{BK} = \frac{LB}{BC} = \frac{HB}{HE} = \frac{HB}{BE} = \frac{HL}{CE}$، فنحصل على $\frac{HB}{BE} = \frac{IE.BE}{EB^2} = \frac{HL}{EC}$؛ فيكون $\frac{IE.EB}{EB^2} = \frac{HL.DC}{EC.DC}$؛ ولكنَّ $DC = GL$ وَ $PG = HL$، فيكون $\frac{IE.EB}{EB^2} = \frac{PG.GL}{EC.DC}$،

فنحصل، وفقاً للعلاقة (٢) على $BE^2 = EC.CD$، كما نحصل، وفقاً للعلاقة (١) على $CB.BD = EC.CD$، فنحصل على $\frac{BD}{DC} = \frac{EC}{CB}$.

ولكنَّ $EC > CB$، فيكون $DB > DC$.

يكون معنا، إذاً، $DC < DB \Leftarrow BC = BD + DC < 2DB$

$BC < 2BD < 2BN \Leftarrow BC < BE + BN$.

يُمكن أن نعمل المثلّث ABC بحيث يكون $BE = AC = BA$، ويكون معنا $BA^2 = CB.BD$. ويكون المثلّثان ABD وَ CBA، إذاً، متشابهين فيكون معنا: $\widehat{ACB} = \widehat{BAD}$ وَ $\widehat{BAC} = \widehat{ADB}$.

ويكون المثلّثان ADC وَ AEC، إذاً، متشابهين، لأنَّ $CA^2 = BE^2 = EC.CD$، فنحصل على $\widehat{AEC} = \widehat{CAD}$.

فنستنتج أنَّ $2\widehat{AEC} = \widehat{ABC}$، $2\widehat{CAD} = \widehat{ABC}$، $3\widehat{CAD} = \widehat{ADB}$، $3\widehat{CAD} = \widehat{BAC}$.

إذا كانت الزاوية $\widehat{BAC}$ مساوية، إذاً، لثلاثة أجزاء، فإنَّ كلَّ زاوية من الزاويتين $\widehat{ABC}$ وَ $\widehat{ACE}$مساوية لجزءين. وهكذا نعمل في الدائرة المعلومة مثلّثاً مشابهاً للمثلّث ABC، فنحصل في النهاية على المسبَّع.

لنتناول ثانية حلّ ابن الهيثم مع استخدام رموز جبريّة.

ليكن معنا قطعة EB ونقطتان N وَ E متناظرتان بالنسبة إلى النقطة B. لنرسم المربَّع $BNSO$؛ وليكن (BO, BC) المَعْلَم (Ox, Oy)، ولنضع $a = BE$.

ولنأخذ القطعين الزائدين: $\mathcal{H}_1 = \{(x, y); xy = a^2\}$، $\mathcal{H}_2 = \left\{(x, y); y = x - \frac{a^2}{x-a}\right\}$.

يتقاطع $\mathcal{H}_1$ وَ $\mathcal{H}_2$ بالضرورة على النقطة $G(x_0, y_0)$ بحيث يكون $0 < x_0$. توجَد، إذاً، قيمة وحيدة $0 < x_0$ بحيث يكون $0 = x_0^3 - ax_0^2 - 2a^2x_0 + a^3$.

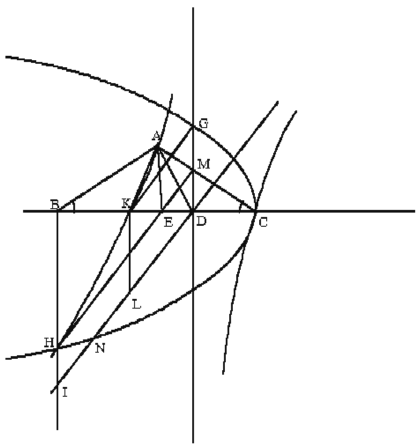
يكون بالفعل، لمعادلة الإحداثيّات الأولى لنقاط التقاطع، ثلاثة جذور، يكون من بينها الجذر x_0 الذي يعطي الحلّ.

نستخرج من $G(x_0, y_0)$ النقاط $D(0, y_0)$، $L(x_0, x_0)$ ، وَ $C(0, x_0)$. نحدِّد النقطة A كنقطة التقاطع بين الدائرتين $C_1(B, a)$ وَ $C_2(B, a)$. تتقاطع هاتان الدائرتان، اللتان لهما نصف القطر a نفسه، إذا كان $2a > BC$ ، وهذا ما يبرهنه ابن الهيثم $[BC< BE+ BN]$.

والمثلّث CBA الذي نحصل عليه هو من النوع $[2, 3, 2]$. ونعمل في الدائرة المعلومة، بواسطة التحاكي، مثلّثاً مشابهاً للمثلّث CBA. ونلاحظ أخيراً أنَّ ابن الهيثم يحصل بالطريقة نفسها على إثلاث الزاوية $\widehat{BAC}$.

٣- الحالة الثالثة $(1, 5, 1)$

التحليل: لنفرض أنّنا وجدنا المثلّث ABC بحيث يكون $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{\pi}{7}$ وَ $\widehat{BAC} = \frac{5\pi}{7}$.



الشكل ٦٦

لنضع $\widehat{ABC}=\widehat{CAD}$ وَ $\widehat{ABC}=\widehat{DAE}$. المثلّثان CAD وَ CBA متشابهان؛ فيكون معنا

$\frac{AC}{CD}=\frac{BC}{CA}$، فنحصل على:

$$AB^2=AC^2=BC.CD \quad (١)$$

المثلّثان ADE وَ ABD متشابهان، أيضاً، ويكون معنا $AD^2=BD.DE$. ولكنّ $CD=AD$، لأنّ $\widehat{CAD}=\widehat{ACD}$، فنحصل على $CD^2=BD.DE$.

ويكون معنا $2\widehat{ACD}=\widehat{ADE}$، لأنّ $\widehat{ACD}=\widehat{ABD}=\widehat{DAE}=\widehat{CAD}$، ويكون $3\widehat{ACB}=\widehat{AEB}$، $5\widehat{ACB}=\widehat{BAC}$ (وفقاً للفرضيّات)، $2\widehat{ACB}=\widehat{EAC}$، $3\widehat{ACB}=\widehat{BAE}$، $\widehat{AEB}=\widehat{BAE}$، فنحصل على $AE=AB$. ويكون معنا، وفقاً للعلاقة (١)،

$$BE^2=BC.CD \quad (٢)$$

لنضع $CD=DK$. ولنخرج KL بحيث يكون $DK\perp KL$، مع $DK=KL$، ولنخرج، من النقطة D، العمودَ DG على BC مع $DK=DG$. ولنصل بين G وَ K وبين D وَ L؛ ولنخرج، من النقطة B، العمود BH على BC مع $BE=BH$. ولنصل بين E و H؛ ولنمدِّد EH على استقامة حتّى M؛ ولنمدِّد DL على استقامة حتّى تلتقي بالخط H على النقطة I. يكون معنا، عندئذ، $\frac{HE}{EB}=\frac{EM}{DE}=\frac{HM}{BD}$ وَ $\frac{HE}{BE}=\frac{GK}{DK}$، فيكون $\frac{HM}{BD}=\frac{GK}{DK}$ و $\frac{HM.DE}{BD.DE}=\frac{GK}{DK}=\frac{GK}{KL}=\frac{GK.KL}{KL^2}$.

ولكنّ $KL^2=CD^2=BD.DE$، فيكون $GK.KL=HM.DE$. ولكنّ $DM=DE$ و$DM=HI$، فيكون $GK.DK=HM.HI$.

القطع الزائد $\mathcal{H}$ الذي يمرُّ بالنقطة K والذي له الخطّان المقارَبان GD وَ DI، يمرُّ، إذاً، بالنقطة H. ولكن، وفقاً للعلاقة (٢) وللفرضيّة $BE = BH$، يمرُّ القطعُ المكافئ $\mathcal{P}$، ذو المحور BC والرأس C والضلع القائم DC، بالنقطة H. يكون، إذاً، $H \in \mathcal{H} \cap \mathcal{P}$.

فإذا كانت القطعة CD معلومة، يُمكن تحديد $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$، كما يُمكن تحديد H، أيضاً، والنقطتين E وَ B.

التركيب: لتكن CK قطعة اختياريّة من خطّ مستقيم، ولنقسم CK في النقطة D إلى قسمين متساويين، ولنخرج من D ومن K العمودين DG وَ KL على CK، بحيث يكون $DK = KL = DG$. ولنصل بين G وَ K وبين D وَ L ولنمدِّد DL على استقامة حتّى I. لنرسم القطع الزائد $\mathcal{H}$ الذي يمرُّ بالنقطة K والذي له الخطَّان المقارَبان GD وَ DI[٧٠]. ولنرسم، أيضاً، القطعَ المكافئ $\mathcal{P}$ ذا المحور CK والرأس C والضلع القائم DC.

يقطع $\mathcal{P}$ الخطَّ DI، لأنَّ كلَّ خطّ، يقطع محورَ $\mathcal{P}$، يقطع $\mathcal{P}$ على نقطتين من جهتي المحور. وإذا تجاوزت نقطة جارية على $\mathcal{P}$، الخطَّ DI، فإنّها تبتعد عن DI ، لأنَّ الخطَّ المماسَّ للقطع $\mathcal{P}$ في نقطة التقاطع يقطع DI. فيبقى $\mathcal{P}$ فوق خطّ التماسّ. فإذا ابتعدت النقطة الجارية على $\mathcal{P}$ من نقطة التقاطع مع DI، فإنّها تبتعد أيضاً عن DI. ولكن كلّما مدَّدنا $\mathcal{H}$، اقترب $\mathcal{H}$ من DI. فنستنتج أنَ $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$ يتقاطعان بالضرورة، فليكن ذلك على النقطة H.

لنخرِج من النقطة H العمود HB على محور $\mathcal{P}$، الذي يلتقي بالخطّ DL في نقطة، ولتكن I هذه النقطة. ولنرسم الخطّ HEM الموازي للخطّ DL. ويكون المثلّثان HBE و EDM، إذاً، مشابهين للمثلّث DKL، ويكون معنا: $BE = HB$ وَ $HI = DM = ED$، فنحصل على $\frac{HM}{BD}=\frac{EM}{DE}=\frac{DL}{DK}=\frac{HE}{BE}$، فيكون $\frac{HM}{BD}=\frac{DL}{DK}$، فنحصل على $\frac{HM.DE}{BD.DE}=\frac{GK}{KL}=\frac{GK.KL}{KL^2}$، فيكون $\frac{GK.KL}{KL^2}=\frac{HM.HI}{BD.DE}$.

---

[٧٠] ستُحَدَّد النقطة I لاحقاً.

ولكنّ $GK.KL = HM.HI$ (معادلة $\mathcal{H}$)، فيكون $KL^2 = BD.DE$، فنحصل على $CD^2 = BD.DE$. ولكنّ $2CD = KC$، فنحصل على $2\,KL^2 = KC.CD$.

تكون النقطة L، إذاً، داخل $\mathcal{P}$[٧١]. فيقطع القطع المكافئ $\mathcal{P}$ الخطّ DI بعد L، فليكن ذلك على النقطة N. فيكون الخطّ HB بعد KL ويكون $DK < BD$.

ولكنّ $DK^2 = CD^2 = BD.DE$، فيكون $DK > DE$، وبالتالي $CD > DE$ و $2CD > EC$. ولكنّ $HB^2 = BC.CD$ [معادلة $\mathcal{P}$] وَ $BE = HB$، فنحصل على $BE^2 = BC.CD$ ويكون معنا $BC.2CD > BC.CE$ وَ $2BE^2 > BC.CE$، فيكون إذاً $BE > CE$ [لدينا، بالفعل، $BE+CE = BC$، فنحصل على $2EB^2 > (BE+CE).CE$، فتؤدِّي الفرضيّة $CE \geq BE$ إلى $(BE+CE).CE \geq 2BE^2$] و $2BE > BC$.

يكون إذاً من الممكن أن نرسم على BC مثلّثاً متساوي الساقين بحيث تكون القطعة BC قاعدته ويكون ضلعاه مساويين للقطعة BE. ليكن ABC هذا المثلّث. لنصل بين A و D وبين A و E. يكون معنا $AC^2 = BC.CD$ ، لأنّ $BE = AC$. ويكون المثلّثان ACD وَ ABC، متشابهين، فنحصل على $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = \widehat{CAD}$. يكون معنا عندئذ $AD = CD$و $AC^2 = BD.DE$، فيكون المثلّثان ADE وَ ABD متشابهين، ويكون $\widehat{ACD} = \widehat{ABD} = \widehat{DAE}$، فيكون $3\widehat{ACB} = \widehat{AEB}$.

ويكون معنا، بما أنّ $BE = AB$، $\widehat{BAE} = \widehat{BEA}$، فيكون $3\widehat{ACB} = \widehat{BAE}$ وَ $2\widehat{ACB} = \widehat{CAE}$ ويكون معنا $5\widehat{ACB} = \widehat{BAC}$.

يكون المثلّث ABC، إذاً، من النوع $[1, 5, 1]$. ونعمل في الدائرة المعلومة، بواسطة التحاكي، مثلّثاً مشابهاً للمثلّث ABC، فنحصل على المسبَّع. لنتناول، إذاً، ثانية حلّ ابن

---

[٧١] يمكننا برهنة هذا القول بسهولة. لتكن L' على $\mathcal{P}$ ، وليكن مسقطها K، يكون معنا $KL'^2 = KC.CD$. ولكنّ $2KL^2 = KC.CD$ ، فنحصل على $2KL^2 = KL'^2$، فيكون $KL < KL'$ ، وتكون L داخل $\mathcal{P}$.

الهيثم، بلغة دالّيّة تحليلية، مختلفة بالطبع عن لغته. ليكن (BD, DG) المَعْلَم (Ox, Oy)، ولنضع $a = CD$. ولنأخذ القطعين المخروطيّين:

$$\mathcal{P} = \left\{(x, y); y^2 = a(x+a)\right\} \text{ ، } \mathcal{H} = \left\{(x, y); y = x - \frac{a^2}{x}\right\} .$$

يتقاطع $\mathcal{P}$ وَ $\mathcal{H}$ بالضرورة على النقطة $H(x_1, y_1)$ بحيث يكون $0 < x_1$ وَ $0 < y_1$.

فلتكن لدينا الدالّتان:

$$f_1 : [0, \infty[\;\to\; \mathbf{R} \qquad \text{ ، } \qquad f_2 :]0, \infty[\;\to\; \mathbf{R}$$

$$x \;\mapsto\; f_1(x) = \sqrt{a(x+a)} \qquad\qquad x \;\mapsto\; f_2(x) = x - \frac{a^2}{x}$$

ولتكن الدالة $h:]0, \infty[\longrightarrow \mathbf{R}$

$$x \;\mapsto\; h(x) = f_2(x) - f_1(x)$$

إنَّ الدالة h وحيدة التغيُّر وتزايديّة. وذلك، أنَّ لدينا في الواقع

$$h(x) = x - \sqrt{a(x+a)} - \frac{a^2}{x} \text{ ،}$$

وهذا ما يُمكّننا من كتابة $h(x)$ على شكل فرق بين دالّتين:

$$x - \sqrt{a(x+a)} = x - f_1(x) \quad \text{وَ} \quad x - \left(x - \frac{a^2}{x}\right) = x - f_2(x) \text{ ،}$$

حيث تكون الدالّة الأولى تزايديّة، في حين إنَّ الثانية تناقصيّة. وتمثّــل هاتان الدالّتان، بالترتيب، وضع وَ $\mathcal{H}$ بالنسبة إلى الخطّ المقارَب $y - x$. يدرس ابن الهيثم، بالتحديد، هذين الوضعين. يكون معنا: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} h(x) = -\infty$ وَ $\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = +\infty$.

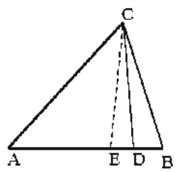
توجَد، إذاً، قيمة وحيدة $x_1 \in]0, +\infty[$، بحيث يكون $h(x_1) - 0$، مع $0 < y_1$. والجذر x_1 هو أحد الجذرين الموجبين للمعادلة الخاصّة بالإحداثيّات الأولى لنقاط التقاطع؛ وتكتَب هذه المعادلة بعد الاختزال بـِ $(x + a)$: $x^3 - 2ax^2 - a^2x + a^3 - 0$.

ثمَّ يرسم ابن الهيثم مثلّثاً من النوع $[1, 5, 1]$، ويرسم في الدائرة المعلومة ، بواسطة التحاكي، مثلّثاً مشابهاً للمثلّث الأوّل، فيحصل في النهاية على المسبَّع.

٤- الحالة $(1, 2, 4)$

التحليل: يُبيِّن ابن الهيثم في أوّل الأمر أنّه يُمكن إرجاع هذه الحالة إلى الحالات المدروسة سابقاً. لنفرض، بالفعل، أنّنا وجدنا المثلّث ABC (انظر الشكل ٦٧) بحيث تكون زواياه من النوع $[1, 2, 4]$. لنضع $\widehat{BCD} = \frac{\pi}{7}$، فيكون معنا $\widehat{ACD} = \frac{3\pi}{7}$، فنحصل على $\widehat{ADC} = \widehat{BCD} + \widehat{ABC} = \frac{3\pi}{7}$.

يكون المثلّث ACD ، إذاً، من النوع $[1 , 3 , 3]$. نأخذ، إذاً، المثلّث ACD ونزيد الزاوية $\widehat{ACD}$ بمقدار $\widehat{CAD} = \widehat{DCB}$، فنحصل على المثلّث ABC من النوع $[1, 2, 4]$.



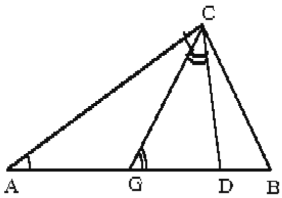
الشكل ٦٧

وإذا وضعنا، أيضاً، $\frac{2\pi}{7}=\widehat{BCE}$، يكون معنا $\frac{3\pi}{7}=\widehat{CEB}$ ، لأنّ $\frac{2\pi}{7}=\widehat{EBC}$. فيكون المثلّث EBC من النوع [2, 3 , 2].

لنأخذ المثلّث BEC مع $\widehat{ECB}=\widehat{ECA}$؛ يكون معنا $\frac{4\pi}{7}=\widehat{ACB}$ وَ $\frac{\pi}{7}=\widehat{CAB}$. فيكون المثلّث ABC من النوع [1, 2 , 4].

ولنضع، أيضاً (انظر الشكل ٦٨)، $\frac{\pi}{7}=\widehat{CAG}=\widehat{ACG}$، فيكون معنا $\frac{3\pi}{7}=\widehat{GCB}$ وَ

$\frac{5\pi}{7}=\widehat{AGC}$ لأنّ $\widehat{GCB}+\widehat{GBC}-\widehat{AGC}$.



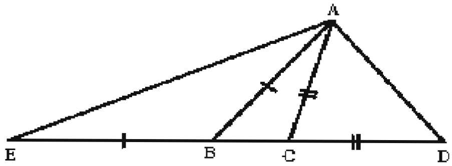
الشكل ٦٨

فيكون المثلّث AGC من النوع [1,5 ,1]. لنأخذ المثلّث AGC مع $\widehat{CGD}-\widehat{GCD}$. ولكنّ $\frac{2\pi}{7}=\widehat{CGD}$ لأنّ $\widehat{GAC}+\widehat{ACG}-\widehat{CGD}$، فيكون $\frac{3\pi}{7}=\widehat{CDG}=\widehat{ACD}$. فإذا أخذنا $\frac{\pi}{7}=\widehat{CAB}=\widehat{DCB}$، يكون عندئذ $\frac{4\pi}{7}=\widehat{ACB}$ وَ $\frac{\pi}{7}=\widehat{CAB}$ وَ $\frac{2\pi}{7}=\widehat{ABC}$.

وهكذا يُمكن أن نرجع الحالة [1, 2 , 4] إلى الحالات السابقة.

ولكنّ بالإمكان أن نعمل مثلّثاً من النوع [1, 2 , 4] بدون أن نرجِعه إلى الحالات السابقة. يبيِّن التحليل، عندئذ، أنّنا نرجع إلى مقدّمة أرشميدس.

ليكن معنا، بالفعل، المثلّث ABC (انظر الشكل ٦٩)؛ ولنمدّد BC من الجهتين حتّى D وَ حتّى E على التوالي بحيث يكون $CD = CA$ وَ $BE = BA$.



الشكل ٦٩

يكون معنا، عندئذ $\widehat{ADC} = \widehat{CAD} = \widehat{ABC} = \frac{2\pi}{7}$ ، لأنّ $\widehat{ACB} = \frac{4\pi}{7}$ ، فيكون $\widehat{BAD} = \frac{3\pi}{7}$

وَ $\widehat{ABD} = \widehat{ADB}$ ، فنحصل على $AD = AB$ وَ $AD = BE$. ولكنّ $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{7}$، فيكون $\widehat{AEB} = \frac{\pi}{7}$، فنحصل على $\widehat{AEC} = \widehat{BAC}$.

يكون المثلّثان ABC وَ AEC، إذاً، متشابهين. يكون معنا

(١) $$CD^2 = CA^2 = EC.CB \,.$$

ولكنّ $\widehat{ACB} = \frac{4\pi}{7}$ ، فيكون $\widehat{CAD} = \widehat{ABC} = \frac{2\pi}{7}$. ويكون المثلّثان ADC وَ ABD متشابهين، أيضاً، فيكون معنا:

(٢) $$BE^2 = DA^2 = BD.DC \,.$$

فتكون القطعة ED إذا مقسومة في B و C ، بحيث يكون معنا (١) وَ (٢)؛ وهذا ما يتوافق مع مقدّمة أرشميدس.

يُذكّر ابن الهيثم، عندئذ، أنّ القوهي قد قسم القطعة وفقاً لهذه النسبة لكي يعمل المثلّث من النوع [1, 2, 4]، ثم المسبّع المتساوي الأضلاع. وهو يقترح تطبيق طريقة

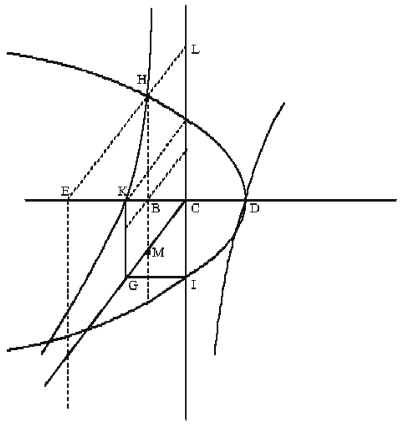
أخرى مختلفة عن طريقة القوهي. ولكن، قبل أن نتساءل بخصوص هذا الاختلاف، لنتابع تحليل ابن الهيثم.

لنضع، لأجل قسمة القطعة DE في B وَ C وفقاً لنسبة معلومة، $CD = CK$، وليكن KG عموديّاً على CD مع $KC = KG$، وليكن BH عموديّاً على BC مع $BE = BH$، وليكن CL عموديّاً على BC (انظر الشكل ٧٠). لنخرِج GI على موازاة KC مع $GK = GI$، ولنصل بين G وَ C وبين I وَ K. يقطع الخطُّ HB الخطَّ GC على النقطة M.

لنرسم القطعَ الزائد $\mathcal{P}$ ذا الرأس D والضلع القائم DC. ويكون معنا $HB^2 = BD.DC$، لأنَّ $EB^2 = HE^2$، فتكون النقطة H على القطع $\mathcal{P}$. لنرسم القطع الزائد $\mathcal{H}$ الذي يمرُّ بالنقطة K والذي له الخطَّان المقارَبان CL وَ CG. يكون معنا $BM = BC$، لأنَّ $KC = KG$، فنحصل على $EC = HM$.

تعطي العلاقة $CD^2 = EC.CB$، إذاً، $KG.KC = MH.CB$. ولكنَّ $\frac{HL}{CB} = \frac{MC}{CB} = \frac{GC}{KC}$، فنحصل على $\frac{GC.KG}{KC.KG} = \frac{HL.MH}{CB.MH}$، فيكون $HL.MH = GC.KG$، فنحصل على $H \in \mathcal{H}$. يكون معنا أخيراً $H \in \mathcal{P} \cap \mathcal{H}$.

إذا كانت النقطتان C وَ D، إذاً، معلومتين، نحصل على $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$، وبالتالي على H. كما نحصل، أيضاً، على B، مسقط H، ونحصل أخيراً على E لأنَّ $BE = BH$.



الشكل ٧٠

التركيب: لتكن KD قطعة اختياريّة من خطّ مستقيم، ولتكن النقطة C وسطها؛ ولنخرج من K العمود KG على KD، بحيث يكون $KC = KG$، ولنخرج GI على موازاة KC، بحيث يكون $KC = GI$، وليكن الخطّ CL عموديّاً على DK. ولنصل بين G وَ C وبين I وَ K. لنرسم القطع الزائد $\mathcal{H}$ الذي يمرُّ بالنقطة K والذي له الخطّان المقارَبان GC وَ CL. ولنرسم، أيضاً، القطعَ المكافئ $\mathcal{P}$ ذا المحور DK والرأس D والضلع القائم DC.

يتقاطع $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{P}$ للأسباب نفسها المذكورة سابقاً على النقطة H.

لنخرِج من النقطة H العمود HB، على DK، الخطّ HE الموازي للخطّ CG. ولنمدِّد، على استقامة ، HB حتّى M وَ HE حتّى L.

يكون معنا $HB = BE$ وَ $BC = BM$؛ فيكون

$CE = HM$ وَ $MC = HL$ ، $EC.CM = HM.MC$ ،

ولكنَّ $IK.IC = HM.MC$ [لأنَّ $KG.GC = HM.MC$ ، معادلة $\mathcal{H}$].

ولكنّ $\frac{IK.KC}{KC^2}=\frac{IK}{KC}=\frac{GC}{CK}=\frac{MC}{CB}$، فيكون $\frac{EC.CM}{EC.CB}=\frac{IK.KC}{KC^2}$، ولكنّ $EC.CM = IK.KC$، فنحصل على $CD^2 = KC^2 = EC.CB$. ولكنّ $HB^2 = BD.DC$ [معادلة $\mathcal{P}$]، فنحصل على $BE^2 = BD.DC$.

وهكذا نكون قد قسمنا ED إلى ثلاثة أقسام بحيث يكون

(٣) $CD^2 = EC.CB$ وَ (٤) $BE^2 = BD.DC$.

هذان الشرطان هما شرطا قسمة أرشميدس (E, B, C, D) للقطعة ED لأجل عمل المثلث.

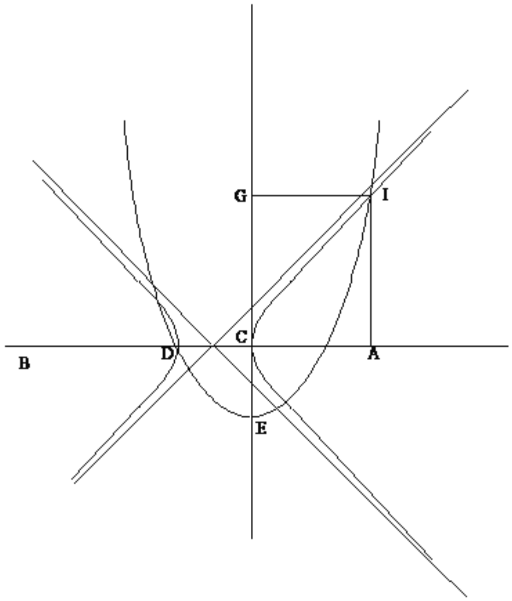
يكون معنا، وفقاً للعلاقة (٣)، $CD > CB$ [لأنّ $CE > BC$]، فيكون بالتالي $EC > CD$. ويكون معنا، وفقاً للعلاقة (٤)، $BE > CD$ [لأنّ $BD > CD$]، فيكون بالتالي $BD > BE$. فيكون مجموع أيّ قطعتين من القطع الثلاث BE، CD و BC أكبر من القطعة الثالثة [$BC < EB+CD$ لأنّ $BC < CD$]. فيمكن أن نرسم استناداً إلى هذه القطع، المثلّث ABC. ونقوم بهذا الرسم، كما فعلنا سابقاً.

ونلاحظ أنّنا إذا وضعنا $(CE, EI)=(Ox, Oy)$ وَ $a = CD$، نجد، هنا أيضاً، القطعين المخروطيّين اللذين وجدناهما في الحالة السابقة، أي:

$$\mathcal{P} = \{(x, y); y^2 = a(x+a)\} ، \mathcal{H} = \left\{(x, y); y = x - \frac{a^2}{x}\right\}.$$

نبيِّن، كما فعلنا في السابق، أنّ $\mathcal{P}$ وَ $\mathcal{H}$ يتقاطعان بالضرورة على نقطة $H(x_0, y_0)$ بحيث يكون $x_0 \in]0, a[$ وتكون معنا المعادلة نفسها: $0 = x^3 - 2ax^2 - a^2x + a^3$.

يبقى علينا، لكي نحدِّد موضع الاختلاف بين هذا المنهج الأخير لابن الهيثم ومنهج القوهي، أن نتناول ثانية بشكل سريع نصَّ هذا الأخير[٧٢]. يفترض القوهي في تحليله أنَّ لدينا قطعة AB (انظر الشكل ٧١) مقسومة في C وَ D بحيث يكون $DB^2 = AD.AC$ و $AC^2 = CB.CD$.



الشكل ٧١

ليكن الخطّ ECG عموديّاً على AB، مع $DC = EC$ وَ $CG = DB$.

لنخرج GI على موازاة AB، وَ AI على موازاة CG. يكون معنا: $IG^2 = AC^2 = CB.CD$، فنحصل على $CE.CG = IG^2$.

تكون النقطة I، إذاً، على القطع المكافئ $\mathcal{P}$ ذي المحور GE والرأس E والضلع القائم EC. ويكون معنا من جهة أخرى $AD.AC = BD^2 = CG^2 = AI^2$.

---

[٧٢] انظر: القوهي، "رسالة القوهي في استخراج ضلع المسبّع".

تكون النقطة I، إذاً، على القطع الزائد $\mathcal{H}$ ذي المحور AC والرأس C والضلع القائم CD. فإذا وضعنا، إذاً، $a = CE = CD$، وَ $(Ox, Oy) = (CA, CG)$، يكون معنا:

$$\mathcal{P} = \{(x, y); ay = x^2 - a^2\}، \mathcal{H} = \{(x, y); y^2 = ax + x^2\}.$$

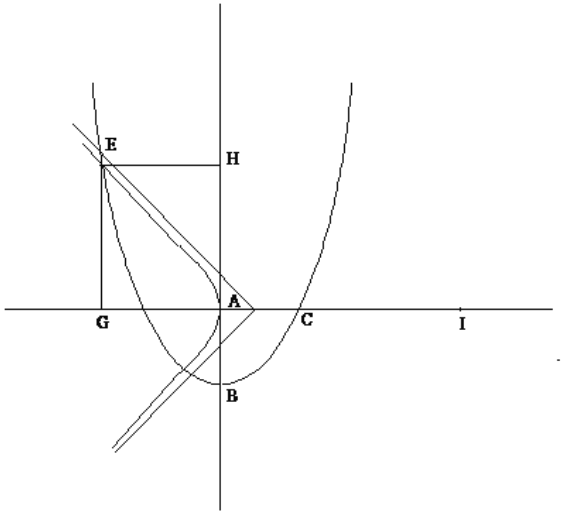
ويكون $\mathcal{H}$ قطعاً زائداً متعامد الخطّين المقارَبين، وتكون النقطة D رأسه الثاني.

وتكون الإحداثيّة الأولى لنقطة التقاطع المدروسة، هنا، أكبر جذر من الجذرين الموجبين للمعادلة $0 = x^3 - 2ax^2 - a^2x + a^3$.

وهكذا يكمن الاختلاف بين منهجَي ابن الهيثم والقوهي في اختيار المنحنيين. ولكنَّ هذا الاختلاف يؤدِّي إلى اختلاف آخر أكثر أهمِّية، إذ إنَّ ابن الهيثم يختار في هذه الحالة القطعين نفسهما اللذين استخدمهما في الحالة [1, 5, 1]، فكانت المعادلة الحاصلة هي نفسها أيضاً. فهو لم يكن يريد حلَّ المسألة فحسب، بل كان يريد الوصول إلى ذلك باستخدام أقلّ عدد من المنحنيات الضروريّة لحلّ مسألة المسبَّع في كلّ الحالات الممكنة. وهكذا اختار منهجاً آخر مختلفاً عن منهج القوهي الذي لم يكن يبحث عن حلٍّ مماثل في شموليته لحلّه.

يتبع تركيبُ القوهي تحليله مباشرة:

ليكن $AC = AB$ مع $AB \perp AC$ (انظر الشكل ٧٢). لنرسم القطع المكافئ $\mathcal{P}$ ذي المحور AB والرأس B والضلع القائم AB. ولنرسم القطع الزائد $\mathcal{H}$ ذي المحور AC والرأس A والضلع القائم $AC = AB$. يتقاطع $\mathcal{P}$ وَ $\mathcal{H}$ على النقطة E.



الشكل ٧٢

نخرج من النقطة E الخطّ EH الموازي للخطّ AC، والخطّ EG الموازي للخطّ AH. لنأخذ I على AC بحيث يكون $AH = IC$. يكون معنا: $GA.GC = EG^2$ [معادلة $\mathcal{H}$]، فنحصل على $GA.GC = IG^2$.

ويكون معنا، من جهة أخرى، $AB.BH = AG^2$ [معادلة $\mathcal{P}$]، فنحصل على $AC.AI = AG^2$، ونحصل بذلك على النتيجة.

أمّا باقي عمل المسبّع، فإننا نقوم به كالعادة.

هذا هو إذاً الحلّ الذي يُقدّمه ابن الهيثم لمسألة المسبّع. وهكذا يُعدّد كلّ الحالات الممكنة، أي كل المثلّثات الممكنة، ثمّ يدرسها كلّها. وترجع دراسته، بالرغم من الاختلاف الظاهر، إلى حلّ ثلاث معادلات من الدرجة الثالثة. لنلخّص هذه الحالات المختلفة لكي يكون لدينا نظرة إجمالية إليها.

الحالة الأولى:

$$\mathcal{H}_1 = \left\{(x, y); xy = a^2\right\}، \quad \mathcal{H}_2 = \left\{(x, y); y = x - \frac{a^2}{x-a}\right\}؛$$

حيث نحصل على $x^3 + a^3 = 2a^2 x + a^2 x$.

يكون لهذه المعادلة ثلاثة جذور حقيقيّة، يكون منها اثنان موجبين: $x_0 \in]0, a[$، وَ $x_1 > 0$. ويأخذ ابن الهيثم الجذر x_0.

الحالة الثانية:

$$\mathcal{H}_1 = \left\{(x, y); xy = a^2\right\}، \quad \mathcal{H}_2 = \left\{(x, y); y = x - \frac{a^2}{x-a}\right\}،$$

فنحصل على $x^3 + a.x^2 = 2a^2 x + a^3$.

يكون لهذه المعادلة ثلاثة جذور حقيقيّة، يكون منها جذر موجِب x_0؛ وهو الجذر الذي يأخذه ابن الهيثم.

الحالتان الثالثة والرابعة:

$$\mathcal{P} = \left\{(x, y); ay = x^2 - a^2\right\}، \quad \mathcal{H} = \left\{(x, y); y^2 = ax + x^2\right\}$$

حيث نحصل على $x^3 + a^3 = 2ax^2 + a^2 x$.

يكون لهذه المعادلة ثلاثة جذور حقيقيّة، يكون منها اثنان موجبين: $x_0 \in]0, a[$، وَ $x_1 > a$. ويأخذ ابن الهيثم الجذر x_1 في الحالة الثالثة ويأخذ الجذر x_0 في الحالة الرابعة.

يُبيِّن هذا التلخيص المُختصَر، أخيراً، أنَّ مَنهَج ابن الهيثم لا يُشكـِّل تجاوزاً، بالمعنى الذي وضَّحناه في البداية، فحسب، لكلّ الحلول التي قدَّمها أسلافه، بل أيضاً للحلول التي قدَّمها بنفسه في مؤلّفه الأوّل. وهكذا يظهر تاريخ عمل المسبَّع في الرياضيّات العربية بمظهر جديد بفضل هذه الطريقة المنهجيَّة لابن الهيثم، وأيضاً بفضل الدراسات المختلفة التي قام بها في المنحنيات؛ وهذه الدراسات تستحقُّ أن تؤخَذ بعين الاعتبار، خاصَّة لأنّنا نلقى تأثيرها فيما بعد عند الجبريّين.

ولم يخفَ على ابن الهيثم أنَّ مسألة عمل المسبَّع المتساوي الأضلاع تعادل، في الحالتين الأولَيَيْن مسألة تثليث الزاوية. وهكذا يظهر لنا، بوضوح، هذا التعادلُ بين المسألتين، في هذا المؤلّف لابن الهيثم. ونحن نعلم، منذ ظهور أعمال فيات (*Viète*)، أنّه يُمكن إرجاع كل المعدلات الجبرية من الدرجة الثالثة في الحالة غير القابلة للاختزال، إلى المسألة العامّة لتثليث الزاوية.

وهكذا شهدنا البداية ثمَّ الانتشار والتحوّل لهذا البحث في المسبَّع المتساوي الأضلاع، في الهندسة اليونانيّة وفي الهندسة العربيّة. وهذا هو تاريخ فصل في البحث افتتحه أبو الجود – الذي كان أوّل من حاول إيجاد حلّ لهذه المسألة – وختمه ابن الهيثم بعد ذلك بنصف قرن. وهذا لا يعني مطلقاً أنَّ البحث قد انتهى فجأة، وإلى الأبد، بعد ابن الهيثم. فنحن نعلم أنَّ الأمر لم يكن كذلك، كما يشهد على ذلك مثال ابن يونس. نريد ببساطة أن نؤكـِّـد على أنَّ الإسهامات اللاحقة – في العربيّة وفي اللاتينيّة على السواء – لم تــُضِف شيئاً ذا أهمّيّة. ولم يجرِ البحث من جديد في هذا الميدان إلا في وقت متأخِّر، مع نظريَّة الأعداد الجبريّة ومبرهَنة فنتزل (*Wantzel*). ويقدّم لنا هذا الفصل في تاريخ المسبَّع المتساوي الأضلاع مثالاً بَيِّناً عن البحث الريّاضيّ الذي يستوفي موضوعاً مُعيَّناً قبل أن يعود إليه ثانية في مجال مختلف عن المجال الذي ظهر فيه. ولم يكن لابن يونس ولا لِفيات (*Viète*) أيُّ تأثير في هذه المسألة.

لكن يبقى لدينا السؤالُ المُثار في البداية: لماذا نجحت مسألة عمل المسبَّع في تعبئة هذا العدد من الرياضيين البارزين في المدينة العلمية في ذلك العصر؟ لماذا حفزت هذه المسألة بعضهم – مثل أبي الجود وابن الهيثم – على إعادة تحرير ما كتبوه حول هذه المسألة مرّة أو أكثر من مرَّة؟ لقد أشرنا إلى عامل الوسط العلمي، وإلى العامل النفسيّ ذاتِه...، لكي نــُعلّلَ هذا النشاطَ القويَّ إلى هذه الدرجة؛ ولا شكَّ أنَّ لهذين العاملَيْن دوراً في ذلك. ولكنَّ المهمَّ في الأمر هو أنَّ أسباب هذا النشاط الكبير تكمن في الهندسة نفسها، وأنَّ هذه الأسباب هي نفسها، كما يبدو، التي تسمح لنا بالكلام على فصل، أي عن ميدان وعنصر موَحــِّـد وأسلوب في آن واحد.

لنرجع إلى القرن العاشر، فنتحقّق من أنَّ المسبَّع لم يكن سوى عنصر في مجموعة كانت في توسُّع مستمرّ، وهي مجموعة مسائل المجسَّمات. كانت تتضمَن هذه المجموعة المسائل الموروثة – ومنها مسألة المسبَّع – ومسائل أخرى جديدة. ولقد وصلت المسائل الموروثة إلى الريّاضيّين، بخلاف مسألة المسبَّع، مُرفقة بحلول لها؛ ولقد اهتمَّ الرياضيّون بها كلّها لسببين: لارتباطاتها، من جهة، بنظريّة القطوع المخروطيّة، ولخضوعها من جهة أخرى لصيغة مزدوجة (هندسيّة جبريّة) لم تكن موجودة قطُّ في الريّاضيّات اليونانيّة.

لقد وجد الريّاضيّون، المطّلعون على نظريَّة القطوع المخروطيَّة، في مسائل المجسَّمات حقلاً حقيقيّاً لممارسة نشاطهم، حيث تسمح الأدوات الواردة في "كتاب المخروطات" لأبلونيوس بالعمل بشكل مُجْدٍ. كانت هناك، بالتأكيد، ميادينُ أخرى للقيام بمثل هذه التطبيقات مثل المرايا المحرقة[٧٣]؛ ولكن، إذا قصرنا تـفَحُّصنا على مسألة المسبَّع فقط، يُمكن أن نتحقّق من أنَّ المؤلّفين طبَّقوا ما لا يقلّ عن ١٦ قضيَّة من "المخروطات"، ورسموا ما لا يقلّ عن سبعة رسوم لقطوع مكافئة وزائدة، وفقاً لأوضاع المحاور والخطوط المقارِبة.

كلّ شيء يدلُّ على أنَّ الاستخدام المكرَّر للقطوع المخروطية والدراسات العديدة لنقاط التقاطع أدَّت في آخر الأمر إلى فرض مفهوم جديد لشرعيَّة العمل الهندسيّ. فقد أصبح كلُّ عمل هندسيّ، بعد ذلك، شرعيّاً إذا حصل بواسطة المسطرة والبركار، أو إذا حصل بواسطة تقاطع قطعين مخروطيّين، في حين أنَّ العمل الهندسيّ بواسطة الآلة[٧٤] أو بواسطة المنحنيات المتسامية أصبح مرفوضاً. هذا المبدأ قاسرٌ، والاستثناءات النادرة هي

---

[٧٣] انظر:
Les Catoptriciens grecs. I: Les miroirs ardents, Textes établis, traduits et commentés par R. Rashed, Collection des Universités de France (Paris, 2000).

[٧٤] لهذا السبب، كما يبدو، لا يوجد إلا القليل من الرسوم بالآلة. ولقد حفِظ أحدها، وهي عائدة إلى مؤلّف مجهول، في ترجمة لاتينية لِ جيرارد دي كريمون(Gérard de Crémone). وقد يكون على قدر كبير من الأهمّيّة أن نتمكّن من تأريخ النصّ العربي الأصليّ الذي استُخدِم لهذه الترجمة. حقّق هذا النص مارشال كلاغيت (Marshall Clagett)، ضمن:
Archimedes in the Middle Ages, vol. V: *Quasi-Archimedean Geometry in the Thirteenth Century* (Philadelphia, 1984), p. 596-599

هنا لتؤكـــد هذه القاعدة. ولقد طغت هذه القاعدة على الريّاضيّات العربيّة، ويُمكن أن نتساءل حول دور الجبر في إعدادها وفي تعميم متطلّباتها. ولقد وصلت هذه القاعدة الواضحة، على كلّ حال، إلى الجبريّين الذين تبنّوها.

وكان الجبريّون قد بدأوا منذ نهاية القرن التاسع الميلاديّ بصياغة المسائل الهندسيّة بلغة الجبر (ثابت بن قرّة، الماهاني،...). ثمّ ظهرت فكرة في منتصف القرن العاشر: حلّ معادلات الدرجة الثالثة بواسطة تقاطع قطعين مخروطيَّيْن (الخازن مثلاً). وهكذا تمَّ، بخصوص مسائل المجسَّمات، إعداد مفهوم الصيغة المزدوجة الجبرية الهندسية؛ وكان أبو الجود، وفقاً لقول الخيّام[٧٥]، أوّل من قام بهذه الصيغة المزدوجة، بطريقة منهجيَّة. ويُخبرنا الخيَام أيضاً أنَّ ابن عراق كان أوّل من صاغ مسألة المسبَّع بمعادلة جبريّة. ولم يكن هذا الاهتمامُ المزدوج لأبي الجود وليدَ الصدفة الخالصة.

نقول باختصار إنَّ الجبريّين كانوا يُطالبون الهندسيّين بتأسيس فصل في الأعمال الهندسيّة بواسطة القطوع المخروطيّة، كما كانوا يُشجِّعونهم على القيام بهذا البحث. ويرد فصل المسبَّع كفقرة، من هذا الفصل الجديد، ساعدتها الظروفُ على البروز. وهكذا نفهم كيف أثارت هذه الفقرة هذا الاهتمامَ القويَّ إلى هذه الدرجة العالية.

٢ – قسمة الخطّ

توجَد قسمة أرشميدس لقطعة من خطّ مستقيم بين أشهر الأعمال الهندسيّة التي نلقاها في العصور القديمة والعصور القديمة المتأخِّرة. وتاريخ هذه المسألة معروف من عصر أرشميدس حتّى عصر أوطوقيوس[٧٦]. سنذكِّر، فيما يلي، بأهمّ عناصره لكي نوضّح مساهمة ابن الهيثم.

---

[٧٥] انظر: ر. راشد و ب. وهاب زاده، رياضيّات عمر الخيّام.

[٧٦] يمكن الاطّلاع على:

Oskar Becker, Das mathematische Denken der Antike (Göttingen, 1966)، ص. ٨٩-٩٠؛

Th. Heath, The Works of Archimedes (Cambridge, 1897; Dover Reprint, 1953)، ص. ٦٥-٧٩؛

E.J. Dijksterhuis, Archimedes, trans. by C. Dickshoorn with a new bibliographic essay by Wilbur Knorr (Princeton, 1987)، ص. ١٤٣-٢٠٥.

نجد في البداية القولَ التالي لأرشميدس ضمن القضيّة الرابعة من المقالة الثانية لكتاب "الكرة والأسطوانة":

"يجب، إذاً، أن نقطع قطعة EG من خطّ مستقيم على النقطة Y، بحيث تكون نسبة YG إلى القطعة المعلومة GJ مثل مربّع CE المعلوم إلى مربّع EY"[٧٧].



الشكل ٧٣

وربّما يكون أرشميدس قد تابع، في النصّ اليونانيّ، دراسة هذه المسألة، التي درسها في هذه القضيّة الرابعة من المقالة الثانية، فوضعَ الشرطينِ الخاصّين بها، وهما:

$B\Delta = 2BZ$ وَ $ZB > Z\Theta$ ؛ وهذا ما يُرجِع المسألة إلى الصيغة التالية:

إذا كانت القطعتان $B\Delta$ وَ BZ، من خطٍّ مستقيم، معلومتين، على أن يكون طولُ $B\Delta$ ضعفيْ طول BZ، وإذا كانت Θ نقطة على BZ، إقطع $B\Delta$ على النقطة X ، بحيث تكون نسبة مربّع $B\Delta$ إلى مربّع $X\Delta$ مثل نسبة XZ إلى $Z\Theta$؛ وكلُّ مسألة من هذه المسائل ستدرس في النهاية (ε'πι τε'λει)."[٧٨]

إنّ تحديد هذه القسمة غير وارد في الترجمة العربيّة، وغير وارد، على الأرجح، في كل التقليد المخطوطيّ الخاصّ بنصّ أرشميدس الوارد بالعربيّة. نحن نجد فقط:

"فينبغي أن نقسم خط زد المعلوم بقسمين على نقطة ح حتى تكون نسبة حز إلى زط المعلوم كنسبة مربّع بد إلى مربّع دح ، ونظام ما ذكرنا وتأليفه وتركيبه على ما أصف".

هذا هو النصّ الذي كان بإمكان ابن الهيثم أن يطّلع عليه. وكان أيضاً على اطلاع على شرح أوطوقيوس لكتاب "الكرة والأسطوانة"، الذي كان أيضاً موجوداً بالعربية. يكتب أوطوقيوس في هذا الكتاب:

"...أنّ أرشميدس وعد بيان ذلك في كتابه هذا، ولم يوجَد في شيء من النسخ ما وعده"[٧٩]

---

[٧٧] انظر: *Archimède, Commentaires d'Eutocius et fragments*, Texte établi et traduit par Charles Mugler, *Collection des Universités de France (Paris, 1972)*، ص. ١١٣.

[٧٨] انظر المرجع السابق، ص. ١١٣، س. ١٠-١٤، الترجمة المحوّرة.

[٧٩] انظر المرجع السابق، ص. ٨٨.

لا يوجَد هذا الوعد، الذي لم يفِ به أرشميدس، إلا في النصّ اليونانيّ، وهو غير موجود في النصّ العربيّ. ليس من المهمّ، هنا، أن تكون نسبة الجملة اليونانية إلى أرشميدس صحيحة أو مغلوطة؛ المهمُّ هو أنَّ البرهان غير موجود؛ وهذه الواقعة مؤكَّدة قبل أوطوقيوس بزمن طويل. وذلك أنَّ ديوقليس (*Dioclès*) الذي خلف أرشميدس بجيل أو جيلين تقريباً، يُذكِّر بذلك بشكل واضح[٨٠]، كما يبدو أنَّ ديونيصودورس (*Dionysodore*) الذي قدَّم البرهان، يدعم قول أوطوقيوس. فهذا الأخير يعطي برهاناً بواسطة قطع مخروطيّ مكافئ وقطع زائد.

كان ابن الهيثم، إذاً، مطّلعاً على نصّ أرشميدس، في نسخته العربيّة، كما كان مطّلعاً على شرح أوطوقيوس. وكان يعلم أنَّ أرشميدس لم يُثبِت عمله الهندسيّ وأنَّ هذا الإثبات لا يتمُّ إلا بواسطة القطوع المخروطيّة. وكان يعتبر أنَّ غياب البرهان لم يكن، قطعاً، نتيجة إهمال من قِبَل أرشميدس بل خياراً مقصوداً للفصل بين المواضيع، لتجنّب استخدام القطوع المخروطيّة. نجد هنا مناقشة علميّة ذات أسلوب فريد؛ نتعرَّف فيها على مفهوم ابن الهيثم للأعمال الهندسية بواسطة القطوع المخروطيّة، وهذا ما يُشكِّل فصلاً نظريّاً خاصّاً داخل الهندسة.

يوجِّه هذا المفهوم الدراسة التي كرَّسها ابن الهيثم لخطّ أرشميدس. وهذا المفهوم هو الذي يميِّز، على كلّ حال، حلَّ ابن الهيثم من غيره من الحلول؛ والقارئ الذي لا علم له بهذا المفهوم قد ينسب مباشرة هذا الحلَّ إلى حلّ أوطوقيوس، فيكون ذلك غير صحيح. ولنذكِّر، باختصار، بالسياق التاريخيّ، لكي نُموضِع حلَّ ابن الهيثم تاريخيّاً. اختار أسلاف ابن الهيثم، بدءاً من نهاية القرن التاسع، حلاً جبريّاً لهذه المسألة. وهذا ما فعله الماهاني والخازن وأبو نصر بن عراق. ولنُشِر الآن إلى شهادة الخيّام الذي يكتب:

"وأمّا المتأخِّرون فقد عنَّ للماهاني منهم تحليلُ المقدِّمة التي استعملها أرشميدس مسلّمة في الشكل الرابع من المقالة الثانية من كتابه في "الكرة والأسطوانة" بالجبر فتأدَّى إلى كعاب وأموال

[٨٠] انظر: ر. راشد، *Les Catoptriciens grecs. I: Les miroirs ardents*، ص. ١٢١، س. ٢٠-٢١.

وأعداد متعادلة، فلم يتّفق له حلّها بعد أن فكــّر فيها مليّاً. فجزم القضاءَ بأنّه ممتنعٌ، حتّى نبغ أبو جعفر الخازن وحلّها بالقطوع المخروطيّة"[٨١] .

ويعيد الخيّام هذا الكلام في نصٍّ آخر[٨٢].

ولقد صيغت مسألة قسمة خطّ أرشميدس، التي أعاد الريّاضيّون البحث فيها بدءاً من نهاية القرن التاسع، على شكل معادلة من الدرجة الثالثة، ثمّ حُلت هذه الأخيرة بواسطة تقاطع قطعين مخروطيّين. كان التقدُّمُ الجاري في ميدان الجبر متزامناً مع أعمال ريّاضيّين آخرين غير جاهلين بالبحوث حول قسمة الخط ولا بالبحوث الجبريّة؛ ولكنّهم اختاروا عن قصد الطرق الهندسيّة. نجد من بين هؤلاء القوهي[٨٣] وابن الهيثم.

يدرس القوهي مسألتين، في آن واحد، وفقاً لكون نقطة القسمة X داخل $Z\Delta$ (نحتفظ هنا برموز أرشميدس) أو بعكس ذلك على الامتداد المستقيم لهذه القطعة. ولكنّه يتبنّى الفرضيّة الخاصَّة $B\Delta = Z\Theta$. يكون حلُّ المسألة ممكناً، بشكل دائم، في الحالة التي تكون فيها النقطة X على الامتداد المستقيم للقطعة $Z\Delta$ (يكون لمعادلة الدرجة الثالثة جذر موجِب، بشكل دائم). يجب، في الحالة الأخرى، إضافة شرط يقدِّمه القوهي؛ وهو أن يكون مكعَّب القطعة $Z\Theta$ أصغر من $\frac{4}{27}$ من مكعَّب $Z\Delta$.

لا يتبنّى ابن الهيثم أيّة فرضيّة خاصّة بالقطعة $Z\Theta$، ولكنه لا يدرس إلا الحالة التي تناولها أرشميدس، حيث تكون نقطة القسمة X داخل القطعة $Z\Delta$. يُمكننا، إذاً، أن نفترض أنَّ ابن الهيثم انطلق مباشرة من نصّ أرشميدس، ولو أنه كان مطّلعاً على دراسة القوهي.

لنعرض الآن برهان ابن الهيثم، مع الاحتفاظ برموز الأحرف اليونانيّة.

[٨١] انظر: الجبر والمقابلة، ضمن "رياضيّات عمر الخيّام"، ص. ١٧١، س. ١١-١٥.
[٨٢] انظر: رسالة في قسمة ربع الدائرة، ضمن "رياضيّات عمر الخيّام"، ص. ٢٤٠، س. ٥-٨ وَ ١٨-٢٠
[٨٣] انظر: التعليق الإضافيّ ص. ٧٧٥ وما يليها.

ليكن $(Z\Delta\,,\,Z\Gamma)$ المَعْلَم $(Zx,\ Zy)$، ولتكن $\Delta(\beta,0)$ نقطة على Zx، ولتكن $B(a,0)$ نقطة أخرى. ولتكن لدينا نقطة $\Theta(\alpha,0)$ بحيث يكون $\alpha < a$ ، وَ $A(\beta,\ \beta-a)$.

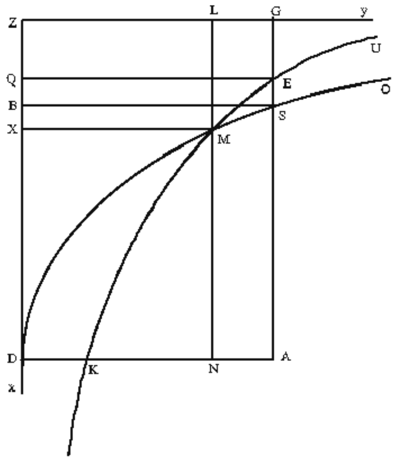
جِدْ نقطة $X(x,0)$ بحيث يكون

$$\frac{(\beta-a)^2}{(\beta-x)^2}=\frac{x}{\alpha} \qquad (١)$$ ،

أي ما يُعادل شرط أرشميدس $\frac{ZX}{Z\Theta}=\frac{B\Delta^2}{\Delta X^2}$.

ليكن معنا القطع الزائد $\mathcal{H} = \{(x,y); xy=\alpha(\beta-a)\}$ ، فيكون $E(\alpha,\beta-a) \in \mathcal{H}$.

ويقطع $\mathcal{H}$ بالضرورة $A\Delta$ على نقطة K، لأنَّ $\mathcal{H}$ تسعى إلى ما لا نهاية، ولأنَّ $Z\Delta$ خطّ مقارَب.



الشكل ٧٤

ليكن معنا القطع المكافئ $\mathcal{P} = \{(x,y); (\beta-x)^2=y(\beta-a)\}$. يسعى القطع $\mathcal{P}$ إلى ما لا نهاية ويكون $A\Gamma$ عموديّاً على محوره. فيقطع $\mathcal{P}$ بالضرورة $A\Gamma$ على نقطة Σ التي تساوي إحداثيّتُها الثانية $\beta-a$. فيكون معنا:

$$\Sigma(x,\ \beta-a) \in \mathcal{P} \Leftarrow (\beta-x)^2=(\beta-a)^2$$ ،

فيكون $x = a$؛ ولكنَّ $a > \alpha$، وفقاً للفرضيات، فتكون النقطة E الموجودة على $\mathcal{H}$ خارج $\mathcal{P}$، كما تكون النقطة K ، الموجودة على $\mathcal{H}$، داخل $\mathcal{P}$ ؛ فيقطع $\mathcal{P}$ ، إذاً، $\mathcal{H}$ (بواسطة استدلال ضمنيّ يستخدم الاتصال). لتكن $M(x_0, y_0)$ نقطة تقاطع بين $\mathcal{H}$ و $\mathcal{P}$.

يكون معنا $(\beta - x_0)^2 = (\beta - a).y_0$ ، لأنَّ $M(x_0, y_0) \ni$ ، فنحصل على $\frac{\beta - x_0}{y_0} = \frac{\beta - a}{\beta - x_0}$،

فيكون $\frac{(\beta - a)^2}{(\beta - x_0)^2} = \frac{\beta - a}{y_0}$.

ويكون معنا : $x_0 y_0 = \alpha(\beta - a)$ ، لأنَّ $M(x_0, y_0) \ni \mathcal{H}$، فنحصل على $\frac{(\beta - a)}{y_0} = \frac{x_0}{\alpha}$،

فيكون $\frac{(\beta - a)^2}{(\beta - x_0)^2} = \frac{x_0}{\alpha}$. وهذا ما أردنا أن نُبيِّن.

إذا قارنا هذا البرهان مع برهان أوطوقيوس، نلاحظ أنَّ عملَ ابن الهيثم الهندسيَّ يتمُّ، هو أيضاً، بواسطة قطع مكافئ وقطع زائد. وإذا استخدمنا عبارات جبر الخيّام، ترجع المسألة، في حالة أوطوقيوس، إلى حلّ المعادلة: $x^3 + c = ax^2$، أي إلى حلّ المعادلة ١٧ للخيّام[٨٤] ؛ بينما تؤدِّي المسألة، في حالة ابن الهيثم، إلى المعادلة $x^3 + bx = ax^2 + c$، أي إلى المعادلة ٢٤ للخيّام[٨٥].

والحلُّ الذي وجده ابن الهيثم غيرُ وحيد. وذلك أنَّ عمله الهندسيَّ يُعطي حلاً ثانياً؛ ولكنَّ هذا الحلَّ لا يتوافق مع المسألة الهندسيّة المطروحة حيث يتعلق الأمر بإيجاد X بين Δ وَ B (ΔB هو قطر الكرة في مسألة أرشميدس). والحلُّ الثاني هو، بالتحديد، خارج القطعة ΔB. والقسمة، كما طرحها أرشميدس مع Θ بين B وَ Z، أي مع ما يُكتَب برموزنا $a > \alpha$، تعطي من جهة أخرى لابن الهيثم شرطاً كافيا لوجود الحلّ. إنَّ لدينا، بالفعل، $Z\Theta.B\Delta^2 < ZB.B\Delta^2 = xa(x-a)^2$ ، حيث تكون المعادلة التي يتوجَّب حلّها $x\,(\beta - x)^2 = \alpha\,(\beta - a)^2$ ؛ ويوجَد حلٌّ لهذه المعادلة بين 0 وَ β إذا كان $\alpha\,(\beta - a)^2$ أصغر من الحدّ الأقصى لِـ $x\,(\beta - x)^2$ في الفسحة $0 < x < \beta$ وهذا الشرط مُحقّق عندما يكون

[٨٤] انظر: الجبر والمقابلة، ضمن رياضيّات عمر الخيّام، ص. ٨٩ وما يليها.

[٨٥] انظر المرجع السابق، ص. ١٢٤ وما يليها. يستخدم ابن الهيثم التقاطع بين نصف دائرة وقطع زائد متعامد الخطّين المقارَبين

$\mathcal{C} = \{(x, y); (b^{1/2} - y)^2 = (x - \frac{c}{b})(a - x)\}$ ، $\mathcal{H} = \{(x, y); xy = b^{1/2}\frac{c}{b}\}$

$0 < \alpha < a < \beta$. ويساوي هذا الحدُّ الأقصى، من ناحية أخرى، $\frac{4\beta^3}{27}$؛ فيكون الشرط الضروريُ والكافي لوجود الحلّ في الفسحة $]0, \beta[$: $\alpha(\beta - a)^2 < \frac{4\beta^3}{27}$؛ وهو يتحقق إذا كان $\alpha < a$.

لنلاحظ أنَّ أوطوقيوس يُثبت ضرورة هذا الشرط[٨٦]. ويُشير القوهي، أيضاً، إلى هذا الشرط في الحالة الخاصّة للمسألة التي يدرسها.

أمّا ابن الهيثم، فهو يضع نفسه، بشكل حصريّ، ضمن شروط مسألة أرشميدس، وهذا ما يُغنيه عن الشرط الضروريّ (الذي يتحقّق تلقائيّاً في هذه الحالة).

ونلاحظ اختلافاً آخر مهمّاً بين نصّ أوطوقيوس ونصّ ابن الهيثم؛ ويخصّ هذا الاختلاف إثبات تقاطع القطعين المخروطيّين. يتناول أوطوقيوس هذا التقاطع بدون التوقّف لإثباته أو تعليله. أمّا ابن الهيثم فهو يستخدم مباشرة الإحداثيّات فينسب المنحنيين للمحورين نفسهما، وهذا ما يُقلّل من التعقيد عند معالجة النِّسَب. وهو، بعكس ذلك، يشرع بوضوح في التعليل بواسطة خواصّ التحدُّب وسلوك المنحني في اللانهاية والاتصال المفترَض للمنحنيين. ولنلاحظ أخيراً أنَّ ابن الهيثم، بعكس أوطوقيوس، يستخدم العلاقتين الأساسيّتين اللتين تحدِّدان القطعين المخروطيَّين، على شكل معادلة بين مضروبات القِطَع. ولكنَّ ابن الهيثم لم يَسْهُ عن أن يُلاحظ أنَّ القطع المكافئ يمُرُّ بنقطة M داخل القطع الزائد، بدون أن يستخرِج من ذلك بوضوح النتائج الخاصَّة بتقاطع المنحنيين[٨٧].

٣ ــ في مسألة عدديّة في المجسَّمات

"اِقسم عدداً معلوماً إلى قسمين، بحيث يكون أحدهما مساوياً لمكعَّب الثاني. هذه هي المسألة التي أراد ابن الهيثم أن يدرسها في نصٍّ قصير، ولكنّه كبير في أهمِّيّته.

[٨٦] انظر: *Commentaires d'Eutocius et fragments*, éd. et trad. Charles Mugler، ص. ٩٤ وما يليها.
[٨٧] انظر المرجع السابق، ص. ٩٢-٩٣.

تعود أهمّيّة هذا النصّ إلى المكانة التي تتمتّع بها هذه المسألة. يتعلّق الأمر بنوع من تلك المسائل التي اعتاد المتخصِّصون في نظريّة الأعداد على طرحها، منذ عهد ديوفنطس، كما كان الجبريّون، تبعاً للخيّام، مولعين بها. وكان المتخصِّصون في نظريّة الأعداد يبحثون عن حلول مُنـْطَقَة، بينما كان الجبريّون يريدون الحصول على حلول حقيقيّة موجِبة. ولمّا كان على ابن الهيثم أن يحلَّ مسألة في المجسَّمات، فقد أراد استخدام كلّ التقنيّات التي طوَّرها في الأعمال الهندسيّة لحلّ هذه المسألة، ولكن بدون استخدام الجبر؛ وهذا ما جعل الفصل الخاصّ بالأعمال الهندسيّة يتوسَع في ميدان مختلف عن الميدان الأصليّ الذي نشأ فيه.

لم تخفَ على خلفاء ابن الهيثم جِدَّة هذه المهمَّة وفعالية الوسائل المستخدَمة فيها، فأخذوا أكبر قسم من بحوثه هذه ودمجوها في الجبر. ولقد قام الخيّام، الذي لم يكن جاهلاً بأعمال ابن الهيثم[٨٨]، بهذا الدمج. لنبدأ، إذاً، بتحليل نصّ[٨٩] ابن الهيثم بلغة مختلفة عن لغته.

مسألة:

ليكن a عدداً معلوماً. جِد $x > 0$ بحيث يكون $x < a$ وَ

$$(a - x)^3 = x \qquad (١)$$

يبدأ ابن الهيثم، لحلّ هذه المسألة، ببرهان المقدِّمة التالية:

مقدِّمة: جِد المقادير الأربعة a_1، a_2، a_3 وَ a_4 بحيث يكون

١- $0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4$،

٢- $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4}$،

٣ - $\frac{a_4 - a_3}{a_1} = k = \frac{b}{c}$، نسبة معلومة.

[٨٨] انظر: ر. راشد وَ ب. وهاب زاده، رياضيّات عمر الخيّام، وعلى الأخصّ ص. ٢٢٤-٢٢٦.
[٨٩] انظر: ص. ٤٩٤ وما يليها.

لنضع، في المَعْلَم (Nx, Ny)، النقاط $A(c, b)$ ، $B(c, 0)$ ، $D(2c, 0)$ وَ $E(2c, b)$.

ولنرسم، بعد ذلك المنحنيين: $\mathcal{H} = \{(x, y); y(x-c) = bc\}$ وَ $\mathcal{P} = \left\{(x, y); y = \frac{x^2}{c}\right\}$.

يستخدم ابن الهيثم، عندئذ، السلوك المقارب ليبيِّن أنّ المنحنيين يتقاطعان بالضرورة على نقطة وحيدة لها الإحداثيّة الأولى x_0 مع $c < x_0$. فهو يلاحظ، بالفعل، أنه عندما تتزايد x من c إلى $+\infty$، فإنَّ $y_{\mathcal{H}}$ تتناقص من $+\infty$ إلى الصفر، لأنَّ AB وَ CB هما خطّا التقارب؛ كما أنَّ $y_{\mathcal{P}}$ تتزايد من c إلى $+\infty$؛ فتوجَد لذلك قيمة وحيدة x_0 مع $c < x_0$، بحيث تكون $G(x_0 , y_0) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{H}$. ويكون معنا $x_0 < y_0$، لأنَّ $c < x_0$.

يكون لدينا $\frac{x_0{}^2}{c} = y_0$، لأنَّ $G(x_0 , y_0) \in \mathcal{P}$ وَ $bc = y_0(x_0 - c)$ لأنَّ $G(x_0 , y_0) \in \mathcal{H}$.

فيكون معنا من هاتين العلاقتين على التوالي $\frac{c}{x_0} = \frac{x_0}{y_0}$ وَ $\frac{c}{x_0} = \frac{y_0}{y_0 + b}$؛ فنحصل على $\frac{c}{x_0} = \frac{x_0}{y_0} = \frac{y_0}{y_0 + b}$، مع $c < x_0 < y_0 < y_0+b$.

يكفي الآن أن نضع $a_1 = c$، $a_2 = x_0$، $a_3 = y_0$، وَ $a_4 = b + y_0$، لنحقق شروط المقدِّمة، لأنَّ $k = \frac{b}{c} = \frac{a_4 - a_3}{a_1}$.

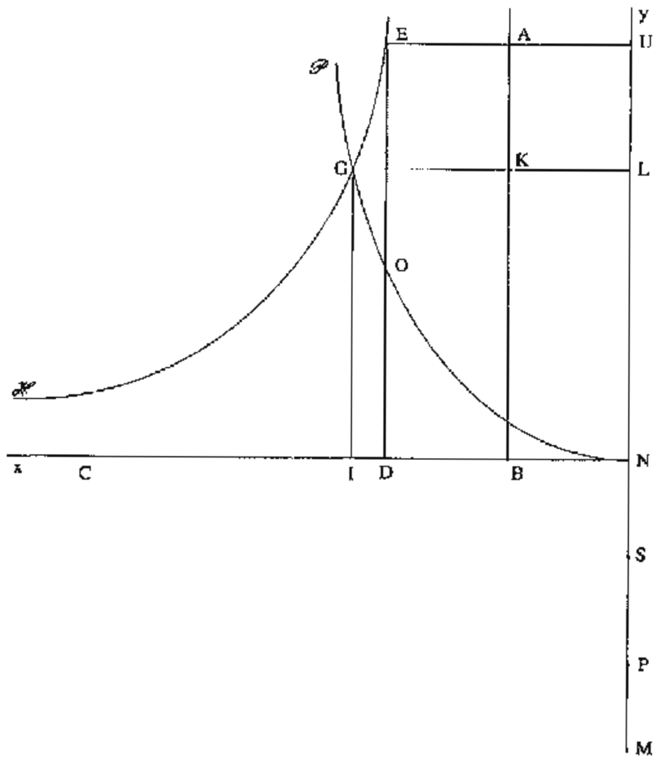
حلّ المسألة:

لنبحث الآن عن x، حلّ (١). ليكن $a = AB$ ، $x = AI$ وَ $x < a$، ولنجد x بحيث يكون $BI^3 = AI \Leftrightarrow (a - x)^3 = x$.

يمكن أن نحدِّد، وفقاً للمقدِّمة، أربعة أعداد موجِبة $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$، بحيث يكون

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} \quad \text{وَ} \quad a^2 = \frac{a_4 - a_3}{a_1}.$$

ونبيّن أنه، إذا كان $\frac{x}{a-x}=\frac{a_4-a_3}{a_3}$، يكون عندئذ $x=(a-x)^3$.



الشكل ٧٥

إنّ لدينا، وفقاً للفرضيّات، $a_1.a^2=a_4-a_3$. والعلاقة $\frac{x}{a-x}=\frac{a_4-a_3}{a_3}$ تعطينا

$$\left(\frac{a_3}{a_4}\right)^2.a^2=\frac{a_1}{a_3}.a^2=\frac{x}{a-x} \qquad (٢)$$

ولكنّ لدينا أيضاً

$$\frac{a_4}{a_3}=\frac{a}{a-x} \qquad (٣)$$

ونستخرج من (٢) وَ (٣) : $\frac{(a-x)^2}{a^2}=\frac{x}{a^2(a-x)}$ ، فنحصل على النتيجة.

ملاحظات:

١- ينطلق ابن الهيثم من القسمة (D, H, G, E, C) التي يفترضها معلومة، مع $a_4 = DC$، $a_3 = DE$ ، $a_2 = DG$ ، $a_1 = DH$، ويعمل انطلاقاً من قطعة أخرى AB معلومة، القسمة

(B, L, K, I, A) المشابهة للقسمة الأولى، وتكون القطعة AI مماثلة للقطعة CE.

٢- يعادل تحديدُ النقطة I، على AB، البحثَ عن $AI = x$ أو عن $BI = a - x$؛ وهذا ما يرجع إلى حل المعادلة (١). وهذا يعود، إذا وضعنا $a - x = y$، إلى حلِّ المعادلة $a - y = y^3$ مع $0 < a$. ويتعلّق حلُّ هذه المسألة بالمقدّمة. وكنّا قد رأينا أنَّ الحلَّ حاصلٌ من تقاطع قطع مكافئ مع قطع زائد. ولقد حلَّ الخيّام هذه المسألة، فيما بعد، بعد أن صاغها جبريّاً – انظر المعادلة ١٣ في مؤلّفه[٩٠]–، بواسطة التقاطع بين قطع مكافئ ودائرة.

وإذا عكسنا الآن منهج ابن الهيثم لننطلق من المقادير ذات النّسَب المتّصلة، نجد معادلة على الشكل $\alpha_1 x^2 + \alpha_3 = x^3$، أي من النوع ١٨ للخيّام[٩١].

ولكن، إذا انطلقنا مباشرة من المعادلة (١)، نقع على المعادلة:

$$x^3 + (3a^2 + 1)x = 3ax^2 + a^3 ،$$

التي هي من النوع ٢٤ والتي يمكن أن تكون لها ثلاثة جذورٌ موجبة.

٣- لنلاحظ أنّه، وفقاً لمعادلة القطع المكافئ، إذا كان $x = c$، يكون $y = c$، وإذا كان $x = 2c$، يكون $y = 4c$. يقطع القطعُ المكافئ الخطَّ E بين E و A، إذا كان $4c$

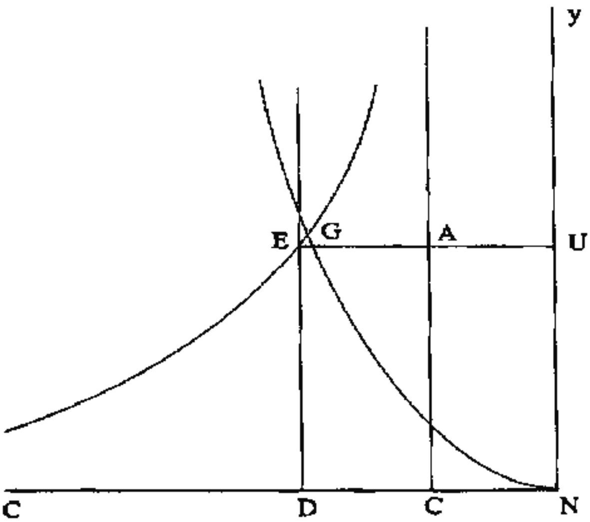
---

[٩٠] انظر: ر. راشد وَ ب. وهاب زاده، ريّاضيّات عمر الخيّام ، ص. ٧٤-٧٨. انظر أيضاً : شرف الدين الطوسي، الأعمال الريّاضيّة، (باريس ١٩٨٦)، المجلّد الأوّل، المعادلة ١٣، ص. CLV-CLVIII.

[٩١] انظر: ر. راشد وَ ب. وهاب زاده، ريّاضيّات عمر الخيّام ، ص.٩٦ وما يليها.

$(k > 4) < b$)، وهذا ما يتوافق مع الشكل؛ ويكون معنا عندئذ $b > y_0$ وَ $2c < x_0$. وإذا كان $k < 4$، يكون معنا الشكل التالي مع $b < y_0$ وَ $2c > x_0$، ويبقى كلُّ الاستدلال صالحاً.

٤- إنَّ هذا الحلَّ الذي حُدِّدَ للمعادلة (١) أصمٌّ في الحالة العامَّة، ويخرج عن نطاق نظريَّة



الشكل ٧٦

الأعداد. وهكذا يتعلّق بالهندسة أو بالجبر الذي كان متداولاً في ذلك العصر. إنَّ دراسة ابن الهيثم، كما رأينا ، هي هندسيَّة بالمعنى الحصريّ.

٤- تاريخ نصوص ابن الهيثم

٤-١ "في عمل المسبَّع في الدائرة"

هذا العنوان هو الذي أورده كاتبا السِّيَر القديمان، القفطي وابن أبيِ أصيبعة، في قائمة أعمال ابن الهيثم[٩٢]. ونحن نعرف منذ عشرين عاماً أنَّ هذا المؤلَّف محفوظ في مجموعة عاطف ١٧١٤الشهيرة في إسطنبول. وتحتوي هذه المجموعة، المؤرَّخة في

[٩٢] انظر: المجلد الثالث من هذه الموسوعة، الجدول، رقم ٨، ص. ٤٧٨.

وقت متأخِّر (١١٥٨ هجريّة/١٧٤٥ ميلاديّة)، على عشرين مؤلّفاً لابن الهيثم في الفلك والمناظر، بالإضافة إلى مؤلّف للرياضيّ يحيى الكاشي ومؤلّف آخر لكاتب مجهول في تسطيح الكرة. ويحتلُّ المؤلّف "في المسبَّع المتساوي الأضلاع" المرتبة التاسعة عشرة في هذه المجموعة؛ وكان الاعتقادُ سائداً، حتّى زمن قريب جدّاً، بأنّ هذه المخطوطة هي الوحيدة التي حُفظت لنصّ ابن الهيثم هذا.

لقد قمنا، خلال بحوثنا حول رياضيّات ومناظر ابن الهيثم، بتحقيق عدّة نصوص موجودة في هذه المجموعة مثل "في مساحة الكرة"[٩٣] و"مقالة مستقصاة في الأشكال الهلاليّة"[٩٤] أو "في الكرة المحرقة"[٩٥]. ولقد بيّنّا عندئذ أنّ نسّاخ مخطوطة عاطف لم يستند في كلّ مرّة إلا إلى مخطوطة أصليّة واحدة، محفوظة لحسن الحظّ في مخطوطة *Oct.2970*، في مكتبة ستاتسبيبليوتيك (*Staatsbibliothek*) في برلين. ويمكن أن نذهب إلى أبعد من ذلك، فنقول إنّ هذه النتيجة تبقى صحيحة لكلّ مؤلّفات مجموعة برلين – أي لمؤلّفات ابن الهيثم الخمسة عشر ولمؤلّف الكاشي – التي نجدها ثانية على شكل نُسَخ مطابقة للنّسَخ الأصلية، في مجموعة عاطف.

بقيت لدينا، إذاً، بالإضافة إلى مسألة الكاتب المجهول الغامضة حول تسطيح الكرة، مسألة نصوص ابن الهيثم الخمسة الغائبة في مجموعة برلين والموجودة في مجموعة عاطف، وهي:

"في شكل بني موسى"، "في خطوط الساعات"، "في عمل البنكام"، "في كيفيّات الأظلال"، "في عمل المسبَّع المتساوي الأضلاع".

والسؤال الذي يفرض نفسه عند التفكير في هذا الوضع هو الآتي: هل كانت هذه النصوص الخمسة ضمن مجموعة برلين قبل أن تُفصلَ عنها عن قصد أو نتيجة

[٩٣] انظر: المرجع السابق، ص. ٢٨٦-٣٠٠.
[٩٤] انظر: المرجع السابق، ص. ١٦٥-٢٠١.
[٩٥] انظر: ر. راشد، *Geometry and Dioptrics in Classical Islam*، (لندن ٢٠٠٥)، ص. ١٦٢-١٨٢.

لحادث ما؟ يؤكِّــد التفحُّصُ الدقيق لهذه المجموعة هذه الشكوكَ الأولى، إذ يظهر من الترقيم الأوّليّ للمجموعة أنّها لم تكن تحتوي على ستّة عشر مؤلّفاً فقط كما هي الحال اليوم، بل إنّها كانت تحتوي على اثنين وعشرين أو ثلاثة وعشرين نصّاً. ويُظهر هذا التفحُّص، أيضاً، أنَّ مجموعة برلين قد نُسخت على مدى عشرين سنة على الأقلّ بين ٨١٧هـ/١٤١٤م و ٨٣٩هـ/١٤٣٥م. ولقد نــُسخت هذه المجموعة بيد نَسّاخ وحيد – خلافاً لما قلناه من قبل[٩٦] – وهو العالِم قاضي زاده الذي كان تحت خدمة أولغ بغ، الذي كان مديراً لمرصد سمرقند في فترة معيّنة. وذلك أنّنا نقرأ على الورقة ١٢و الملاحظة التالية:

"رسالة في برهان المسألتين أحدهما ما يتوقّف عليه مساحة بسيط الكرة وثانيهما في تكسير الشكل الشبيه بالمُعيَّن بخطّ قاضي زاده".

ونقرأ في الجملة الختامية لهذا النصّ نفسه الملاحظة التالية (ورقة ٢١ظ):

"وقع الفراغ من تنميقه في العاشر من ربيع الآخر سنة سبع عشرة وثمانمائة، وكان ذلك في سمرقند".

ولقد أرَّخ النسّاخ، في الجملة الختاميّة لنصّ "في مساحة الكرة" (الورقة ١٥٢و) نسخته في سنة ٨٣٩هـ/١٤٣٥م. ونحن نكاد لا نعرف شيئاً عن تاريخ هذه المجموعة بين زمن كتابتها وزمن إدخالها الحديث (١٩٣٠) في المجموعات الألمانيّة. يبقى أنّه، نظراً إلى تواريخ النسخ الواردة فيها – خلال فترة عشرين سنة على الأقلّ – ونظراً إلى شخصيّة الناسخ ولمكان النسخ، لا يظهر لنا ضرباً من عدم التبصُّر أن نـُخمِّن أنَّ الأمر يتعلّق بنسخة عمل شخصيّة لقاضي زاده. لقد قام هذا الأخير، على أرجح الاحتمالات، بنسخ مجمل مؤلّفات مجموعة برلين لاستعماله الشخصيّ، ووفقاً لأعماله الخاصّة في الرياضيّات، وهذا ما يُبيِّن، لو دعت الحاجة إلى ذلك، أنَّ أعمال ابن الهيثم في الرياضيّات والمناظر والفلك، كانت لم تزل متداولة في النصف الأوّل من القرن الخامس عشر. وسيكون على علماء الاجتماع أن يُخبرونا بطريقة مُعمَّقة عن ظروف وكيفيّة

[٩٦] انظر المرجع السابق، ص. ٣٧-٣٨.

تنظيم النشاط العلمي في بلاط أولغ بغ. وإذا رجعنا إلى المسألة النصّية التي طرحناها في أوّل الأمر، يجب أن نتساءل ببساطة، من جهتنا، إذا كان مؤلف "في عمل المسبَّع" موجوداً مع النصوص الأربعة الناقصة في مجموعة برلين، ضمن مجموعة قاضي زاده. سيسمح لنا الجوابُ الإيجابيّ، عن هذا السؤال، بأن نرجع ثلاثة قرون إلى الوراء، في كتابة تاريخ نصّ عمل المسبَّع.

هذا الجواب الإيجابيُّ ممكنٌ، بل إنّه قابل للبرهان بفضل تضافر الدراسات النصّيّة والمخطوطيّة والأثريّة. والحلُّ يكمن في دراسة شهادة أخرى، لم يجرِ تفحُّصها حتّى الآن وهي المخطوطة ٣٠٢٥ في المتحف العسكري في اسطنبول. وهذه المجموعة تحتوي على مؤلّفات ابن الهيثم الخمسة، الناقصة في مجموعة برلين، بالإضافة إلى شرح لكتاب "المخروطات" لأبلونيوس ألّفه الحسين بن عبد الملك. ولقد نُسخت المؤلّفات الخمسة لابن الهيثم باليد نفسها، في حين إنَّ الشرح الأخير واردٌ من مصدر آخر. والأهمُّ من ذلك هو أنَّ اليد التي نسخت مؤلّفات ابن الهيثم الخمسة، هي اليد نفسها التي نسخت مخطوطات برلين، أي يد قاضي زاده. ويُظهر ترتيب الصفحات، في المجموعتين – برلين والمتحف العسكريّ –، بالدرجة التي يسمح بها الميكروفيلم، نظام التسطير نفسه: ٢١ سطراً في الصفحة الواحدة ، والنسبة نفسها تقريباً بين أبعاد الهوامش الأربعة، وبين أبعاد السطح المكتوب.

وهكذا نخلص بدون تردُّد إلى القول إنَّ مجموعتي برلين والمتحف العسكري لم تشكِّلا في الأصل سوى مجموعة واحدة – وعلى الأقلّ حتّى سنة ١١٥٨هـ/١٧٤٥م، أي تاريخ عمل مخطوطة عاطف سنة ١٧١٤[٩٧]. ولقد قُسمت هذه المجموعة الضخمة، بعد هذا التاريخ، إلى قسمين مختلفين، وألحِقت، عندئذ أو بعد

[٩٧] كانت مخطوطة قاضي زاده التي نُسخت في سمرقند موجودة ، إذا، في اسطنبول في القرن السابع عشر الميلاديّ، حيث نُسخت بيد النسّاخ عاطف. وهذا فيما يلي ما نقرأه في الجملة الختاميّة لمؤلف ابن الهيثم "في سمت القِبلة" (الورقة ٩ظ):" ونقل مما خطّه موسى الشهير بقاضي زاده الرومي، ووقع الفراغ في خلال محرّم الحرام لسنة ثمانٍ وخمسين ومائة وألف في البلد الطيِّبة قسطنطينية المحميّة...". ولقد قُسمت هذه المجموعة إلى قسمين؛ والقسم الأكبر منها وصل إلى المكتبة الوطنية في برلين، في حين أدخل الباقي إلى المتحف العسكريّ.

ذلك، المؤلّفات الخمسة الموجودة الآن في المتحف العسكريّ بشرح الحسين بن عبد الملك لكتاب "المخروطات" لأبلونيوس. وهكذا لا يكون لمجموعة عاطف١٧١٤ أيَّة قيمة مستقلّة في التسلسل المخطوطيّ.

وتتأكَّد هذه النتيجة نهائيّاً بعد المقارنة النصّيّة لنسختي المؤلّفات الخمسة (المتحف العسكري ٣٠٢٥ وعاطف ١٧١٤). وإذا قصرنا المقارنة، هنا، على "في عمل المسبَّع المتساوي الأضلاع"، يظهر بوضوح أنّه كان لدى نسّاخ مخطوطة عاطف [*A*] نسخة أصليّة وحيدة وهي نصّ المتحف العسكريّ [*M*]. كلُّ خطأ أو سهو موجودٌ في [*M*]، نجده ثانية في [*A*]، بينما تحتوي [*A*] على أخطاء عديدة خاصَّة بها وغير موجودة في [*M*]. ولنلاحظ، أخيراً، أنَّ بعض الجمل، المنسوخة على هوامش [*M*]، توجَد داخل نصّ [*A*]. ويصل الأمر إلى أنَّ أحرف الأشكال الهندسية المنسيّة في [*M*] غائبة أيضاً في [*A*].

نُسخت [*M*] بخطّ النستعليق. ونلقى فيها بعض التصحيحات التي قام بها النسّاخ في الهوامش. ولقد رُسمت فيها الأشكال الهندسيّة، ولكنَّ الأحرف لم تُنسَخ في بعض الأحيان على الأشكال.

يحتلّ نصّ "في عمل المسبَّع"، ضمن مجموعة عاطف ١٧١٤، الأوراق ٢٠٠ظ – ٢١٠و، والخطّ هو النسخيّ والأشكال مطابقة لأشكال [*M*][٩٨].

لم تصدر من نصّ ابن الهيثم "في عمل المسبَّع المتساوي الأضلاع" سوى نشرة وحيدة، وهي نشرتنا التي صدرت سنة ١٩٧٩ للميلاد[٩٩]. ولقد صدرت هذه النشرة استناداً إلى المخطوطة الوحيدة التي كانت معروفة آنذاك، أي مخطوطة عاطف ١٧١٤. إنَّ تاريخ النصّ الذي عرضناه، هنا، يُحتّم علينا إعادة هذا التحقيق النقديّ والترجمة الفرنسيّة المرفقة به. ولكن يجب ألا نتوقّع تغييرات مهمَّة. إنَّ الإسقاطات والأغلاط الواردة في [*A*] لا تسبِّب أيَّ تغيير في النصّ. ولكنَّ هذه النشرة الجديدة

---

[٩٨] وهكذا نقرأ في الجملة الختاميّة أنَّ الأشكال قد رسمت في هذا المؤلّف وفقاً للنسخة التي نُسِخ عنها، في ليلة العشرين من شعبان ١١٥٨.

[٩٩] انظر:

La construction de l'heptagone régulier par Ibn al-Haytham, Journal for the History of Arabic Science، المجلّد الثالث، رقم ٢، ص. ٣٠٩-٣٨٧.

تلغي النشرة السابقة. ولقد أردنا، بدون أن يكون ذلك مُلزماً، أن نسجّل اختلافات [*A*] في التعليقات والحواشي، لكي نقدّم بعض العناصر التي تثبت ما قدّمناه.

٤-٢ "في مقدّمة ضلع المسبَّع"

هذا العنوان هو الذي أورده كاتبا السِّير القديمان، القفطي وابن أبي أصيبعة[١٠٠]، وهو يختلف عن العنوان الوارد في المخطوطة الوحيدة للنصّ الكامل. وذلك أنّنا نجد هذا المؤلّف لابن الهيثم، في المخطوطة ١٢٧٠/٢١(= *Loth 734*) على الأوراق ١٢٢و-١٢٣ظ، في المكتب الهندي في لندن (*India Office*)، تحت عنوان "فصل للحسن بن الحسن بن الهيثم في مقدّمة المسبَّع". ويُشير المؤلّف نفسه إلى هذا المؤلّف في تحريره الثاني المهمّ "في عمل المسبَّع المتساوي الأضلاع" بالعبارات التالية:

"وقد بيَّنّا عن المقدّمة التي استعملها أرشميدس في قول مفرد غير هذا القول".

هذا التوافق التامّ، بين ابن الهيثم وبين كاتبَي السِّيَر القديمين، اللذين يتكلّمان على "قول" وليس على "فصل"، يُظهر لنا العنوانَ الحقيقيَّ لهذا المؤلّف. وإنّه من المدهش أن نتحدَّث على "فصل" بصدد مؤلّف قصير لا يحتوي إلا على قضيّة وحيدة. ويُمكن أن نضيف إلى هذا أنَّ كلمة "فصل" قد تكون تحويراً لكلمة "قول". سنختار إذاً كلمة "قول" التي أوردها كاتبا السِّيَر القديمان.

ليس لدينا ما نزيده على القليل الذي قلناه حول مخطوطة المكتب الهنديّ ١٢٧٠. لقد نُسِخ فيها نصّ ابن الهيثم بدون تشطيب أو إضافات؛ وبعض الكلمات فيها غير مقروءة بسبب آثار الرطوبة.

لقد كانت هذه المخطوطة حتّى الآن المخطوطة الوحيدة المعروفة لهذا المؤلّف. ولقد استطعنا العثور على مقطع من هذا النصّ ضمن المخطوطة ٦٧٨، على الورقة ٢٧وظ،

[١٠٠] انظر: ابن أبي أصيبعة، عيون الأنباء في طبقات الأطبّاء، نشرة ن. رضا (بيروت ١٩٦٥)، تحت عنوان "قول في استخراج مقدّمات ضلع المسبَّع"، ص. ٥٥٩؛ انظر أيضاً: القفطي، تاريخ الحكماء، نشرة ج. ليبّرت(J. Lippert) (ليبزغ ١٩٠٣)، تحت عنوان "مقدّمات ضلع المسبَّع"، ص. ١٦٧.

من مجموعة عبد الحيّ في المكتبة الجامعيّة عليكرة التي نرمز إليها بِـ [ع]، في الهند؛ ولقد نُسِخت سنة ٧٢١هـ /١٣٢١-٢٢م في السلطانيّة، بخط النستعليق. وهذا المقطع هو كلّ ما يبقى من هذه المخطوطة بعد فقِدان عدّة أوراق منها. تبيِّن المقارنة بين هذا المقطع ونصّ ابن الهيثم في مخطوطة المكتب الهنديّ، أنَّ هذا المقطع قد نُسِخ عن سلف لنصّ مخطوطة المكتب الهنديّ. ولكنَّ هذا المقطع يسمح بإضافة حجَّة نصِّيّة إضافيّة، تخصُّ نسبة النصّ.

لا يقتصر التقليد النصّيُّ لهذا المؤلف على نسخة المكتب الهنديّ وعلى مقطع عليكرة؛ إذ إنَّ لدينا، أيضاً، تلخيصاً لهذا النصّ في مكتبة بودليان ثورستون ٣ (*Bodleian Thurston 3*) ، الورقة ١٣١[١٠١]. وعنوان هذا النصّ يرد كما يلي: " من كلام ابن الهيثم على مقدِّمة أرشميدس في ضلع المسبَّع". وهكذا لا نجد في هذه الكتابة الفقرة الأولى ولا الفقرة الأخيرة؛ أمّا الباقي فهو مُلخَّصٌ. لنأخذ مثالاً:

"فأمّا كيف نعمل المربَّع على الصفة التي شرطها، فإنا نرسم المربّع الذي ذكره وهو مربّع أ ب جـ د ونخرج أ جـ كما فعل ونخرج خطّ أ د إلى ه ونخرج خط ب ز ح ونفرض مثلَّث ح د ه مساوياً ب ز جـ على جهة التحليل" (المكتب الهندي).

"فأمّا كيف نعمل المربَّع على الشريطة المذكورة: نرسم مربّع أ ب جـ د ونخرج أ جـ و أ د إلى ه و ب ز ح ونفرض ح د ه كـ ب ز جـ على جهة التحليل"(ثورستون).

ولقد نُسِخ هذا النصّ الأخير، منذ عهد قريب بدون شكّ، في مخطوطة بودليان مارش ٧٢٠، الورقة ٢٥٩و(*Bodleian, Marsh 720*).

لم يحظَ نصّ ابن الهيثم هذا بتحقيق نقدي قبل تحقيقنا الذي نُشِر في سنة ١٩٧٩[١٠٢]، استناداً إلى مخطوطة المكتب الهنديّ الوحيدة. نعيد هنا هذا التحقيق استناداً إلى المخطوطة نفسها وإلى مقطع عليكرة. أمّا الملخَّص، فإنّنا نثبته في التعليقات الإضافية.

---

[١٠١] انظر التعليق الإضافيّ ص. ٧٧٠-٧٧٥.

[١٠٢] انظر:

La construction de l’heptagone régulier par Ibn al-Haytham, Journal for the History of Arabic Science، المجلد الثالث، رقم ٢، ص. ٣٨٥ وما يليها.

لقد تُرجِم هذا النصّ إلى الألمانية من قِبَل ث. شُويْ (*C. Schoy*)[١٠٣]. ولقد أدَّت هذه الترجمة خدمة كبيرة بوضع هذا النصّ بين أيدي القرّاء.

٤-٣ "في قسمة الخطّ الذي استعمله أرشميدس"، في المقالة الثانية في "الكرة والأسطوانة"

يوجد مؤلّف ابن الهيثم "في قسمة الخطّ الذي استعمله أرشميدس في المقالة الثانية في "الكرة والأسطوانة" في مخطوطات عديدة. لقد وصل إلينا مع مؤلّفات أخرى لابن الهيثم، وحده أو ضمن "المتوسِّطات". نقدِّم هنا التحقيق الأوَّليّ – أي لأوَّل مرَّة – لهذا المؤلــَف استناداً إلى المخطوطات الثماني التي استطعنا الحصول عليها[١٠٤].

١ – مخطوطة لايدن التي نرمز إليها بـــ [ل](*Leiden, Or.* 14/16, fol. 498-501). وهي المخطوطة الشهيرة التي نُسِخَت في القرن السابع عشر الميلاديّ بناء على طلب الريّاضيّ والمستشرق غوليوس (*Golius*)، وفقاً لأقوال الأب المحترم أ. دوزي (*Dozy*)[١٠٥]. ولقد فصَّلنا في مكان آخر تاريخ هذه المخطوطة[١٠٦].

٢ ـ مخطوطة إسطنبول، توبكابي سراي (*Topkapi Sarayi*)، أحمد ٣، ١٦/٣٤٥٣، الورقة ١٧٩ظ، ونرمز إليها بِـ [د]. نُسخت هذه المخطوطة بيد عبد الكافي عبد المجيد عبد الله التبريزي سنة ٦٧٧ للهجرة (١٢٧٨ للميلاد) في بغداد. وكانت هذه المخطوطة بين يديْ فتح الله التبريزي سنة ٨٤٨ للهجرة (١٤٤٤ للميلاد). وهي مكتوبة بالخطّ النسخيّ (قياس الصفحة: *17.1× 13.2* سم، وبُعْدا النصّ: *13.9× 9.6* سم). ويرجع ترقيم الصفحات إلى زمن قريب.

---

[١٠٣] انظر: *Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen Abū'l Raihān Muħammad Ibn Ahmad al-Bīrūnī(Hanovre 1927)*

[١٠٤] يُشير ف. سزغين (F. Sezgin) إلى أنّ مجموعة الجزائر ٩/١٤٤٦ تتضمّن نُسخة من هذا النصّ في الأوراق ١١٩-١٢٦. ولم يظهر ذلك صحيحاً بعد التحقيق (*Geschichte des arabischen Scrifttums, V[Leiden, 1974], p. 372*).

[١٠٥] انظر: *Catalogus Codicum Orientalium Bibliothecae Academiae Lugduno Batavae, (Leiden, 1851)*، ص. xv.

[١٠٦] انظر: ر. راشد وَ ب. وهاب زاده، ريّاضيّات عمر الخيّام، ص. ١٦٢ـ ١٦٥؛ وانظر على الأخصّ، الفصل الرابع، ص. ٥٣٤-٥٣٩.

٣ - مخطوطة إسطنبول، توبكابي سراي (*Topkapi Sarayi*)، أحمد ٣، ١٨/٣٤٥٦، الأوراق ٨١ظ – ٨٢و، ونرمز إليها بِ [هـ]. نُسخ هذا النصّ في ١٢ ربيع الأوَّل سنة ٦٥١ للهجرة (١٢ أيّار/مايو ١٢٥٣ للميلاد). وهي مكتوبة بالخطّ نستعليق (بُعْدا الصفحة: *11. 3 ×25.5* سم، وبُعْدا النصّ: *8.9 ×19.4* سم). وترقيم الصفحات قديم.

٤ – مخطوطة إسطنبول، السليمانيّة، جار اللــه ١٥٠٢، الورقة ٢٢٢ظ – ٢٢٣و. نرمز إليها بِــ [جــ]. يتعلّق الأمر بمجموعة منسوخة سنة ٨٩٤ للهجرة عن نُسخة لعالم الفلك المشهور قطب الدين الشيرازي، كما يؤكِّد ذلك النسّاخ ابن محمود بن محمَّد الكنياني. والخطّ نسخيّ (تحتوي كلّ صفحة على ٢٥ سطراً؛ والأبعاد هي: *17.9 ×25.9* سم للصفحة، و *11.2 ×17.2* سم للنصّ).

٥ - مخطوطة إسطنبول، بشير آغا ٤٤٠، الورقة ٢٧٥ظ. نرمز إليها بِ [ب]. النسخة مؤرَّخة في بداية ذي القعدة سنة ١١٣٤ للهجرة (آب ١٧٢٢). والخطّ نسخيّ ومكتوب بعناية فائقة (والأبعاد هي: *15.7 ×28.2* سم للصفحة، و *8.6 ×18.5* سم للنصّ).

٦ - مخطوطة إسطنبول حاجّي سليم آغا (*Haci Selimaga*) ٧٤٣، الأوراق ١٣٥و – ١٣٦ظ. نرمز إليها بِ [س]. نسخت هذه المخطوطة سنة ١٠٩٩ للهجرة. وذلك أنّنا نقرأ فيها: "فرغ من تسويده في يه شعبان في عام غصط"، أي في ١٥ شعبان ١٠٩٩، الموافق في ١٤ حزيران/يونيو ١٦٨٨. تتألّف المخطوطة من قسمين مختلفين، ولكن من ورق من نوع واحد. والخطّ نسخيّ (والأبعاد هي: *13.3 ×22.2* سم للصفحة، و *8.8 ×18* سم للنصّ).

٧ - مخطوطة إسطنبول، السليمانيّة، عاطف ١٧/١٧١٢، الورقة ١٤٧وظ. نرمز إليها بِ [ع]. وهي مجموعة من "المتوسِطات".

٨ - مخطوطة لندن، المكتب الهندي ١٨/١٢٧٠(*India Office 1270/18*). نرمز إليها بِ [ا]. ونحن نجهل تاريخ نسخها الذي يُمكن أن يكون في القرن العاشر الهجريّ.

قد يكون من قبيل التعسُّف، بسبب قُصر نصّ ابن الهيثم، أن نرسم شجرة التسلسل المخطوطيّ استناداً إلى صفحة واحدة، بدون أن ندرس تاريخ المجموعات التي تندمج فيها هذه الصفحة. ولكنَّ هذه الدراسة تبقى رهن المستقبل البعيد، نظراً إلى حالة البحث في تاريخ المخطوطات العربيّة.

ولقد ترجم النصَّ إلى الفرنسيّة ف. ويبك (*F. Woepcke*) تحت عنوان : "رسالة ابن الهيثم ، الشيخ أبي الحسن بن الحسن بن الهيثم في قسمة الخط الذي استعمله أرشميدس في المقالة الثانية". وهذه الترجمة التي أنجزت بتصرُّف، موجودة كملحق أوَّل لترجمة كتاب الجبر للخيّام[١٠٧].

٤-٤ في مسألة عدديّة مجسَّمة

يوجد هذا النصُّ في مخطوطة وحيدة في مكتبة المكتب الهندي في لندن ١٢٧٠، الأوراق ١١٨ظ – ١١٩و (ولقد أشرنا إلى هذا النصّ عدّة مرّات[١٠٨])، تحت عنوان: "في مسألة عدديّة مجسَّمة". ولقد ورد تحت هذا العنوان على قوائم أعمال ابن الهيثم لدى كُتّاب السِّيَر القدامى[١٠٩].

نقدِّم هنا التحقيق الأوَّليَّ لهذا المؤلّف. ولقد قدَّم ج. سيزيانو (*J. Sesiano*) ترجمة لهذا المؤلّف إلى الفرنسيّة سنة ١٩٧٦ في المقال:

« Mémoire d'ibn al-Haytham sur un problème arithmétique solide », Centaurus, 20.3(1976), p. 189-195.

ولكنَّ هذه الترجمة تشكو، من حين إلى آخر، من صعوبة التعبير عن أفكار ابن الهيثم في كلِّ تفاصيلها.

---

[١٠٧] انظر : *L'Algèbre d'Omar Alkhayyāmī(Paris 1851)*، ص. ٩١-٩٦.

[١٠٨] انظر: المجلد الثاني من هذه الموسوعة، ص. ٦٧.

[١٠٩] انظر : المرجع السابق، المجلد الثاني، ص. ٤٩٢.

نصوص مخطوطات ابن الهيثم:

"في مقدمة ضلع المسبَّع"

"في عمل المسبَّع في الدائرة"

"في قسمة الخطّ الذي استعمله أرشميدس" في المقالة الثانية من كتابه "في الكرة والأسطوانة"

"في مسألة عددية مجسَّمة"

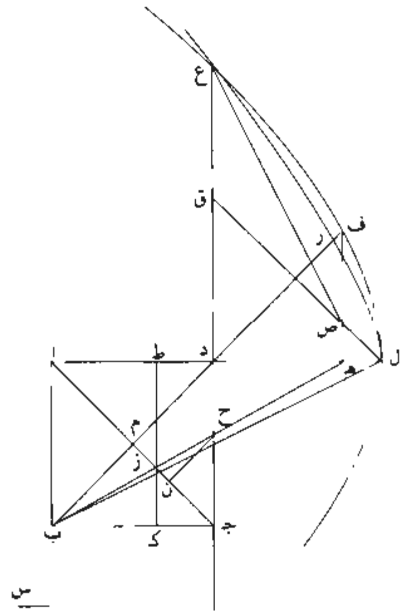
– ١٢٢ – و

قول للحسن بن الحسن بن الهيثم
في مقدمة ضلع المسبع

إن أرشميدس بنى ضلع المسبع على المربع الذي قدمه، ولم يبين كيف يعمل المربع على الصفة التي شرطها. وإنما لم يبين ذلك لأن عمل المربع على الصفة التي شرطها إنما يكون بقطوع المخروطات، ولم يكن ذكر في كتابه – الذي يذكر المسبع في آخره – شيئًا من قطوع المخروطات. فلم ير أن يخلط بالكتاب ما ليس من جنسه. فأخذ المربع مسلمًا وبنى عليه ضلع المسبع.

فأما كيف نعمل المربع على الصفة التي شرطها: فإنا نرسم المربع الذي ذكره، وهو مربع ا ب جـ د، ونخرج ا جـ كما فعل. ونخرج خط ا د إلى هـ، ونخرج خط ب ز ح هـ. ونفرض مثلث ح د هـ مساويا لمثلث ب ز جـ على جهة التحليل. ونخرج خط كـ ز ط موازيًا لـ ب ا كما فعل. فيكون ضرب د ا في ا ط مساويًا لمربع د هـ كما بين أرشميدس. ونصل ب د، فهو يقطع قطر ا جـ بنصفين، لأن مربع ا ب جـ د متوازي الأضلاع قائم الزوايا، فليقطعه على نقطة م. فيكون مثلث ب م جـ مساويا لمثلث ا م د. ولأن مثلث هـ د ح مساوٍ لمثلث ب ز جـ، يكون مثلث ب م جـ مساويا لمثلث هـ د ح مع مثلث ب م ز، ومثلث ب م جـ مثل مثلث ا م د، فمثلث ا م د مساوٍ لمثلثي هـ د ح ب م ز. ونأخذ منحرف م د ح ز مشتركا. فيكون مثلث ب د هـ مساويًا لمنحرف ا د ح ز.

3 قول: كتبها فصل وهي مطموسة وتنتهي بياء فكأنها فصي ولكن الرسالة تنتهي بـ «تم الفصل» ولهذا نرى هذه الكلمة، والأحرى قول كما بينا في المقدمة وهي شيء أثبتناها – 5 إن: مطموسة / يبين: تبين – 6 يبين: تبين – 8 مسلمًا: متسما، والأصح لغة وسياقًا ما أثبتناه – 12 ب ز جـ: ب د ح – 16 مساوٍ: مساو / هـ د ح: هـ د حـ – 18 مساويًا: مساو



وليكن مثلث ب هـ ل مثل مثلث جـ ز ح، فيكون مثلث ب د ل مثل مثلث ا د جـ، وهما بين خطين متوازيين. فخط ل د مثل خط د ا، ويكون نسبة مثلث ب د ل إلى مثلث ب هـ ل كنسبة مثلث ا د جـ إلى مثلث جـ ح ز. ونخرج خط ح ن عمودًا على خط ز جـ؛ فيكون ضرب ح ن في نصف ز جـ مساويًا لمثلث ح ز جـ، وضرب د م في نصف ا جـ مساويًا لمثلث ا د جـ لأن د م عمود على ا م إذا كان المربع متساوي الأضلاع. فنسبة مثلث ا د جـ إلى مثلث جـ ز ح مؤلفة من نسبة د م إلى ح ن – التي هي نسبة د جـ إلى جـ ح – ومن نسبة نصف ا جـ إلى نصف جـ ز – التي هي نسبة ا جـ إلى جـ ز؛ فنسبة مثلث ا د جـ إلى مثلث جـ ز ح مؤلفة من نسبة د جـ إلى جـ ح ومن نسبة ا جـ إلى جـ ز. ونسبة د جـ إلى جـ ح كنسبة هـ ب إلى ب ح، ونسبة ا جـ إلى جـ ز كنسبة هـ ب إلى ب ز. فنسبة مثلث ا جـ د إلى مثلث جـ ز ح مؤلفة من نسبة هـ ب إلى ب ح ومن نسبة هـ ب إلى ب ز. وكذلك يلزم إذا كان المربع مختلف الطولين: أن نخرج من نقطة د عمودًا على خط ا جـ، فيقوم مقام د م ويعود الحال إلى النسبتين المذكورتين. ونسبة مثلث ا جـ د إلى مثلث جـ ز ح كنسبة مثلث ب د ل إلى مثلث ب هـ ل التي هي

3 جـ ح ز: د ح ز – 4 ز جـ (الأولى والثانية): د جـ – 5 عمود: عمودا – 9 هـ ب: مطموسة – 11 أن: لأنا – 13 ا جـ د إلى مثلث جـ ز ح: مطموسة.

نسبة د ل إلى ل هـ. فنسبة د ل إلى ل هـ مؤلفة من نسبة هـ ب إلى ب ح – التي هي نسبة هـ ا إلى ا د – ومن نسبة هـ ب إلى ب ز – التي هي نسبة هـ ا إلى ا ط، فنسبة د ل إلى ل هـ مؤلفة من نسبة هـ ا إلى ا د ومن نسبة هـ ا إلى ا ط، التي هي نسبة مربع هـ ا إلى ضرب د ا في ا ط الذي هو مساوٍ لمربع د هـ، فنسبة د ل إلى ل هـ كنسبة مربع ا هـ إلى مربع هـ د، وخط ا د مثل خط د ل.

فقد انحلّ المربع إلى قسمة خطّ ا ل – الذي هو ضعف ا د – على نقطة هـ قسمةً تكون نسبة د ل إلى ل هـ كنسبة مربع ا هـ إلى مربع هـ د. وقسمة الخط على هذه النسبة إنما تمكن بقطوع المخروط.

فنفرض على طريق التحليل أن الخط قد انقسم، ونخرج خط جـ د على استقامة إلى ع، ونجعل د ع مثل ا هـ. ونخرج من نقطة هـ عمود هـ ف، ونجعل هـ ف مثل د هـ. فيكون نسبة د ل إلى ل هـ كنسبة مربع ع د إلى مربع ف هـ. وليكن ضرب د ل في خط س مساويًا لمربع ع د. فالقطع المكافئ، الذي سهمه د ل وضلعه القائم خط س، يمرّ بنقطتي ع ف. /أما مروره بنقطة ع فلأن مربع د ع مثل ضرب د ل في الضلع القائم. – ١٢٢ – ظ
وهذه خاصة القطع المكافئ؛ وأما مروره بنقطة ف فلأن نسبة د ل إلى ل هـ كنسبة مربع ع د إلى مربع ف هـ كما تبين في شكل ك من مقالة ا من *المخروطات*؛ فليكن القطع ل ف ع. ونجعل خط د ق مثل د ل، ونصل ل ق؛ وليقطع خط ف هـ على نقطة ص. فيكون مثلث ل د ق معلوم الصورة، ويكون زاوية ع ق ص معلومة. ويكون نسبة ق ص إلى د هـ معلومة، لأنها كنسبة ق ل إلى ل د المعلومة. ولأن ع د مثل هـ ا وق د مثل د ل – المساوي لـ د ا – يكون ق ع مثل د هـ. فنسبة ع ق إلى ق ص معلومة، وزاوية ع ق ص معلومة. ونصل ع ص، فيكون مثلث ع ق ص معلوم الصورة. فيكون نسبة ص ع إلى ع ق معلومة؛ وع ق مثل د هـ ود هـ مثل هـ ف، فخط ع ق مثل خط ف هـ. فنسبة مربع ع ص إلى مربع ف هـ معلومة. ومربع ف هـ مثل ضرب ل هـ في خط س. فنسبة ضرب ل هـ في س إلى مربع ص ع معلومة؛ ونسبة هـ ل إلى ل ص معلومة، فنسبة ضرب ل ص في س إلى مربع ص ع معلومة. وزاوية ع ص ل معلومة. فالقطع المكافئ – الذي قطره ل ق ورأسه نقطة ل وزاوية ترتيبه زاوية ع ص ل وضلعه

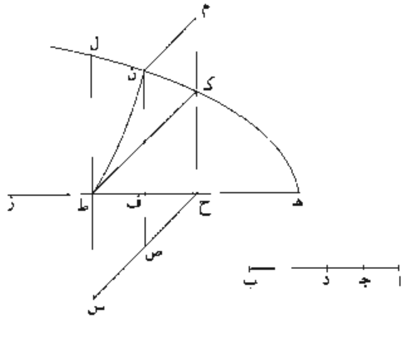
2 هـ ب إلى ب ز: مطموسة – 4 د ل إلى ل هـ: مطموسة – 5 ا هـ: هـ هـ، ثم صحح عليها – 20 ونصل: مطموسة – 24 ص ع: مكررة.

القائم خط نسبته إلى خط س نسبة معلومة – يمرّ بنقطة ع. فليكن ذلك القطع قطع ل رع.

فإذا كان خط ا د معلوم الوضع، وكانت نقطة ل معلومة، وكان خط س معلوم القدر، كان قطع ل ف ع معلوم الوضع، وكان خط ل ق معلوم الوضع لأن زاوية د ل ق معلومة، ويكون الضلع القائم لقطع ل رع معلوم القدر وزاوية ع ص ل معلومة، فيكون قطع ل رع معلوم الوضع، فيكون نقطة ع معلومة. وخط ع د عمود على خط ل د، ‹وهو› معلوم الوضع، فيكون خط ع د معلوم القدر والوضع، ويكون نقطة د معلومة، ويكون خط د ل معلوم القدر، فيكون نسبة ع د إلى د ل معلومة، وع د مثل ا هـ ود ل مثل ا د، فنسبة ا هـ إلى ا د معلومة؛ ‹و›لأنا قد يمكننا أن نجد خطين مساويين لهما بالطريق الذي بيناه؛ وهما خطا ع د د ل، وخط ا د معلوم فخط د هـ معلوم، ونقطة د معلومة، فنقطة هـ معلومة، وهي التي تجعل مربع ا ب جـ د على الصفة التي شرطها أرشميدس.

وأيضًا، فإن أرشميدس فرض هذا المربع وحلله إلى مقدمة هي التي احتاج إليها في عمل المسبع: وهو أن ضَرْب د ا في ا ط مثل مربع د هـ وضربَ هـ ط في ط د مثل مربع ا ط، وكلٌ واحد من خطي ا ط هـ د أعظم من ط د. ففرض خطًا معلومًا وقسّمه على هذه النسبة، وبنى المسبع عليه. وقد يمكن أن يقسم خط على هذه النسبة بقطوع المخروط أيضًا من غير حاجة إلى المربع.

فلنفرض الخط، وليكن ا ب، ونريد أن نقسمه بثلاثة أقسام، كأقسام: ا جـ جـ د د ب حتى يكون ضرب د ا في ا جـ مثل مربع د ب، ويكون ضرب ب جـ في جـ د مثل مربع ا جـ، ويكون كلُّ واحد من خطي ا جـ د ب أعظم من د جـ.



1 نسبته: نسبة / يمرّ: تمر – 2 ل رع: ل ف ع – 3 ا د: لد – 5 ل رع: ل ق ع – 6 ل رع: ل ق ع / الوضع: مطموسة / ع د: ع / على خط: وخط – 8 د ل معلوم القدر: مطموسة – 9 ا هـ إلى ا د: مطموسة / يمكننا: يمكنا – 10 بيناه: مطموسة – 11 معلومة وهي التي: مطموسة / تجعل: نجعل – 12 هي التي احتاج: مطموسة – 13-14 ط د مثل مربع ا ط: مطموسة – 17 جـ د: جـ ب.

فنفرض خطًا كيفما اتفق، وليكن هـ ز، ونفصل منه مقدارًا معلومًا كيفما اتفق، وليكن هـ ح، ونعمل قطعا مكافئًا يكون سهمه هـ ز ورأسه نقطة هـ وضلعه القائم خط هـ ح كما في شكل / نب من مقالة آ من *المخروطات*، وليكن قطع هـ ك ل. ونفصل ح ط مثل ح هـ، ونخرج من نقطتي ح ط عمودين ينتهيان إلى القطع، وليكونا ح ك ط ل، فيكون ح ك مثل ح هـ، لأن مربع ك ح مثل ضرب ح هـ في الضلع القائم، وح هـ هو الضلع القائم، فمربع ك ح مثل ضرب ح هـ في نفسه، فخط ك ح مثل خط ح هـ. ونخرج ل ط على استقامة في جهة ط، ونفصل ط س مثل ط ح ونصل ك ط، فيكون ك ط موازيًا لخط ح س لأن ط س مساوٍ لـ ك ح وموازٍ له، فيكون سطح ك ح س ط متوازي الأضلاع، فنخرج على نقطة ط القطع الزائد الذي لا يقع عليه خطا ك ح ح س كما في شكل د من مقالة ب من *المخروطات*، وليكن قطع ط ن. فهذا القطع يقطع قطعة ك ل: وذلك أن خط ط ل موازٍ لخط ح ك الذي لا يقع على القطع، فخط ط ل يكون في داخل قطع ط ن الزائد، وإذا أخرج خط ط ل إلى غير نهاية، لم يلق قطع ط ن على نقطة غير نقطة ط، وذلك أن خطي ح ك ط ل إذا أخرجا في جهة ك ل إلى غير نهاية، كان البعد الذي بينهما أبدًا متساويًا، وقطع ط ن إذا خرج في جهة ن كان كلما ازداد خروجا ازداد قربًا من خط ح ك وما يتصل به كما في ‹شكل يد من› مقالة ب من *المخروطات*. ولأن خط ط ل إذا خرج إلى غير نهاية في جهة ل يكون أبدا داخل قطع ط ن، ونقطة ك هي أبدًا خارجة عن قطع ط ن لأنها على الخط الذي لا يقع عليه، فقطع ط ن إذا أخرج، فإنه يقطع قطعة ك ل من قطع هـ ك ل. فليقطعها على نقطة ن. ونخرج خط ح ك في جهة ك، ونخرج من نقطة ن خطًا موازيًا لخط ك ط وليكن ن م، ونخرج عمود ن ف ص فيكون موازيًا لخط ل ط س، فيكون ضرب م ن في ن ص مثل ضرب ك ط في ط س كما تبين في شكل يب من مقالة ب من *المخروطات*. فسطح ن ح المتوازي الأضلاع مساوٍ لسطح س ك المتوازي الأضلاع. وسطح ن ح هو من ضرب ن ص في ح ف لأن ح ف عمود على ن ص. وسطح س ك مساوٍ لضرب س ط في ط ح، وس ط مثل ط ح، وط ح مثل ح هـ. فسطح س ك المتوازي الأضلاع مساوٍ لمربع هـ ح.

و – ١٢٣

ع ٢٧ و

2 قطعا: مضمومة – 3 كما: مضمومة – هـ ك ل: هـ ط ل – 12 ط ل (الأولى): س ط ل – 18 بداية مخطوطة [ع] – 20 ن ف ص: كتبها الناسخ ن ق ص، ثم أثبت الصواب في الهامش [ا] – 21 ك ط: مطموسة [ع] / ب: الثانية [ع] – 22 فسطح: مكررة [ع] / ن ح: ن ح [ع] / مساوٍ: مساوي [ع] – 23 لأن ح ف: ناقصة [ع].

وقد تبين أن سطح س ك مساوٍ لضرب ن ص في ح ف، فضرب ن ص في ح ف مساوٍ لمربع هـ ح. ونجعل ف ز مثل ن ف؛ وف ص هو مثل خط ف ح لأن س ط مثل ط ح، فخط ح ز مثل خط ن ص، فضرب ز ح في ح ف مثل مربع ح هـ. وأيضًا، فإن خط ن ف هو من خطوط الترتيب لأنه عمود على سهم هـ ز، وخط هـ ح هو الضلع القائم لقطع هـ ك ن المكافئ، فضرب ف هـ في هـ ح مساوٍ لمربع ف ن؛ وف ن مثل ف ز. فضرب ف هـ في هـ ح مثل مربع ف ز. وقد كان ضرب ز ح في ح ف مثل مربع ح هـ. فنقسم خط ا ب على نقطتي جـ د على مثل نسبة خطوط هـ ح ح ف ف ز، فيكون ضرب د ا في ا جـ مثل مربع د ب، وضربُ ب جـ في جـ د مثل مربع جـ ا. وقد بقي أن نبين أن كل واحد من خطي ا جـ د ب أعظم من جـ د.

فلأن ضرب ف هـ في هـ ح مساوٍ لمربع ف ز، يكون ف ن أعظم من هـ ح. فهو أعظم من ح ط لأن ح ط مثل ح هـ. فهو أعظم بكثير من خط ح ف؛ ون ف مثل ف ز، فخط ف ز أعظم من خط ف ح. وهـ ح أيضًا / أعظم من ح ف لأن هـ ح مثل ح ط، فكل واحد من خطي هـ ح ف ز أعظم من خط ح ف. فكل واحد من خطي ا جـ د ب أعظم من خط جـ د؛ وخطوط ا جـ جـ د د ب على نسبة خطوط هـ ح ح ف ف ز. فقد قسّمنا خط ا ب إلى خطوط ا جـ جـ د د ب حتى صار ضرب د ا في ا جـ مثل/ مربع د ب، وضربُ ب جـ في جـ د مثل مربع ا جـ، وكلُّ واحد من خطي ا جـ د ب أعظم من خط جـ د؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.

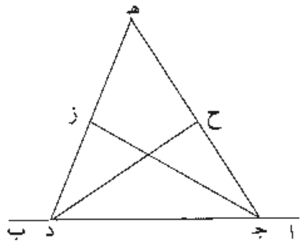
ه - ١٢٣ ‏| ع - ٢٧ - ط

وإذا قُسم خط ا ب على هذه النسبة، فإنه يمكن أن نعمل من خطوط ا جـ جـ د د ب مثلثًا. فليكن المثلث هـ جـ د. وهو المثلث الذي عمله أرشميدس وعمل منه المسبع. وإذا عمل هذا المثلث فقد يمكن أن نعمل منه المسبع على وضع غير الوضع الذي عمله أرشميدس. وذلك بأن نعمل في الدائرة التي يراد عمل المسبع فيها مثلثًا مساوية زواياه لزوايا هذا المثلث، فيكون القوس التي يوترها خط جـ د سبع الدائرة، ويكون القوس التي يوترها خط جـ هـ سبعي الدائرة، ويكون القوس التي يوترها خط هـ د أربعة أسباع

1 قد: ناقصة [غ] – 12 أيضا: ناقصة [غ] – 12-13 لأن ... خط ح ف: وضع الناسخ هذه العبارة بين العلامتين ٠، ومعه يريد أن يبين أن هذه العبارة هي زيادة على النص سواء من نسخة أخرى أو من عنده [ا] – 13 فكل (الثانية): وكل [ا] – 14 وخطوط: لان خطوط [غ]، وكتب قبلها العلامة ٠ [ا] – 15 د ا: ا د [غ] – 16 مثل (الأولى): مكررة في الصفحة التالية [غ] – 18 وإذا: اذا [غ] – 21 يراد: تراد [ا] – 23 جـ هـ: ب د [غ] | سبعي ... هـ د: ناقصة [غ].

الدائرة، لأن زاوية هـ د جـ تكون ضعف زاوية جـ هـ د، وزاوية هـ جـ د أربعة أمثال زاوية جـ هـ د. فإذا قُسمت القوس التي على خط هـ جـ بنصفين والقوسُ التي على خط هـ د بأربعة أقسام وأوترت القسي، كان الذي يحصل في الدائرة شكلاً مسبعًا متساوي الأضلاع والزوايا.

فقد بقي أن نبين أن زاوية هـ د جـ ضعف زاوية جـ هـ د وأن زاوية هـ جـ د أربعة أمثال زاوية جـ هـ د.



فنقسم زاوية جـ د هـ بنصفين بخط د ح، ونقسم زاوية هـ جـ د بنصفين بخط جـ ز، فيكون نسبة هـ ح إلى ح جـ كنسبة هـ د إلى د جـ التي هي نسبة ب د إلى د جـ؛ فبالتركيب يكون نسبة هـ جـ إلى جـ ح كنسبة ب جـ إلى جـ د. لكن نسبة ب جـ إلى جـ د هي كنسبة مربع ا جـ إلى مربع جـ د لأن ضرب ب جـ في جـ د مثل مربع جـ ا، فنسبة هـ جـ إلى جـ ح هي نسبة مربع ا جـ ‹إلى مربع جـ د› – أعني ‹نسبة مربع› جـ هـ إلى مربع جـ د، فنسبة هـ جـ إلى جـ د كنسبة د جـ إلى جـ ح. فمثلثا د هـ جـ جـ د ح متشابهان، فزاوية د ح جـ مثل زاوية هـ د جـ. لكن زاوية د ح جـ مثل زاويتي هـ د ح د هـ ح، فزاوية د هـ ح مثل زاوية ح د جـ، وزاوية هـ د جـ ضعف زاوية ح د جـ، فزاوية هـ د جـ ضعف زاوية د هـ جـ. وأيضًا فإن نسبة د ز إلى ز هـ هي كنسبة د جـ إلى جـ هـ التي هي نسبة د جـ إلى جـ ا، وبالتركيب يكون نسبة د هـ إلى هـ ز كنسبة د ا إلى ا جـ، ونسبة د ا إلى ا جـ هي نسبة مربع ب د إلى مربع جـ ا، فنسبة د هـ إلى هـ ز

1 تكون: يكون [ ] 2 فإذا: وإذا، وهي صحيحة في التكرار [ع] – 2-3 فإذا ... مسبعا: كررها بعد «زاوية جـ هـ د» سطر 6، ثم ضرب عليها بالقلم [ع] – 3 وأوترت: اوترت، وهي صحيحة في التكرار [ع] – 5 نبين: تبين [ا] – 9 لكن: قد تقرأ يمكن [ع] – 10 ا جـ إلى مربع: ناقصة [ع] – 11 ا جـ: مطموسة [ا] / جـ هـ: د هـ [ا] هـ د [ع] – 12 جـ د (الأولى): جـ هـ [ا] – 14 ضعف: وضعف [ع] / ح د جـ: ح ز جـ [ع] – 15 هي: ناقصة [ع] 17 هـ ز: هـ ب [ا] نهاية مخطوطة [ع].

هي نسبة مربع ب د إلى مربع جـ ا التي هي نسبة مربع د هـ إلى مربع هـ جـ، فنسبة د هـ إلى هـ ز هي نسبة مربع د هـ إلى مربع هـ جـ، فنسبة د هـ إلى هـ جـ كنسبة هـ جـ إلى هـ ز. فمثلثا هـ جـ د هـ جـ ز متشابهان، فزاوية جـ ز هـ مساوية لزاوية هـ جـ د، وزاوية هـ ز جـ مساوية لزاويتي ز جـ د ز د جـ، فزاوية هـ د جـ مثل زاوية هـ جـ ز. وزاوية هـ جـ د ضعف زاوية هـ جـ ز، فزاوية هـ جـ د ضعف زاوية هـ د جـ. فزاوية هـ جـ د أربعة أمثال زاوية جـ هـ د.

فقد تبين أن زاوية هـ د جـ ضعف زاوية جـ هـ د، وأن زاوية هـ جـ د أربعة أمثال زاوية جـ هـ د. فإذا عملنا في الدائرة التي يريد عمل المسبع فيها مثلثًا مساوية زواياه لزوايا مثلث هـ جـ د، وقسمنا زاوية هـ جـ د بنصفين، وكلّ واحد من نصفيها بنصفين، وقسمنا زاوية هـ د جـ بنصفين، انقسمت الدائرة بسبعة أقسام متساوية، فإذا أوترت هذه الأقسام بخطوط مستقيمة، حصل في الدائرة شكل مسبع متساوي الأضلاع والزوايا؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

تم الفصل في مقدمة ضلع المسبع. والحمد لله وحده.

4 هـ ز جـ: مطموسة هـ جـ ز: هـ جـ د - 7 هـ د جـ: هـ جـ د - 8 يريد: تفاعل هو أرشميدس - 11 شكل مسبع: شكلا مسبعا - 13 الفصل: كذا ولأحرى القول.

ا – ٢٠٠ – ظ
م – ١ – ص

مقالة للحسن بن الحسن بن الهيثم
في عمل المسبَّع في الدائرة

إن أحد الأشكال الهندسية التي يتحدى بها المهندسون، ويفتخر بها المبرّزون، ويظهر بها قوة من وصل إليها: هو عمل المسبّع المتساوي الأضلاع في الدائرة. وقد ظفر بذلك بعض المتقدمين وبعض المتأخرين إلا أنه ظفرٌ فيه بعض الدخَل. أما الذي عمله من المتقدمين فهو أرشميدس، فإن له قولاً في استخراج ضلع المسبّع، إلا أنه يسلّم مقدمة استعملها في استخراجه ولم يقدم المبيّنة. وقد بينّا نحن المقدمة التي استعملها أرشميدس في قول مفرد غير هذا القول. وأما المتأخرون فالذي وقع إلينا لهم هو قولان: أحدهما بيّن فيه مقدمة أرشميدس ثم بُني العمل عليها؛ والقول الآخر هو قول لأبي سهل ويجن بن رستم الكوهي: وهو أنه استخرج ضلع المسبع بخط قسمه بثلاثة أقسام على نسبة مخصوصة، وهو الخط الذي به تتم مقدمة أرشميدس. ولم نجد لأحد من المتقدمين ولا من المتأخرين قولاً مشروحًا يستوعب جميع الوجوه التي يتم بها عمل المسبّع. ولما كان ذلك كذلك أنعمنا النظر في عمل المسبع، وبينا جميع الوجوه التي بها يتم عمل المسبع، وعملناه بالتحليل والتركيب.

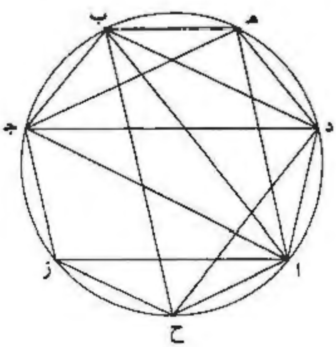
وهذا حين نبتدئ بالقول في ذلك، فنقول: إنا نريد أن نعمل في دائرة معلومة شكلاً مسبعًا متساوي الأضلاع والزوايا، يحيط به الدائرة.

فليكن الدائرة هي التي عليها $\overline{\text{ا ب جـ}}$، ونريد أن نعمل فيها مسبعًا متساوي الأضلاع والزوايا يحيط به الدائرة.

1 بعد البسملة، نجد: رب يسر [م] رب يسر وتمم بالخير [ا] – 4 يتحدى: تتحدا [ا، م] – 9 هو: أثبتها في الهامش [م] – 10 ويجن: والحسن [ا] ‍‍‍‍ بن: ابن [ا].

فعلى / طريق التحليل: م-٢-و

نفرض أن ذلك قد تم وهو مسبع ا د هـ ب جـ ز ح. ونصل خطوط جـ هـ ‹هـ ب ب جـ› جـ د ب د د ح ب ح ب ا جـ ا. فيحدث في الدائرة أربعة مثلثات يُحيط بها الدائرة، وكل واحدة من زواياها يوترها قوس أو قسيٌ من القسي / المتساوية التي يوترها ١-٢٠١-و أضلاع المسبع.



فنقول أولاً: إنه ليس يقع في الدائرة مثلث يحيط به الدائرة ويوتر ‹كلَّ واحدة من زواياه قوسٌ أو قسي من القسي المتساوية التي يوترها› أضلاع المسبّع ويكون غير شبيه بواحد من هذه المثلثات؛ وذلك أن مثلث ا ب جـ زاوية ب ا جـ منه يوترها قوس ب جـ التي هي سبع الدائرة. فزاوية ب ا جـ هي جزء من سبعة أجزاء من زاويتين قائمتين، وزاوية ا ب جـ يوترها ا ز جـ، وهي ثلاثة أسباع الدائرة، فهي ثلاثة أجزاء من سبعة أجزاء من زاويتين قائمتين. فكذلك زاوية ا جـ ب هي ثلاثة أجزاء من سبعة أجزاء من قائمتين. ومثلث ب د ح زاوية ب د ح منه هي ثلاثة أجزاء من سبعة أجزاء من قائمتين، وكل واحدة من

3-2 جـ هـ ... جـ ا: أعاد الناسخ كتابتها في الهامش [ا] – 3 أربعة: اربع [ا، م] / مثلثات: عددها ناسخ [ا] في الهامش هكذا :

الأول مثلث ا ب جـ
الثاني مثلث ب د ح
الثالث مثلث ه ب جـ
الرابع مثلث د ب جـ

6 ويوتر: ويوتره [ا، م] – 8 مثلث: نجد ١ تحتها في مخطوطة [ا]، أي المثلث الأول. وكتب الناسخ في الهامش بجوار النص ما يلي «الجزء الأول ا ح والثاني ح ز والثالث ز جـ مجموعها قوس ا ح ز جـ عبر المصر‹ي› عنها بترك ح رومًا للاختصار وإنما ذكر ز لتعيين الجهة إذ لو قال قوس ا جـ لاحتمل ما كانت في جهة ح (هـ في المخطوطة) فدفعه بذكر ز: سعيد محمد» – 11 هي ثلاثة: نجد في هامش مخطوطة [ا] «أيضًا الأول ا د الثاني د هـ الثالث هـ ب» – 12 هي ثلاثة: نجد في هامش مخطوطة [ا] «الأول ب جـ، الثاني د ز، الثالث ز ح».

زاويتي د ب ح د ح ب هي جزآن من سبعة أجزاء. ومثلث هـ ب جـ زاوية هـ ب جـ منه خمسة أجزاء من سبعة أجزاء، وكل واحدة من زاويتي ب هـ جـ ب جـ هـ ‹جزء› واحد من سبعة أجزاء. ومثلث د ب جـ زاوية ب د جـ منه جزء من سبعة أجزاء وزاوية ب جـ د جزآن من سبعة أجزاء، وزاوية د ب جـ أربعة أجزاء من سبعة أجزاء.

وهذه المثلثات هي أربعة مثلثات، وزواياها كل واحدة منها هي أجزاء من سبعة أجزاء من قائمتين، وهي منقسمة بثلاثة أقسام وهي مختلفة القسمة. وليس تنقسم السبعة بثلاثة أقسام أكثر من أربعة أنواع من القسمة، هي الأنواع التي فصلناها، ولا توجد أقسام السبعة – هي ثلاثة أقسام – وتكون مخالفة لجميع هذه الأربعة الأنواع. فليس يقع في الدائرة مثلث توتر زواياه ‹القسي المتساوية التي توترها› أضلاع المسبع / غير هذه المثلثات الأربع؛ م-٢-ظ
وكل واحد من هذه المثلثات إذا وجد مثلث شبيه به، فقد وجد المسبع؛ لأنه إذا عمل في الدائرة مثلث شبيه به وقسمت زواياه بجزء جزء، انقسمت الدائرة سبعة أقسام متساوية؛ فإذا أوترت القسي، حدث مسبع متساوي الأضلاع والزوايا.

فلنشرع في وجود / مثلثات شبيهة بالمثلثات الأربع التي بينّا تفصيل زواياها ونستخرج ا-٢٠١-ظ
المسبع بكل واحد منها. ولنبتدئ بالمثلث المتساوي الساقين الذي كل واحدة من زواياه التي على القاعدة ثلاثة أمثال الزاوية الباقية. ونريد أن نستخرج المسبع بهذا المثلث.

فعلى طريق التحليل:

نفرض أنا قد وجدنا مثلثًا على هذه الصفة، وليكن مثلث ا ب جـ. ونجعل زاوية جـ ب د مثل زاوية ب ا جـ، فيكون مثلث ب جـ د شبيهًا بمثلث ا ب جـ ويكون زاوية ب د جـ مثل زاوية ا ب جـ، وزاوية ا ب جـ مثل زاوية ا جـ ب. فزاوية ب د جـ مثل

1 هي: نجد في هامش مخطوطة [ا] «١ د ا ز ح ٢ د هـ هـ ب» والأعداد «١، ٢؛ ١، ٢» تحتها – 2 خمسة: نجد في هامش مخطوطة [ا] «هـ د د ز ز ح ح ز ز جـ» والأعداد «١، ٢، ٣، ٤، ٥» تحتها – 4 أربعة: نجد في هامش مخطوطة [ا] «د ا ا ح ح ز ز جـ» والأعداد «١، ٢، ٣، ٤» تحت كل واحدة منها – 5 أربعة: اربع [ا، م] – 7 أربعة: نجد في هامش [ا]:

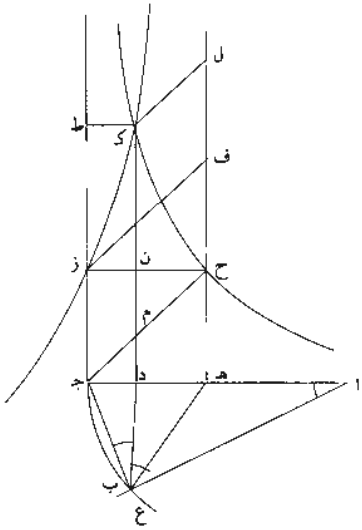
نوع أول	نوع ثاني	نوع ثالث	نوع رابع
ا ب جـ	ب د ح	هـ ب جـ	د ب جـ
٣٣١	٢٣٢	١٥١	٢٤١

8 وتكون: ويكون [ا] – 9 توتر زواياه: يوترها بزواياه [ا] / الأربع: كذا والأفصح «الأربعة» – 11 جزء: أي من قائمتين – 12 فإذا أوترت: فاذا وترت [ا] – 14 المسبع: أثبتها في الهامش [م] / ولنبتدئ: ونبتدئ [ا] / بالمثلث: نجد في هامش [ا] «مثلث» مع «٣٣١» تحتها / واحدة من: واحد من [ا، م].

زاوية ب جـ د، فخط ب د مثل خط ب جـ. ولأن مثلث جـ ب د شبيه بمثلث ا ب جـ، يكون نسبة ا جـ إلى جـ ب كنسبة ب جـ إلى جـ د، فضرب ا جـ في جـ د مثل مربع ب جـ. ونجعل زاوية د ب هـ مثل زاوية ب ا جـ، فيكون مثلثا ا ب د د ب هـ متشابهين، ويكون زاوية ب هـ د مثل زاوية ا ب د، وزاوية ا ب د جزآن من سبعة، فزاوية ب هـ جـ جزآن من سبعة، وزاوية جـ ب هـ جزآن من سبعة. فخط هـ جـ مثل خط جـ ب. ولأن مثلث د ب هـ شبيه بمثلث ا ب د، يكون ضرب ا د في د هـ مثل مربع د ب، ود ب مثل ب جـ، فضرب ا د في د هـ مثل ضرب ا جـ في جـ د، وب جـ مثل جـ هـ، فضرب ا د في د هـ مثل / مربع جـ هـ، وضرب ا جـ في جـ د مثل مربع جـ هـ. فنعمل م-٣-و على خط هـ جـ مربعًا قائم الزوايا، وليكن مربع جـ هـ ح ز. ونخرج خطي جـ ز هـ ح على استقامة إلى ط وإلى ل، ونتوهم القطع الزائد الذي لا يقع عليه خطا هـ جـ جـ ط يمرّ بنقطة ح، وليكن قِطْع ح ك. ونخرج من نقطة د خطًا موازيًا لخط جـ ط، فهو يلقى هذا القطع، فليلقه على / نقطة ك، وهذا الخط يقطع خط ز ح، فليلقه على نقطة ن. ١-٢٠٢-و ونفصل ح ف مثل ح هـ ونصل خطي ف ز ح جـ. فخط ح جـ يقطع خط د ن، فليقطعه على نقطة م. فيكون جـ د مثل د م، ود هـ مثل ح ن. ونخرج ك ط موازيًا لـ د جـ. فلأن خطي هـ جـ جـ ط لا يقعان على قطع ح ك، يكون ضرب ك د في د جـ مثل ضرب ح هـ في هـ جـ، الذي هو مربع جـ هـ. لكن ضرب ا جـ في جـ د مثل مربع جـ هـ، فخط ك د مثل خط ا جـ وجـ د مثل د م. فيبقى ك م مثل ا د، وضرب ا د في د هـ مثل مربع جـ هـ، فضرب ك م في ن ح مثل مربع هـ جـ، ونسبة ن ح إلى ح م كنسبة ز ح إلى جـ ح؛ فنسبة ضرب ك م في ن ح إلى ضرب ك م في م ح كنسبة ز ح إلى ح جـ، التي هي نسبة مربع ز ح إلى ضرب ز ح في ح جـ، أعني ضرب ح جـ في د ن. وضرب ك م في ن ح مثل مربع ز ح، فضرب ك م في م ح مثل ضرب ح جـ في ن د. ونخرج ك ل موازيًا لـ م ح، فيكون ضرب م ك في ك ل مثل ضرب ح ف في ف ز، فالقطع الزائد الذي لا يقع عليه خطا جـ ح ح ل يمر بنقطتي ز ك، وليكن قطع

3-2 مثل مربع ب جـ: أثبتها في الهامش [م] – 6 ا ب د: ا ب جـ [ا، م] – 9 مربع: ناقصة [ا] – 12 يقطع: يقع، ثم ضرب عليها بالقلم وأثبت الصواب في الهامش [م] / ن: ز [ا] – 13 ح ف: حـ ف [ا] / د ن: د ر [ا، م] – 14 ح ن: ح د [ا] / ك ط: كر، ثم أثبت الصواب في الهامش [م] وكذلك في [ا] – 16 لكن: ليكن [ا] – 18 ك م: ك ع [ا، م] / ن ح: ز ح [ا] / ح م: حـ م [ا] – 19 جـ ح: ح ك [ا، م] – 20-21 ح جـ في د ن: ح د في د ر [ا، م] وأعاد ناسخ [م] كتابة حرف د عليه – 21-22 ح جـ في ن د: ح ف في و د [ا] ح ف في د ر [م]؛ وقد يقرأ القسم الأول ح ف، وهذا ليس يغير المعنى، فـ ح ف مثل د ن وف ز مثل ح جـ – 23 ف ز: أعاد كتابتها في الهامش [م] / ح ل: حـ ل [ا].

زك. فإذا كان مربع هـ ز معلوم القدر والوضع، كان قِطعا زك حك معلومي الوضع، وكانت نقطة ك معلومة،/ وكانت نقطة د معلومة، وهي التي تعمل المسألة. م-٣-ظ



فلنركب هذا التحليل:

فلنفرض خطًا معلومًا كيفما اتّفق، وليكن هـ جـ. ونعمل عليه مربعًا، وليكن / هـ ح ز جـ؛ ونصل جـ ح ونخرج هـ ح جـ ز على استقامة، ونفصل ح ف مثل ح هـ ا-٢٠٢-ظ ونصل ف ز، ونجيز على نقطة ح القطع الزائد الذي لا يقع عليه خطا هـ جـ جـ ز؛ وليكن قطع ح ك. ونجيز على نقطة ز القطع الزائد الذي لا يقع عليه خطا جـ ح ح ف، فهذا القطع يقطع قطع ح ك لأن هذا القطع يقرب أبدًا من خط ح ل إذا أخرج ح ل على استقامة، وقطع ح ك يبعد أبدًا عن خط ح ل إذا أخرج ح ل على استقامة؛ فليتقاطع القطعان على نقطة ك. ونخرج ك د موازيًا لـ جـ ز، وك ط موازيًا لـ جـ هـ، وك ل موازيًا لـ م ح، ونجعل جـ ا مثل د ك، ونجعل ا مركزًا، ونُدير ببُعد ا جـ دائرة؛ ولتكن دائرة جـ ب ع. ونخرج جـ ب مثل جـ هـ، ونصل ا ب ب د ب هـ. فلأن ا جـ مثل ك د، يكون ضرب ا جـ في جـ د مثل ضرب ك د في د جـ، الذي هو مثل ضرب د ك في ك ط، الذي هو مثل ضرب ز ح في ح هـ، الذي هو مثل مربع جـ هـ. فضرب

2 د: أعاد كتابتها فوق السطر [م] / التي: أثبتها في الهامش [م] / تعمل: نعمل [ا] – 4 خطًا: أثبتها فوق السطر [م] – 5 ح ف: ح ر [ا، م] – 6 ف ز: و ر [ا، م] – 7 جـ ح: د ح [ا] – 10 فليتقاطع: فليتقاطعا، ثم صححها عليها [ا] / القطعان: لقطعتان [ا] / لـ جـ ز: لحد [ا] – 12 ولتكن: وليكن [ا].

ا جـ في جـ د مثل مربع جـ هـ، أعني مربع جـ ب. فلأن كـ د مثل جـ ا وجـ د مثل د م، يكون ا د مثل كـ م؛ ولأن ضرب م كـ في كـ ل مثل ضرب جـ ز في ز ف، يكون ضرب كـ م في م ح مثل ضرب ز جـ في جـ ح. ونسبة م ح إلى ح ن كنسبة جـ ح إلى ح ز. فنسبة ضرب كـ م في م ح إلى ضرب كـ م في ح ن كنسبة ضرب جـ ح في ح ز إلى مربع ح ز، التي هي نسبة ضرب ف ز في ز ح إلى مربع ز جـ، وضرب كـ م في م ح مثل ضرب ف ز في ز جـ، فضرب كـ م في ح ن مثل مربع ز جـ، الذي هو مربع جـ هـ. ون ح مثل د هـ، وكـ م مثل ا د، فضرب ا د في د هـ مثل مربع جـ هـ، أعني مربع جـ ز. ولأن ضرب ا جـ في جـ د مثل مربع جـ ب، يكون مثلث جـ ب د شبيها بمثلث ا ب جـ،/ فزاوية ب د جـ مثل زاوية ا ب جـ، وزاوية جـ ب د مثل زاوية ٤٠ - و ب ا جـ؛/ وزاوية ا ب جـ مثل زاوية ا جـ ب، فزاوية ب د جـ مثل زاوية ب جـ د، فخط ٢٠٣ - و ب د مثل خط ب جـ. فضرب ا د في د هـ مثل مربع د ب، فزاوية ب هـ د مثل زاوية ا ب د، وزاوية د ب هـ مثل زاوية ب ا د، فزاوية د ب هـ مثل زاوية جـ ب د. ولأن مثلث ا ب جـ شبيه بمثلث جـ ب د، يكون نسبة ا ب إلى ب جـ كنسبة ب د إلى د جـ وب جـ مثل ب د وب د مثل هـ جـ. فنسبة ا ب إلى ب د كنسبة هـ جـ إلى جـ د، ونسبة هـ جـ إلى جـ د كنسبة ا جـ إلى جـ هـ وكنسبة ا هـ الباقي إلى هـ د الباقي. فنسبة ا ب إلى ب د كنسبة ا هـ إلى هـ د، فزاويتا ا ب هـ هـ ب د متساويتان. فالزوايا الثلاث التي عند نقطة ب متساوية.

فإذا فصل من زاوية ا جـ ب زاوية مثلُ زاوية جـ ب د، وقسمت الزاوية الباقية بنصفين، كانت الزوايا الثلاث مثل الزوايا الثلاث التي عند نقطة ب، فيصير زوايا مثلث ا ب جـ مقسومة بسبع زوايا متساوية. فإذا عمل في الدائرة مثلث شبيه بمثلث ا ب جـ وقسمت زاويتا قاعدته بزوايا كلُّ واحدة منها مساوية لكل واحدة من الزوايا التي عند نقطة ب، وأخرجت الخطوط التي تقسم الزاويتين إلى محيط الدائرة، ‹انقسم محيط الدائرة› سبعة أقسام متساوية. فإذا أوترت القسيُّ بالخطوط المستقيمة، حدث في الدائرة شكل ذو سبعة أضلاع متساوية ومتساوي الزوايا. فبهذه الطريقة يمكن أن يعمل في الدائرة مسبع متساوي الأضلاع والزوايا؛ وذلك ما أردنا أن نعمل./

3 ضرب (الأولى): أثبتها في الهامش [م] – 8 حـ ز: هكذا في المخطوطتين وهو مثل جـ ب / جـ د: جـ هـ [ا] – 13 ب حـ: ب هـ [ا] – 19 الزوايا (الأولى): الزاويا [ا] – 21 واحدة (الأولى): واحد [ا] – 22 تقسم: بقسم [ ] / الزاويتين: يعني زاوية ب وزاوية حـ.

وأيضًا فإنا / نفرض المثلث المتساوي الساقين، الذي كل واحدة من زاويتيه التي على قاعدته جزآن، والزاوية الباقية ثلاثة أجزاء، ونستخرج المسبع بهذا المثلث. م-٤-ظ ا-٢٠٣-ظ

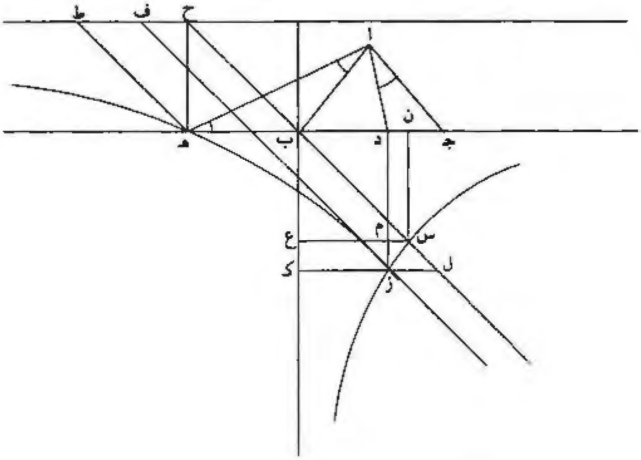
فعلى طريق التحليل:

نفرض أنا قد وجدنا مثلثًا على هذه الصفة؛ وليكن مثلث ا ب جـ. فليكن كلُّ واحدة من زاويتي ب جـ جزأين؛ ويكون زاوية ا ثلاثة أجزاء. ونجعل زاوية ب ا د جزأين، فيكون مثلث ا ب د شبيهًا بمثلث ا ب جـ، لأن زاوية جـ جزآن. فيكون ضرب جـ ب في ب د مثل مربع ب ا. ‹ونخرج جـ ب إلى هـ› ونجعل ب هـ مثل ب ا، فيكون ضرب جـ ب في ب د مثل مربع ب هـ؛ ونصل ا هـ. فيكون زاويتا ب ا هـ ب هـ ا متساويتين، فكل واحدة منهما جزء واحد لأن زاوية ا ب جـ جزآن، وزاوية جـ ا د جزء واحد، لأن زاوية ب ا د جزآن، وزاوية ب ا جـ ثلاثة أجزاء، فيكون زاوية جـ ا د مثل زاوية ا هـ جـ. فيكون مثلث ا د جـ شبيهًا بمثلث ا هـ جـ. فضرب هـ جـ في جـ د مثل مربع ا جـ، وا جـ مثل ا ب، وا ب مثل ب هـ، فضرب هـ جـ في جـ د مثل مربع ب هـ، فضرب هـ جـ في جـ د مثل ضرب جـ ب في ب د. فنقيم على خط هـ ب عمود هـ ح ونجعل هـ ح مثل هـ ب، ونخرج من نقطة ح خط ح ط موازيًا لخط ب هـ. ونجعل ح ط مثل هـ ب، ونصل ح ب ط هـ، ونخرج ح ب على استقامة في جهة ب ونقيم على خط ب هـ عمود ب ك ونجعل ب ك مثل ب جـ. ونخرج من نقطة ك خطًا موازيًا لخط ب جـ، وليكن ك ل؛ فهو يلقى خط ح ب، فليلقه على نقطة ل. فيكون ل ك مثل ك ب، لأن ب هـ مثل هـ ح. ونخرج من نقطة د خطًا موازيًا لخط ب ك، وليكن د ز، فهو يقطع خط ب ل، فليقطعه على نقطة م. ونخرج من نقطة ز خطًا موازيًا لخط ل ح، فليكن ز ف. ونجعل ب ن مثل ب هـ. ونخرج ن س موازيًا لـ ب ك، وس ع موازيًا لـ ب جـ، فيكون ن ع مربع ب هـ، ويكون ضرب ب ك في ك ز مساويًا لمربع ب هـ، فيكون ضرب د ز / في ز ك مثل ضرب ن س في س ع. / فالقطع الزائد الذي يمرّ بنقطة س ‹و›الذي لا يقع عليه خطا د ب ب ع يمرّ بنقطة ز، فليكن ذلك القطع قطع س ز. ا-٢٠٤-و م-٥-و

1 واحدة: وحده [م] واحد [ا] / التي: جائزة على ضعف والأولى «اللتين» – 4 أنا: أن [ا] / واحدة: واحد [ا] – 5 جزأين: كتبها دائمًا «جزئين» [ا، م] – 7-8 ب ا ... مثل مربع: ناقصة [ا] – 8 ب ا هـ: ب ر هـ [ا] – 11 ا هـ جـ: ر هـ حـ [ا] – 13 فنقيم: فيقسم [ا] / هـ ب: ب هـ [ا] – 14 هـ ب (الأولى): ب هـ [ا] – 15 ح ب: حـ ب [ا، م] – 17 ح ب: حـ ب [ا] – 18 يقطع: يقع، ثم أثبت «يقطع» في الهامش مع «ظ» فوقها [م] – 19 ز: و [ا، م] – 20 ز ف: د ف [ا، م] / ب ن: د ن [ا، م] / ب هـ: د هـ [ا، م] / لـ ب ك: أعاد كتابتها في الهامش [م] – 21 ن ع: ل ع [ا] – 22 الذي: أثبتها في الهامش [م].

ولأن نسبة ل ب إلى ب ك المساوي لـ ب جـ كنسبة ح ب إلى ب هـ وكنسبة الجميع إلى الجميع، فنسبة ل ح إلى هـ جـ كنسبة ح ب إلى ب هـ التي هي نسبة ضرب ح ب في ب هـ إلى مربع ب هـ. فنسبة ضرب ل ح في جـ د إلى ضرب هـ جـ في جـ د كنسبة ضرب ح ب في ب هـ إلى مربع ب هـ. وضرب هـ جـ في جـ د مثل مربع ب هـ، فضرب ل ح في جـ د مثل ضرب ح ب في ب هـ، وجـ د مثل ل ز، ول ز مثل ح ف، ول ح مثل ز ف، فضرب ف ز في ز ل مثل ضرب ح ب في ب هـ، أعني ط هـ في هـ ب. فالقطع الزائد الذي يمرّ بنقطة هـ ولا يقع عليه خطا ل ح ح ط يمرّ بنقطة ز، فليكن ذلك القطعُ قطعَ هـ ز. فنقطة ز هي تقاطع قطعين زائدين. فإذا كان خط ب هـ معلوم القدر والوضع، كان سطح ب ط معلوم القدر والصورة، وكان مربع ن ع معلوم القدر والصورة، فكانت نقطة س منه معلومة، وكان خطا ك ب ب جـ معلومي الوضع، وكان قطع س ز معلوم الوضع، وكان خطا ح ل ح ط معلومي الوضع، ونقطة هـ تكون معلومة. فقطع هـ ز يكون معلوم الوضع، فنقطة ز هي تقاطُع قطعين معلومي الوضع.

فإذا أُخرج / من نقطة ز عمود ز د، وأُخرج عمود ز ك ل، وجعل ب جـ مثلَ ل ك، ا-٢٠٤-ظ
كان د جـ مثلٍ ل ز، فكان ضرب / جـ ب في ب د مثلَ مربع ب هـ المعلوم، وكان خطا م-٥-ظ
ب ا ا جـ كلٌ واحد منهما مساوٍ لخط ب هـ المعلوم.



1 ح ب إلى ب هـ: ح ر إلى ر هـ [ا] – 2 هـ جـ: هـ ح [ا، م] / ح ب: ح ر [ا] / ب هـ: ر هـ [ا] / هي: أثبتها تحت السطر [ا] – 5 جـ د (الأولى): ل د [ا، م] – 8 تقاطع: يقاطع [ا] – 9 القدر: العدد [ا] / ب ط: ر ط [ا] – 10 ب جـ: ب ح [ا] – 11 وكان: فكان [ا، م] – 12 تقاطع: يقاطع [ا] – 14 ز د: ز [ا] – 15 مثل (الأولى): كتب بعدها «ل ك كان ز ك مثل»، ثم ضرب عليها بالقلم [م] – 16 مساوٍ: مساوي [ا، م] / لخط: بخط [ا].

فلنركبْ هذا التحليل:

فنفرض خطًا معلومًا، وليكن ب هـ. ونجعل ب ن مثل ب هـ، ونعمل على ب ن مربعًا، وليكن ب ن س ع. ونجيز على نقطة س القطعَ الزائد الذي لا يقع عليه خطا ن ب ب ع، وليكن قطع س ز. ونصل ب س، وننفذه في الجهتين إلى ح وإلى ل، ونخرج من نقطة هـ عمود هـ ح، ونجعله مثل هـ ب، ونخرج ح ط موازيًا لـ ب هـ وهـ ط موازيًا لـ ب ح؛ ونجيز على نقطة هـ القطع الزائد الذي لا يقع عليه خطا ل ح ح ط. فهذا القطع يقطع قطع س ز لأنه يقرب أبدًا من خط ح ل، فليقطعْه على نقطة ز. ونخرج من نقطة ز خط ز د موازيًا لخط كـ ب، ونخرج كـ ز ل موازيًا لخط ب د، ونجعل د جـ مثل ز ل. فيكون ب جـ مثل كـ ل، أعني كـ ب. فيكون ضرب جـ ب في ب د مثل مربع ن ع الذي هو مربع ب هـ. فيكون ضرب ف ز في ز ل مثل ضرب ط هـ في هـ ب ونسبة ل ب إلى ب كـ – أعني ب جـ – كنسبة ح ب إلى ح هـ – أعني ب هـ – وكنسبة ح ل إلى هـ جـ، فنسبة ح ب إلى ب هـ – أعني نسبة ضرب ط هـ في هـ ب إلى مربع هـ ب – كنسبة ح ل إلى هـ جـ. فنسبة ضرب ط هـ في هـ ب إلى مربع هـ ب كنسبة ضرب ح ل في د جـ إلى ضرب هـ جـ في جـ د، وجـ د مثل ل ز، وح ل مثل ف ز. فنسبة ضرب ف ز في ز ل إلى ضرب هـ جـ في جـ د هي نسبة ضرب ط هـ في هـ ب إلى مربع هـ ب. وضرب ف ز في ز ل مثل ضرب ط هـ في هـ ب، فضرب هـ جـ في جـ د مثل مربع ب هـ، فضرب هـ جـ في جـ د مثل ضرب جـ ب في ب د، فنسبة هـ جـ إلى جـ ب كنسبة ب د إلى د جـ؛ وهـ جـ أعظم من جـ ب، فـ د ب / أعظم من د جـ، فـ ب ن أعظم بكثير من د جـ. فخطا ب هـ ب ن أعظم بكثير ا-٢٠٥-و من ب جـ. فقد يمكن أن يُعمل من خطوط هـ ب ب ن ب جـ مثلث؛ فليكن ذلك مثلث ب ا جـ. فيكون كلُّ واحد من خطي ب ا جـ ا مثلَ خط ب هـ، فضرب جـ ب في ب د مثل مربع ب ا، فمثلث ا ب د شبيه بمثلث / ا ب جـ، فزاوية ب ا د مثل زاوية م-٦-ر ا جـ ب، وزاوية ا د ب مثل زاوية ب ا جـ. وضرب هـ جـ في جـ د مثل مربع ب هـ، فهو مثل مربع جـ ا. فمثلث ا د جـ شبيه بمثلث ا هـ جـ، فزاوية جـ ا د مثل زاوية ا هـ جـ، وزاوية ا ب جـ ضعفُ زاوية ا هـ جـ لأن ا ب مثلُ ب هـ. فزاوية ا ب جـ ضعف زاوية

2 ب ن (الأولى): ب ل [ا] – 8 لخط: بخط [ا] / كـ ب: كـ ر [ا] / لخط: بخط [ا، م] – 10 ن ع الذي هو مربع: أثبتها فوق السطر [ا] – 11-12 أعني ... إلى ب هـ: أثبتها في الهامش [م] – 12 هـ جـ: ح جـ [ا، م] – 13 هـ ب (الثانية): ب هـ [ا] – 16 هـ ب (الثالثة): هـ ر [ا] – 18 ب د (الأولى): ب ر [ا] – 19 ب ن (الثانية): ر ل [ا] – 20 ب ن: ب ل [ا] – 24 فزاوية: وزاوية [ا].

جـ ا د، وزاوية ا ب جـ مثل زاوية ا جـ د، فزاوية ا جـ د ضعف زاوية جـ ا د، فزاوية ا د ب ثلاثة أمثال زاوية جـ ا د؛ وزاوية ا د ب مثل زاوية ب ا جـ. فزاوية ب ا جـ ثلاثة أمثال زاوية جـ ا د، ومثلث ا ب جـ متساوي الساقين اللذين هما ا ب ا جـ. فكل واحدة من زاويتي ا ب جـ ا جـ ب جزآن بالمقدار الذي به زاوية ب ا جـ ثلاثة أجزاء.

فإذا عُمل في الدائرة مثلث شبيه بمثلث ا ب جـ وقُسمت كل واحدة من زاويتي قاعدته بنصفين وفُصل من زاوية رأسه مثلُ زاوية قاعدته وقُسمت بنصفين، انقسمت زوايا المثلث سبعةَ أقسام متساوية. فإذا أخرجت الخطوط التي تفصل الزوايا إلى محيط الدائرة، انقسم محيط الدائرة سبعة أقسام متساوية. / فإذا أوترت بالخطوط المستقيمة، حدث في الدائرة مسبع متساوي الأضلاع والزوايا؛ وذلك ما أردنا أن نعمل. - ٢٠٥ - ص

وأيضًا فإنا نفرض المثلث المتساوي الساقين، الذي كل واحدة من زواياه التي على قاعدته جزء واحد، وزاوية رأسه خمسة أجزاء؛ ويُستخرج المسبعُ بهذا المثلث./

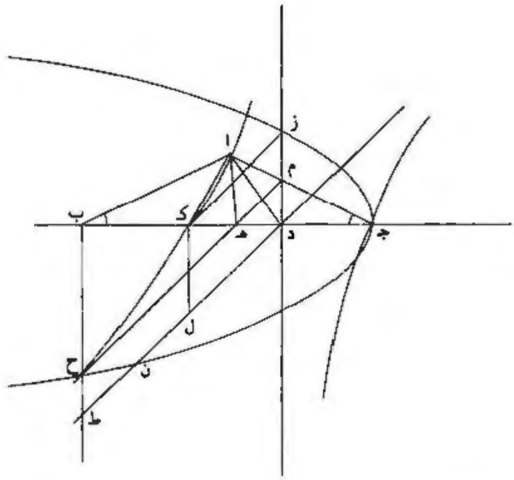
- ٦ - ظ

فعلى طريق التحليل:

نفرض أنا قد وجدنا مثلثًا على هذه الصفة؛ وليكن مثلثَ ا ب جـ، وليكن كلُّ واحدة من زاويتي ا ب جـ ا جـ ب جزءًا واحدًا. ويكون زاوية ب ا جـ خمسة أجزاء. ونجعل زاوية جـ ا د مثل زاوية ا ب جـ، ونجعل زاوية د ا هـ أيضا مثل زاوية ا ب جـ. فلأن زاوية جـ ا د مثل زاوية ا ب جـ، يكون مثلث ا جـ د شبيها بمثلث ا ب جـ، فيكون نسبة ب جـ إلى جـ ا كنسبة ا جـ إلى جـ د. فضرب ب جـ في جـ د مثل مربع جـ ا. وجـ ا مثل ا ب، فضرب ب جـ في جـ د مثل مربع ا ب. ولأن زاوية د ا هـ مثل زاوية ا ب د، يكون مثلث ا د هـ شبيهًا بمثلث ا ب د، فضرب ب د في د هـ مثل مربع د ا؛ ود ا مثل د جـ، لأن زاوية جـ ا د مثل زاوية ا جـ د. فضرب ب د في د هـ مثل مربع د جـ. ولأن كلَّ واحدة من زاويتي جـ ا د د ا هـ مساوية لزاوية ا ب د المساوية لزاوية ا جـ د، يكون زاوية ا هـ ب ثلاثة أمثال زاوية ا جـ ب؛ وزاوية ب ا جـ خمسة أمثال زاوية ا جـ ب، وزاوية هـ ا جـ ضعفَ زاوية ا جـ ب. فزاوية ب ا هـ ثلاثة أمثال زاوية ا جـ ب، فزاوية

1 وزاوية ا ب جـ ... زاوية جـ ا د: ناقصة [ا] – 2-3 وزاوية ا د ب ... زاوية جـ ا د: كررها ثم ضرب عليها بالقلم [م] – 3 ومثلث: فمثلث [ا، م] – 4 ا جـ ب: ا د ب [ا، م] – 5 عُمل: عملت [ا، م] – 12 فعلى: على [ا] – 13 الصفة: أثبتها في الهامش [م] – 14 ا جـ ب: ا جـ د [ا] – 17 وجـ ا: الواو مكررة [ا] – 21 واحدة: واحد [ا، م].

ب ا هـ مثل زاوية ا هـ ب، فخط ا ب مثل خط ب هـ. فضرب ب جـ في جـ د مثل مربع هـ ب.



ونجعل د ك مثل د جـ، ونقيم على نقطة ك عمود ك ل، ونجعله مساويًا لـ ك د، ونقيم أيضًا على نقطة د عمود د ز ونجعله مساويًا لـ د ك، ونصل ز ك د ل، ونقيم على نقطة ب عمود ب ح، ونجعله مساويًا لـ ب هـ ونصل ح هـ وننفذه إلى م. فيكون د م مثل / د هـ. ونخرج خط د ل إلى أن يلقى خط ب ح؛ فليلقه على نقطة ط. فلأن ا-٢٠٦-و ح ب موازٍ لـ م د، يكون نسبة ح هـ إلى هـ ب كنسبة م هـ إلى هـ د وكنسبة ح م إلى ب د، ونسبة ح هـ إلى هـ ب كنسبة ز ك إلى ك د، فنسبة ح م إلى ب د كنسبة ز ك إلى ك د، ونسبة ح م إلى ب د هي نسبة ضرب ح م في هـ د إلى ضرب ب د في هـ د، فنسبة ضرب ح م في هـ د إلى ضرب ب د في هـ د هي نسبة ز ك إلى ك د، أعني نسبة ز ك إلى ك ل التي هي نسبة / ضرب ز ك في ك ل إلى مربع ك ل. وضرب م-٧-و ب د في هـ د مثل مربع د جـ المساوي لـ ك ل، فضرب ح م في هـ د مثل ضرب ز ك في ك ل. وهـ د مثل د م، ود م مثل ح ط، فضرب ح م في ح ط مثل ضرب ز ك في ك د. فالقطع الزائد الذي يمرُّ بنقطة ك ولا يقع عليه خطا ز د د ط يمرّ بنقطة ح. فليكن ذلك القطع قِطعَ ك ح. ولأن ضرب ب جـ في جـ د مثل مربع هـ ب، وهـ ب مثل ب ح، يكون القطع المكافئ – الذي سهمه ب جـ وضلعه القائم د جـ ورأسه نقطة جـ –

5 لـ ب هـ: لب [ا] / وننفذه: ونبعده [ا] – 6 د ل: د ن [ا، م] – 7 هـ ب: هـ د [ا، م] – 8 ك د: ك ر [ا] – 9 نسبة: كنسبة [ا] – 9-10 إلى ضرب ب د في هـ د: ناقصة [ا] – 10 إلى (الأولى): ناقصة [ا] – 12 د جـ: ر جـ [ا، م] / هـ د: د هـ [ا] – 16 ب ح: ب حـ [ا].

يمرّ بنقطة ح. فليكن ذلك القطعُ قطعَ جـ ح. فنقطة ح على تقاطع القطعين. فإذا كان د جـ معلومًا، كان القطعان معلومي الوضع. وكانت نقطة ح معلومةً وكانت نقطتا هـ ب معلومتين.

فلنركبْ هذا التحليل:

فنفرض خطًا معلومًا، وليكن جـ ك؛ ونقسمه بنصفين على نقطة د، ونقيم على نقطتي د ك عمودين؛ وليكونا د ز ك ل. ونجعل كل واحد من د ز ك ل مساويًا لـ ك د، ونصل ز ك د ل، ونخرج د ل على استقامة إلى ط. ونجيز على نقطة ك القطع الزائد الذي لا يقع عليه خطا ز د د ط؛ / وليكن قطع ك ح. ونخرج د ك على استقامة في جهة ك، ونرسم على نقطة جـ القطع المكافئ الذي سهمه جـ ك ورأسه نقطة جـ وضلعه القائم خط جـ د؛ وليكن قطع جـ ح. فهذا القطع يقطع خط د ط لأن كلَّ خط يقطع سهم القطع المكافئ، فهو يقطع محيط القطع على نقطتين عن جنبتي السهم. فقطع جـ ح يقطع خط د ط؛ ثم إذا تجاوز خط د ط، بَعُدَ عن خط د ط، وذلك أن الخط الذي يخرج من نقطة التقاطع مماسًا للقطع يقطع خط د ط. وإذا أخرج في الجهتين، بَعُدَ عن خط د ط. والقطع دون الخط المماسّ / قطع جـ ح المكافئ؛ إذا بَعُدَ عن نقطة التقاطع، بَعُدَ عن خط د ط. وقطع ك ح كلما خرج، قَرُبَ من خط د ط. فمن أجل ذلك يلزم أن يتقاطع القطعان؛ فليتقاطع القطعان على نقطة ح. ونخرج عمود ح ب على سهم القطع المكافئ. ونخرج من نقطة ح أيضًا خطًا موازيًا لخط ز ك؛ وليكن ح هـ م. فيكون كل واحد من مثلثي ح ب هـ هـ د م شبيهًا بمثلث د ك ل. فيكون ح ب مثل ب هـ وهـ د مثل د م، ويكون نسبة ح هـ إلى هـ ب كنسبة ل د إلى د ك وكنسبة م هـ إلى هـ د وكنسبة ح م إلى ب د. فنسبة ح م إلى ب د كنسبة ل د إلى د ك، أعني نسبة ز ك إلى ك ل. فنسبة ضرب ح م في هـ د إلى ضرب ب د في د هـ كنسبة ز ك إلى ك ل التي هي نسبة ضرب ز ك في ك ل إلى مربع ك ل. وهـ د مثل د م ود م مثل ح ط، فنسبة ضرب ح م في ح ط إلى ضرب ب د في د هـ كنسبة ضرب ز ك في ك ل إلى مربع ك ل. وضرب ح م في ح ط مثل ضرب ز ك في ك ل، فضرب ب د

ص-٢٠٦-

ظ-٧-ق

6 ك ب (الأولى): ك د [ا، م] – 7 د ل (الأولى): د ن [ا] – 10 بقطع (الثانية): يقع [ا] – 12 حـ ح: د ح [ا، م] 13 د ط: ز ط [ا، م] – 18 ح ب: ح د [ا، م] – 19 هـ ب: هـ د [ا، م] / كنسبة ل د إلى د ك: مكررة مع ما قبلها [ا] / ل د: ن د [ا، م] – 23 ح م: ب ح م [ا، م] / ب د: ز د [ا، م] – 24 ك ل (الثالثة): ك ب [ا، م] فضرب: وضرب [ا، م].

في د هـ مثل مربع ك ل . أعني ‹مربع› د ك. ود ك مثل د جـ. فضرب ب د في د هـ مثل مربع د جـ. ولأن ك جـ ضعفُ جـ د، يكون ضرب ك جـ في جـ د ضعف مربع ك ل. فيكون نقطة ل في داخل / القطع، فالقطع يقطع خط د ط من وراء نقطة ل، ا-٢٠٧-و فنقطة ح من وراء نقطة ل، فخط ح ب من وراء خط ك ل. فخط ب د أعظم من خط د ك. وضرب ب د في د هـ مثل مربع د ك. فـ د هـ أصغر من د ك، فهو أصغر من د جـ. وهـ جـ أقلُّ من ضعف د جـ. وضرب ب جـ في جـ د مثل مربع ح ب. وح ب مثل ب هـ. فضرب ب جـ في جـ د مثل مربع هـ ب. فضرب ب جـ في جـ هـ أقلّ من ضعف مربع هـ ب؛ فـ هـ جـ أصغر من هـ ب. فضعف هـ ب أعظم من ب جـ. فيمكن أن يعمل على خط ب جـ مثلث متساوي الساقين يكون قاعدته خط ب جـ وضلعاه الباقيان / كلٌّ واحد منهما مساوٍ لـ ب هـ؛ فليكن ذلك المثلث مثلث ا ب جـ. ونصل ا د ٨٠ و ا هـ. فلأن ا جـ مثلُ هـ ب، يكون ضرب ب جـ في جـ د مثل مربع جـ ا؛ فمثلث ا جـ د شبيه بمثلث ا ب جـ. ونسبة ب جـ إلى جـ ا كنسبة ا جـ إلى جـ د. فزاوية جـ ا د [شبيه بمثلث] ‹مساوية لزاوية› ا ب جـ المساوية لزاوية ا جـ ب. فزاوية جـ ا د مثل زاوية ا جـ ب. فخط ا د مثل خط د جـ. فضرب ب د في د هـ مثل مربع د ا. فمثلث ا د هـ شبيه بمثلث ا ب د. فزاوية د ا هـ مثل زاوية ا ب د المساوية لزاوية ا جـ د. فبالمقدار الذي به زاويةُ ا جـ ب جزء واحد، ‹تكون› به زاوية ا هـ ب ثلاثة أجزاء. ولأن ا ب مثل ب هـ، يكون زاوية ب ا هـ مثل زاوية ب هـ ا، فزاوية ب ا هـ ثلاثة أجزاء بالمقدار الذي به زاوية ا جـ ب جزء واحد، وزاوية جـ ا هـ بهذه الأجزاء جزآن. فزاوية ب ا جـ خمسة أجزاء بالأجزاء التي بها كلُّ واحدة من زاويتي ا ب جـ ا جـ ب جزء واحد. فإذا عمل في الدائرة مثلث شبيه بمثلث ا ب جـ – وفصلت زاوية ب ا جـ بزوايا كل واحدة منها مساوية لزاوية ا ب جـ – انقسمت زوايا المثلث سبعة أجزاء متساوية. وإذا أخرجت الخطوط حتى تلقى محيط الدائرة، انقسمت الدائرة سبعة أقسام متساوية. فإذا أوترت القسيّ بخطوط مستقيمة / حدث في الدائرة مسبع متساوي الأضلاع والزوايا؛ وذلك ما أردنا أن نعمل. ا-٢٠٧-ظ

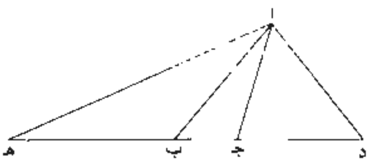
وأيضاً فإنا نفرض المثلث الذي إحدى زواياه جزء واحد، والزاوية الأخرى جزآن، والزاوية الباقية أربعة أجزاء؛ ونستخرج المسبع بهذا المثلث.

3 ل (الأولى والثانية): ن [ا] – 4 ل: ن [ ] – 9 يعمل: نعمل [ ] – 10 مساو: مساوي [م] – 13 فزاوية: زاوية [، م] – 22 تلقى: يلقى [ ] القسي: أثبتها في الهامش [م] بخطوط: بالخطوط [ ].

فعلى طريق التحليل:

نفرض أنا قد وجدنا مثلثا على هذه الصفة؛ وليكن مثلث ا ب جـ، وليكن زاوية ا منه / جزءًا واحدًا وزاوية ب منه جزأين وزاوية جـ منه أربعة أجزاء. ونجعل زاوية ب جـ د جزءًا واحدًا، فيكون زاوية ا جـ د ثلاثة أجزاء ويكون زاوية ا د جـ أيضًا ثلاثة أجزاء، لأنها مثل زاويتي ا ب جـ ب جـ د. فيكون مثلث ا جـ د هو المثلث الأول من المثلثات التي استخرجناها. فإذا استخرجنا المثلث الأول، كان شبيهًا بمثلث ا د جـ. فإذا جعلنا زاوية د جـ ب مثل زاوية جـ ا د، صارت زاوية ا جـ ب أربعة أجزاء وصارت زاوية ا ب جـ جزأين. وأيضًا فإنا إذا جعلنا زاوية ب جـ هـ جزأين، كانت زاوية جـ هـ ب ثلاثة أجزاء لأن زاوية هـ ب جـ جزآن. فيكون مثلث ب هـ جـ هو المثلث الثاني من المثلثات التي استخرجناها. فإذا جعلنا زاوية هـ جـ ا مثل زاوية هـ جـ ب، صارت زاوية ا جـ ب أربعة أجزاء وصارت زاوية جـ ا ب جزءًا واحدًا. وأيضًا فإنا إذا جعلنا زاوية ا جـ ز مثل زاوية جـ ا ز، كانت زاوية ز جـ ب ثلاثة أجزاء، فيكون زاوية ا ز جـ خمسة أجزاء، لأنها مثل زاويتي ز جـ ب جـ ب ز. فيكون مثلث ا ز جـ هو المثلث الثالث من المثلثات التي استخرجناها. فإذا جعلنا زاوية ز جـ د مثل زاوية جـ ز د التي هي جزآن لأنها مثل زاويتي ا جـ ز جـ ا ز، صارت زاوية ا جـ د ثلاثة أجزاء. ثم إذا جعلنا زاوية د جـ ب مثل زاوية جـ ا ز، صارت زاوية ا جـ ب أربعة أجزاء وزاوية جـ ا ب جزءًا واحدًا، فيكون زاوية ا ب جـ جزأين. فمثلث ا ب جـ رجع إلى كلٍّ واحد من المثلثات الثلاث التي قدمنا بيانها. فإذا أردنا عمل المسبع بالمثلث الذي إحدى زواياه جزء واحد والزاوية الأخرى جزآن والثالثة أربعة أجزاء، استخرجنا واحدا من المثلثات التي تقدمت وزدنا في إحدى زواياه الزيادة التي بيناها الآن. فنجد بذلك المثلث الذي إحدى زواياه جزء واحد والأخرى جزآن والثالثة / أربعة أجزاء.

م-٨-ظ
ا-٢٠٨-و
م-٩-و



2 ا: ب [ا] – 6 جعلنا: جعلن [ا] – 7 ا ب جـ: أثبتها في الهامش [م] – 9 جزآن: جزئين [ا، م] – 10 أربعة: ابعة [ا] – 12 مثل: أثبتها في الهامش [م] – 15 زاوية ا جـ د: أجزاء [ا] / د جـ ب مثل زاوية: ناقصة [ا] – 16 جزءًا واحدًا: جزء واحد [ا، م] – 18 أردنا: ادرنا [ا].

وقد يمكن أن يُجعل هذا المثلث من غير أن يُردَّ إلى واحد من المثلثات المتقدمة. فلنُعِدِ المثلث ونخرج ب جـ في الجهتين، ونجعل جـ د مثل جـ ا وب هـ مثل ب ا، ونصل ا هـ ا د.

فلأن زاوية ا جـ ب أربعة أجزاء، يكون ا د جـ جزأين وزاوية ‹جـ ا د جزأين وزاوية› ا ب جـ جزأين. فزاوية ‹ب ا د ثلاثة أجزاء وزاويتا› ا ب د ا د ب متساويتان. فخط ا د مثل خط ا ب؛ وا ب مثل ب هـ، فـ ا د مثل ب هـ. ولأن زاوية ا ب جـ جزآن، يكون زاوية ا هـ ب جزءًا واحدًا، فزاوية ا هـ جـ مثل زاوية ب ا جـ. فمثلث ا ب جـ شبيه بمثلث ا هـ جـ. فضرب هـ جـ في جـ ب مثل مربع جـ ا. وجـ ا مثل جـ د، فضرب هـ جـ في جـ ب مثل مربع جـ د. ولأن ا جـ مثل جـ د، يكون زاوية د ا جـ مثل زاوية ا د جـ؛ وزاوية ا جـ ب أربعة أجزاء، فزاوية د ا جـ جزآن؛ وزاوية ا ب جـ جزآن، فزاوية د ا جـ مثل زاوية ا ب جـ. فمثلث ا د جـ شبيه بمثلث ا ب د. فضرب ب د في د جـ مثل مربع د ا؛ ود ا مثل ب هـ، فضرب ب د في د جـ مثل مربع ب هـ. فخط هـ د مقسوم بثلاثة أقسام، وضرب ب د / في د جـ مثل مربع ب هـ، وضرب هـ جـ في جـ ب مثل مربع ا-٢٠٨-ظ جـ د. والخط المقسوم على هذه النسبة هو الذي يُتم مقدمةَ أرشميدس. وهذا الخط هو الذي قسمه أبو سهل الكوهي وركب منه المثلث الذي إحدى زواياه جزء واحد والزاوية الأخرى جزآن والزاوية الثالثة أربعة أجزاء، واستخرج به ضلع المسبع.

ونحن نقسم هذا الخط بطريق غير الطريق الذي قسم به أبو سهل، ونبين قسمته أولاً بالتحليل:

فنجعل جـ ك مثل جـ د ونقيم / على نقطة ك عمود ك ز ونجعله مساويًا لـ ك جـ، م-٩-ظ ونخرج من نقطة ز خطًا موازيًا لـ ك جـ؛ وليكن ز ط. ونجعل ز ط مثل ز ك، ونصل ز جـ ط ك، ونقيم على نقطة جـ عمود جـ ل ‹على خط ب جـ ونخرج ب ح عمودًا على ب جـ ونجعل ب ح مساويًا لـ ب هـ. فخط ب ح يقطع ز جـ على نقطة م›. ونعمل على نقطة د القطع المكافئ الذي سهمه خط د ب وضلعه القائم د جـ. ‹ولأن ح ب مثل هـ ب ومربعَ هـ ب مساوٍ لضرب ب د في د جـ، يكون مربع ح ب مساويًا لضرب ب د

2 ونجعل: ونجعله [ا، م] – 5 ا ب د: ب [ا، م] / ا د ب: د [ا، م] / متساويتان: متساويتين [ا، م] – 6 فـ ا د: فرد [ا] – 8 هـ جـ (الثانية): ب هـ جـ [ا، م] – 12 ب هـ (الثانية): د هـ [ا، م] / مقسوم: مقسومة [ا] – 13 د جـ: د هـ [ا، م] – 19 ك ز: ك د [ا].

في د جـ. فيمرّ القطع المكافئ بنقطة ح›؛ وليكن قطع د ح. ونرسم على نقطة ك القطع الزائد الذي لا يقع عليه خطا ز جـ جـ ل. ‹ولأن ك ز مثل ك جـ، يكون ب م مساويًا لـ ب جـ، فيكون ح م مساويًا لـ هـ جـ. ولكن ضرب هـ جـ في جـ ب مثل مربع جـ د، فيكون ضرب م ح في جـ ب مساويًا لضرب ك ز في ك جـ، ويكون نسبة ح ل إلى ب جـ كنسبة م جـ إلى ب جـ وكنسبة ز جـ إلى ك جـ. فيكون نسبة ضرب ح ل في م ح إلى ضرب ب جـ في م ح كنسبة ضرب ز جـ في ك ز إلى ضرب ك جـ في ك ز، فيكون ضرب م ح في ح ل مثل ضرب ز جـ في ك ز. فيكون ح على القطع الزائد›.

فهذا القطع يقطع قطع د ح لأن هذا القطع، أعني الزائد، يقرب أبدًا من خط جـ ل والقطع المكافئ يقطع جـ ل ثم يتجاوزه ويبعد عنه؛ فليتقاطع القطعان على نقطة ح. فنقطة ح من وراء خط جـ ل، أعني مما يلي نقطة ل لأن القطع الزائد يكون أبدًا من وراء خط جـ ل.

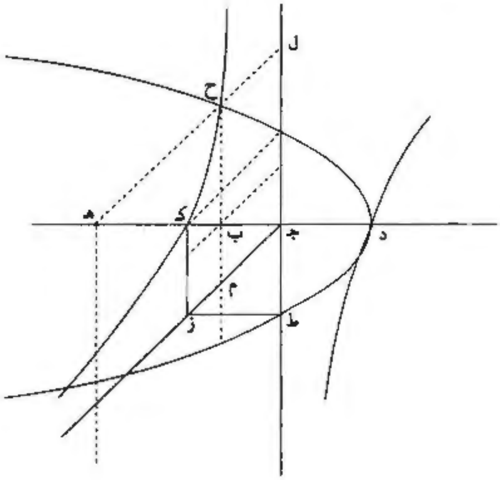
ونخرج من نقطة ح عمود ح ب، ونخرج ح هـ موازيًا لخط ز جـ. فإذا كان خط جـ د معلومًا، كان جـ ك معلوم القدر والوضع. فكان شكل ك ز ط معلوم القدر والصورة. وكانت نقطة ك معلومة. فيكون القطع الزائد معلوم الوضع. ولأن جـ د معلوم القدر، يكون القطع المكافئ / معلوم الوضع. فنقطة ح تكون معلومة، ويكون نقطة ب معلومة ا-٢٠٩-و وهي التي تعمل المثلث.

ولنركب هذا التحليل:

فنفرض خطًا معلومًا، وليكن ك د. ويقسم بنصفين على نقطة جـ. ونقيم على نقطة ك عمود ك ز ونجعله مثل ك جـ. ونخرج من نقطة ز خطًا موازيًا لخط ك جـ. وليكن ز ط. ونجعل ز ط مثل ك جـ، ونصل ز جـ ط ك. ونخرج من نقطة جـ عمود جـ ل، ونجيز على نقطة ك القطع الزائد الذي لا يقع عليه خطا ز جـ جـ ل، ونُجيز على د القطع المكافئ الذي سهمه ك د وضلعه القائم جـ د. فهذا القطع يقطع القطع الزائد للعلة التي ذكرناها من قبل؛ فليتقاطعا على نقطة ح. ونخرج عمود ح ب، ونخرج ح هـ موازيا لـ ز جـ. وننفذ ح ب إلى م. فيكون ح ب مثل ب هـ، وب م مثل ب جـ، فيكون / ح م م-١٠-و مثل هـ جـ وح ل مثل م جـ. فيكون ضرب هـ جـ في جـ م مثل ضرب ح م في م جـ.

1 د ح: د حـ [ا] – 8 د ح: د حـ [ا، م] – 10 ل: ك [ا، م] – 15 تكون: يكون [ا] – 16 وهي: هي [ا] / المثلث: المثله [ا، م] – 20 ز جـ: ز ط [ا] – 23 ح ب: ح حـ [ا، م] – 24 ح ب (١): حـ ب [ا] / وب م: ود م [ا، م].

وضرب ح م في م جـ مثل ضرب ط كـ في كـ جـ. ونسبة م جـ إلى جـ ب كنسبة ز جـ إلى جـ كـ، أعني نسبة ط كـ إلى كـ جـ، التي هي نسبة ضرب ط كـ في كـ جـ إلى مربع كـ جـ. فنسبة ضرب هـ جـ في جـ م إلى ضرب هـ جـ في جـ ب كنسبة ضرب ط كـ في كـ جـ إلى مربع كـ جـ. وضرب هـ جـ في جـ م مثل ضرب ط كـ في كـ جـ. فضرب هـ جـ في جـ ب مثل مربع جـ كـ، أعني جـ د. وضرب ب د في د جـ مثل مربع ح ب. وح ب مثل ب هـ، فضرب ب د في د جـ مثل مربع ب هـ. فقد قسمنا خط هـ د بثلاثة أقسام حتى صار ضرب هـ جـ في جـ ب مثل مربع جـ د، وصار ضرب ب د في د جـ مثل مربع ب هـ.



فلأن ضرب هـ جـ في جـ ب مثلُ مربع جـ د، يكون جـ د أعظم من جـ ب ويكون هـ جـ – الذي هو مجموع هـ ب وب جـ – أعظم من جـ د. ولأن ضرب ب د في د جـ مثل مربع ب هـ، ‹فيكون ب هـ› أعظم من جـ د ويكون / ب د – الذي هو مجموع ١-٢٠٩-ظ ب جـ وجـ د – أعظم من ب هـ. فكل خطين من خطوط هـ ب ب جـ جـ د أعظم من الخط الباقي. فقد يمكن أن يُعمل من هذه الخطوط الثلاثة مثلث؛ وليكن ذلك المثلث مثلث ا ب جـ، وليكن ا ب مثل ب هـ وا جـ مثلَ جـ د. ونصل ا هـ ا د. فيكون ضرب هـ جـ في جـ ب مثل مربع جـ ا. فنسبة هـ جـ إلى جـ ا كنسبة ا جـ إلى جـ ب. فمثلثا

4 مثل: أثبتها في الهامش [م] – 8 ب هـ: د هـ [ا، م] – 10 ب د: ب جـ [ا، م] – 13 يُعمل: نعمل [ا] – 14 ونصل ا هـ ا د: أثبتها في الهامش [م].

اجـب اهـجـ متشابهان. فزاوية جـاب مثل زاوية اهـب التي هي نصف زاوية اب جـ. ولأن ضرب ب د في د جـ مثل مربع ب ا، ود جـ مثل جـا، يكون ضرب ب جـ في جـ د مع مربع جـ ا مثل مربع ب ا. فمثلث اب د متساوي الساقين. فخط د ا مثل خط ب ا، فضرب ب د في د جـ مثل مربع د ا. فمثلث ا د جـ شبيه بمثلث اب د، فزاوية د ا جـ مثل زاوية اب د التي هي مثل زاوية ا د ب. فكلّ واحدة من زاويتي ا د جـ جـا د جزآن بالمقدار الذي به زاوية ب ا جـ جزء واحد. فزاوية ا جـ ب أربعة أجزاء بالمقدار / الذي به زاوية ب ا جـ جزء واحد. فإذا قُسمت زاوية ا جـ ب بنصفين، وقُسم كل نصف منها بنصفين، انقسمت زوايا المثلث سبعة أقسام متساوية. ظ-١٠

وإذا أخرجت الخطوط التي ينقسم بها الزوايا إلى محيط الدائرة، انقسم محيط الدائرة سبعة أقسام متساوية. فإذا أوترت بخطوط مستقيمة، حدث في الدائرة مسبع متساوي الأضلاع والزوايا./

فقد عملنا في الدائرة مسبعًا متساوي الأضلاع والزوايا بكلّ وجه يمكن أن نعمل به المسبع؛ وذلك ما قصدنا له في هذه المقالة. و-٢١٠

7 اجـب: ب جـ [ا، م] – 10 في الدائرة: والدائرة [ا] – 13 المقالة: نجد بعدها «تم والحمد لله ربّ العالمين [م] ،والحمد لله على التمام والصلاة على أفضل الأنام وآله الكرام. تمّ رسم أشكالها على ما في النسخة المنقولة عنها في الليلة المتممة لعشرين من شعبان سنة ١١٥٨ه» [ا].

ا – ١١٩ – ظ
ب – ٢٧٥ – و
جـ – ٢٢٢ – ظ
د – ١٧٩ – ظ
هـ – ٨١ – ظ
ع – ١٤٧ – و
ل – ٤٩٨
س – ١٣٥ – ظ

مقالة لابن الهيثم وهو الشيخ أبو الحسن بن الحسن بن الهيثم
في قسمة الخط الذي استعمله أرشميدس في المقالة الثانية
في *الكرة والأسطوانة*

قال: إن أرشميدس استعمل في الشكل الرابع من المقالة الثانية من كتابه في *الكرة والأسطوانة* خطًّا فرضه مقسومًا على نسبة مخصوصة، ولم يبيّن كيف نقسم ذلك الخط على تلك النسبة. وذلك لأن قسمة ذلك الخط لا تتمّ إلاّ بقطوع المخروطات، ولم يستعمل في كتابه شيئًا من قطوع المخروطات، فلم ير أن يخلط بالكتاب ما ليس من جنسه، فسلّم قسمة الخط تسليمًا معوّلاً على أن ذلك ممكن. ومتى لم يقسم الخط على النسبة التي فرضها، لم يتمّ برهان الشكل الذي استعمله فيه.

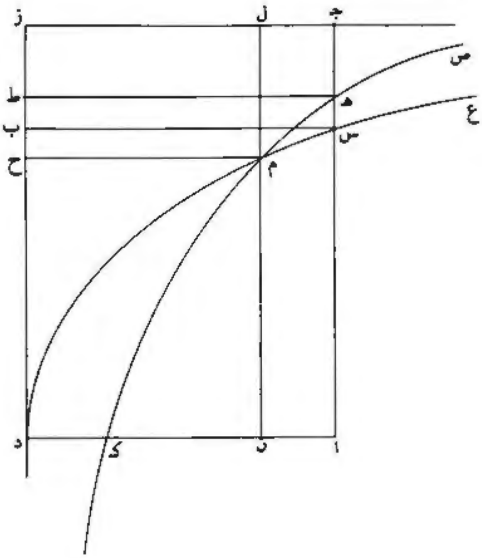
وإذا كان/ ذلك كذلك، رأينا أن نقسم هذا الخط على النسبة التي فرضها ونبيّن إمكان القسمة فيه، ليظهر بذلك صحة ما استعمله أرشميدس. والقسمة التي استعملها أرشميدس هي أن فرض خطًّا عليه $\overline{د ب}$، وجعل كل واحد من $\overline{د ب}$ $\overline{ب ز}$ معلومًا، وفرض هـ – ٨٢ – و

3 مقالة ... بن الهيثم: لابن الهيثم [هـ] قول للحسن بن الهيثم [ا]، نجد بعدها «المصري رحمة الله عليه» [د] – 4 أرشميدس: أضاف بعدها «من الشكل الرابع» [ع] / في: من [ع] / في المقالة الثانية: ناقصة [ا، هـ] – 5 في الكرة والأسطوانة: نجدها في [ع، ا] – 6 قال: ناقصة [ا] / إن: ناقصة [ب، جـ، ل] / من كتابه: ناقصة [ب، جـ، د، هـ، ع، ل] – 7 ولم: وما [ع] / يبين: يتبين [ل] / نقسم: يقسم [جـ] – 8 وذلك لأن: ولأن [ب، جـ، د، ع، ل] / الخط: ناقصة [هـ] / لا: ليس [ا] / تتم: يتم [ا، ع، ل] الياء مهملة في [ب] – 9 فلم: ولم [هـ] / فسلّم: فتسلم [ع، ل]، والأصح لغة وسياقًا ما أثبتناه – 10 أن: ناقصة [ل] / يقسم: نقسم [ل] – 11 يتم: ناقصة [جـ] – 12 وإذا: ولأن [ا] / نقسم: يقسم [جـ] / على النسبة التي فرضها: ناقصة [جـ، د، هـ، ع، ل] – 14 أرشميدس: ناقصة [ب، جـ، د، هـ، ع، ل] / هي: على [ل] / خطًا: فوق السطر [هـ] / $\overline{د ب}$ (الأولى): $\overline{د ر}$ [ب، ع، ل].

نسبة / ب ز إلى ب ط معلومة. ثم قال: ونجعل نسبة ح ز إلى ز ط كنسبة مربع ب د س-١٣٦-و إلى مربع د ح. فنفرض الخط على ما فرضه، ونشرع في قسمته.

فنقيم على نقطتي د ز عمودين، وليكونا د ا ز جـ، ونجعل كل واحد منهما مساويًا لخط ب د المعلوم، ونصل ا جـ، فيكون عمودًا على خط ا د، ونخرج ط هـ موازيًا لخط جـ ز، ونجيز على نقطة هـ القطع الزائد الذي لا يقع عليه خطا جـ ز ز د، وليكن قطع ص هـ كـ، فهذا القطع يقطع خط ا د لأنه يخرج في جهة كـ إلى غير النهاية، وهو لا يلقى خط ز د، فليقطع خط ا د على نقطة كـ.

ونجيز على نقطة د القطع المكافئ الذي سهمه د ا ورأسه نقطة د وضلعه القائم خط د ب، وليكن قطع / د س ع، فهذا القطع يقطع خط ا جـ إذا فرضنا خط ا جـ خارجًا ب-٢٧٥-ظ على استقامة، لأن قطع د س ع يخرج في جهة ع إلى غير النهاية وخط ا جـ عمود على سهمه، فليقطع هذا القطع خط ا جـ على نقطة س.



1 ب ط: ب رط [ب، ع، ل] زط [ا] رط [د] – 2 فنفرض: فيفرض [جـ] / ونشرع: ويشرع [جـ] – 3 د ا: ا د [د] / ز جـ: ر ا [ب، جـ، ع، ل] رح [د] / مساويًا: مساو [ا] – 4 ونصل: ويصل [جـ] / ا جـ: ا ح [ب، جـ، ل] وفي كل النص كتب النساخ [ب، جـ، ل] الجيم حاءً، ولن نشير إليها فيما بعد – 5 عليه: على [هـ] – 6 لا: فوق السطر [ب] – 7 يلقى: يلقا [ا] / خط (الثانية): ناقصة [ب، جـ، ع، ل] – 10 النهاية: نهاية [ا] – 11 خط ا جـ: مكررة [ع].

ولأن قطع د س ع قطع مكافئ وسهمه د ا وضلعه القائم د ب، يكون مربع / ع-١٤٧-ظ ا س مثل ضرب د ب في د ا. ود ب مساوٍ لـ د ا، فمربع ا س مساوٍ لمربع د ب، فخط ا س مساوٍ لخط د ب. وخط ا هـ مساوٍ لخط د ط، فخط ا هـ أعظم من خط ا س، فنقطة هـ خارجة عن / ل-٤٩٩ قطع د س ع، ونقطة ك في داخل قطع د س ع لأنها على سهمه. فبعض قطع ص هـ ك الزائد خارج عن قطع د س ع المكافئ، وبعضه في داخل قطع د س ع. فقطع د س ع يقطع قطع ك هـ ص، فليقطعه على نقطة م. ونخرج خط م ح عمودًا على خط د ب.

فأقول: إن نسبة ح ز إلى ز ط هي كنسبة مربع ب د إلى مربع د ح.

برهان ذلك: أنا نجيز على نقطة م خط ل م ن موازيًا لخط ز د، فيكون م ن عمودًا على خط د ا، وخط م ح موازٍ لخط جـ ز لأنه عمود على خط ز د. فيكون ضرب ب د في د ن مساويًا لمربع م ن، ون م مثل د ح ون د مثل م ح. فضرب ب د في م ح مساوٍ لمربع د ح. فنسبة ب د إلى د ح كنسبة د ح إلى م ح، فنسبة ب د إلى م ح هي كنسبة مربع ب د إلى مربع د ح. وأيضًا، فلأن قطع ص هـ ك قطع زائد وخطي جـ ز ز د لا يقعان / جـ-٢٢٣-و عليه، وخطي هـ ط م ح موازيان لخط جـ ز، وخطي م ل هـ جـ موازيان لخط ز د، يكون ضرب جـ هـ في هـ ط مساويًا لضرب م ل في م ح. فنسبة م ل إلى هـ جـ كنسبة هـ ط إلى م ح، وم ل مثل ح ز وهـ جـ مثل ز ط وهـ ط مثل ب د؛ فنسبة ح ز إلى ز ط كنسبة ب د إلى م ح.

وقد كان تبيّن أن نسبة ب د إلى م ح كنسبة مربع ب د إلى مربع د ح. فنسبة ح ز إلى ز ط كنسبة مربع ب د إلى مربع د ح؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

1 ولأن: فلأن [ا] / د س ع: د س، في كل المخطوطات / وسهمه: سهمه [ع] – 2 مثل ... فمربع ا س: أثبتها في الهامش [ل] – 2-3 لمربع د ب فخط ا س مساوٍ: ناقصة [ب، جـ، د، ع، ل] – 3 مساوٍ (الأولى): كرر بعدها «لخط د ب وخط ا هـ» [هـ] – 4 في داخل ... لأنها: ناقصة [ا] – 6 يقطع قطع: ناقصة [ع] / ك هـ ص: ب هـ ص [ا] – 8 ز ط: ب ح ط [ل] زح ط [ب، جـ] / هي: ناقصة [ع] – 10 موازٍ: موازي [ا] / ضرب: ناقصة [ع] – 11 مساوٍ: مساويًا [ب، جـ، د، ع، ل] – 12 فنسبة: غير واضحة [هـ] / كنسبة: غير واضحة [هـ] / فنسبة ... د ح إلى م ح: ناقصة [ا] / ب د (الثانية): ب ح [ب، جـ، ل] ب جـ [هـ، ع] – 13 وخطي: وخطا، في كل المخطوطات / جـ ز: جـ ن [ا] – 14 عليه: على [ع] / وخطي (الأولى): ناقصة [ع] – 15 جـ هـ: حـ ر [هـ] / م ل: ل م [جـ، د، هـ] – 16 ح ز: ح ن [ا] / فنسبة: ونسبة [ب، جـ، د، هـ، ع، ل] – 18 كان: ناقصة [ل] – 19 نبيّن: كتب بعدها ناسخ [ا] «تم القول في قسمة الخط والحمد لله ربّ العالمين والصلوة على محمد وآله أجمعين».

١١٨ - ظ

قول للحسن بن الحسن بن الهيثم
في مسألة عددية مجسّمة

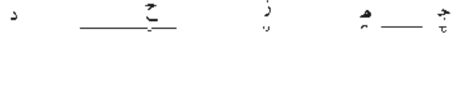
نريد أن نقسم عددًا معلومًا بقسمين حتى يكون أحدهما مكعب الآخر.

فليكن العدد المعلوم ا ب؛ ونريد أن نقسم ‹ا ب› بقسمين حتى يكون أحد القسمين مكعب الآخر. فلنجد أربعة مقادير متوالية متناسبة، يكون نسبة زيادة الأعظم منها على الذي يليه إلى أصغرها كنسبة مكعب عدد ا ب إلى عدد ا ب.

فليكن المقادير الأربعة مقادير جـ د د هـ د ز د ح وليكن نسبة جـ هـ إلى ح د كنسبة مكعب ا ب إلى ا ب التي هي نسبة معلومة، لأن كل واحد من ا ب ومكعبه معلوم.

فأما كيف نجد هذه المقادير، فإنا نبيّنه من بعد. فإذا وجدنا المقادير التي على هذه النسبة، فإنا نقسم عدد ا ب على نقطة ط حتى يكون نسبة ا ط إلى ط ب كنسبة جـ هـ إلى هـ د.

فأقول: إن ا ط هو مكعب ط ب.



برهانه: أنا نجعل نسبة ط ب إلى ب ك كنسبة هـ د إلى د ز ونسبة ك ب إلى ب ل كنسبة ز د إلى د ح. وقد كانت نسبة ا ط إلى ط ب كنسبة جـ هـ إلى هـ د. فنسبة ا ب

7 فلنجد: فنجد – 9 د ح: د ج

إلى ب ط بالتركيب كنسبة جـ د إلى د هـ. فيكون ا ب ب ط ب ك ب ل على ‹نسب› جـ د د هـ د ز د ح؛ وجـ د د هـ د ز د ح متوالية متناسبة، فأعداد ا ب ب ط ب ك ب ل متوالية متناسبة. فنسبة ا ب إلى ب ل هي نسبة ا ب إلى ب ط مثلثة. ونسبة ا ب إلى ب ط مثلثة هي نسبة مكعب ا ب إلى مكعب ب ط. ونسبة ا ط إلى ط ب هي كنسبة جـ هـ إلى هـ د، ونسبة ط ب إلى ب ل هي كنسبة هـ د إلى د ح؛ فبالمساواة يكون نسبة ا ط إلى ل ب كنسبة جـ هـ إلى ح د. ونسبة جـ هـ إلى ح د هي كنسبة مكعب ا ب إلى عدد ا ب. فنسبة مكعب ا ب إلى ا ب هي كنسبة ا ط إلى ل ب؛ وإذا بدلنا، يكون نسبة مكعب ا ب إلى ا ط كنسبة ا ب إلى ل ب. وقد تبين أن نسبة ا ب إلى ل ب هي نسبة مكعب ا ب إلى مكعب ب ط، فنسبة مكعب ا ب إلى ا ط هي نسبة مكعب ا ب إلى مكعب ب ط؛ فـ ا ط هو مكعب ب ط.

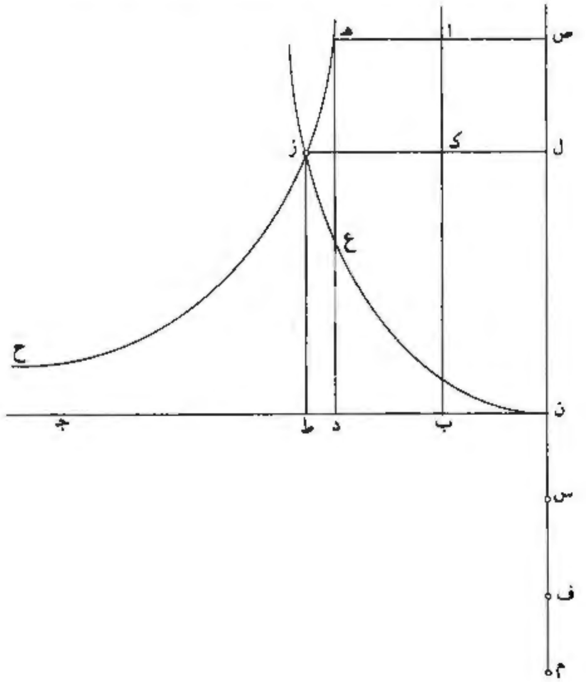
فقد قسمنا عدد ا ب بقسمين حتى كان أحد القسمين مكعب الآخر، وهما ا ط ط ب؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.

فأما كيف نجد أربعة مقادير متوالية متناسبة، يكون نسبة زيادة الأعظم منها على الذي يليه إلى أصغرها مثل نسبة [مثل نسبة] معلومة، فإنه يكون كما نصف.

نفرض خط ا ب معلوما ونقيم على طرفه خطًا على زاوية قائمة، وليكن ب جـ. ونجعل نسبة ا ب إلى ب د النسبة المعلومة، ونقيم على نقطة د خطًا موازيًا لخط ا ب، وليكن د هـ. ونخرج ا هـ موازيًا لخط ب جـ، فيكون سطح ا ب د هـ متوازي الأضلاع. ونجيز على نقطة هـ القطع الزائد الذي لا يقع عليه خطا ا ب ب جـ، كما تبين في الشكل الرابع من المقالة الثانية من كتاب أبلونيوس في *المخروطات*؛ وليكن قطع هـ ز ح. ونخرج خط جـ ب على استقامة في جهة ب ونفصل منه خط ب ن مساويًا لخط ب د، ونقيم على نقطة ن خطا موازيًا لخط ا ب، وليكن ن ص؛ وننفذه في الجهة الأخرى إلى م. فيكون زاوية ب ن ص قائمة. ونرسم على نقطة ن القطع المكافئ الذي سهمه ن ص وضلعه القائم ن ب، كما تبين في شكل نب من مقالة ا من كتاب أبلونيوس في *المخروطات*؛ وليكن قطع ن ع. وقطع ن ع يقطع قطع هـ ز ح، لأن قطع ن ع كلما خرج في جهة ع، تباعد عن سهم ن ص، فهو يتباعد عن خط ا ب. وقطع هـ ز ح كلما خرج

1 د هـ: كررها الناسخ تحتها – 3 ب (الثانية): ب ن – 11 كان: مر – 15 طرفه: مضمومة – 20 مساويا: مساو – 24 كما: كما.

في جهة هـ، فإنه يقرب من خط ب ا، كما تبين في الشكل يد من مقالة ب من *المخروطات*. فقطع ن ع يقطع قطع هـ ز ح، فليقطعه على نقطة ز. ونخرج من نقطة ز خط ز ط موازيًا لخط ا ب وخط ز ك ل موازيًا لخط جـ ب ن. فيكون السطح الذي يحيط به خطا ط ز ز ك مساويًا للسطح الذي يحيط به خطا د هـ هـ ا، كما تبين في شكل يب من مقالة ب من *المخروطات*./ فيكون نسبة ا ب إلى ز ط كنسبة ز ك إلى ب د. وب د مثل ١١٩-و ب ن وب ن مثل ك ل، فنسبة ا ب إلى ز ط كنسبة ز ك إلى ك ل. ونخرج هـ ا إلى ص، فيكون ص ن مثل ا ب. ونجعل ن م مثل ز ط، فيكون نسبة ا ب إلى ز ط هي نسبة ص ن إلى ن م. ونسبة ا ب إلى ز ط كنسبة ز ك إلى ك ل. فنسبة ص ن إلى ن م كنسبة ز ك إلى ل ك. ومن أجل أن خط ز ل مواز لخط ط ن، يكون خط ز ل عمودًا على خط ن ص. فالسطح الذي يحيط به خط ن ل وخط ل ك المساوي لخط ن ب هو مساوٍ لمربع ل ز، كما تبين في شكل يب من مقالة ا من *المخروطات*.



6 هـ ا: هـ – 9 ز ك: ز ل / مواز: موازيًا.

فنسبة ز ل إلى ل ن كنسبة ل ك إلى ل ز. وقد تبين أن نسبة ص م إلى م ن كنسبة ز ل إلى ل ك. فنسبة ص م إلى م ن كنسبة ن ل إلى ل ز وكنسبة ز ل إلى ل ك. وص م أعظم من ل ن، ون ل مساوٍ لـ ز ط وز ط مساوٍ لـ ن م؛ فـ ن م مساوٍ لـ ن ل، فـ ن م أعظم من ل ز. فنفصل م س مثل ل ز ونفصل م ف مثل ل ك. فيكون نسبة ص م إلى م ن كنسبة م ن إلى م س وكنسبة م س إلى ه ف. فمقادير ص م ه ن ه س م ف متوالية متناسبة. وص ن مساوٍ لـ ب ا، وه ف مساوٍ لـ ك ل المساوي لـ ب ن المساوي لـ ب د. فنسبة ص ن إلى ف ه هي كنسبة ا ب إلى ب د التي هي النسبة المعلومة.

فمقادير ص م م ن ه س ه ف هي أربعة مقادير متوالية متناسبة ونسبة زيادة الأعظم، وهو ص ه، على الذي يليه، وهو م ن، أعني بالزيادة ص ن، إلى ف م، الذي هو أصغر المقادير، هي النسبة المعلومة؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.

تم القول في المسألة العددية المجسّمة

والحمد لله ربّ العالمين والصلاة على محمد وآله.

1 ل ك إلى ل ز: ل ز إلى ل ك – 2 ز ل (الثانية): ن ل – 3 لـ ن م: لـ ز م – 4 ل ز (الثانية): ل ن – 5 ه س (الأولى): ص س.

الفصل الرابع

"الهندسة العمليَّة: المساحة"

٤ـ١ مقدّمة

لقد قدَّم الفارابي، قبل ابن الهيثم بزمن طويل، تصنيفاً للعلوم غير مطابق لأيٍّ تصنيف آخر معروف قبله[١]. وكان هذا التصنيف مُخصَّصاً، بالطبع، لعرض معارف عصره ولاستخلاص تمثيل متماسك لها، وخاصَّة لتعليل العلاقات الجديدة بين فروعها. لم تعد، بالفعل، الرباعيّة (الحساب والموسيقى والهندسة والفلك) كافية للوفاء بكلّ المتطلّبات. ولعلَّ هذا هو السبب الذي جعل خلفاءَ الفارابي، ومنهم ابن سينا نفسه، يتبنّون هذا التصنيف الجديد[٢]. إنَّ إحدى الخصائص التي تميِّز هذا التصنيف، بالإضافة إلى كلّ التصنيفات الأخرى التي استوحِيَت منه، هي أنّها تحتوي على مجموعة معقّدة تضمُّ عدة فروع يُرمَز إليها بعبارة ذات مغزى وهي علم الحِيَل (علم الطرائق الهندسيّة).

يتعلّق الأمر بمجموعة من الفروع العِلميّة التي تخصُّ، في أغلبيّتها العظمى، ما عُرِف فيما بعد بـِ "العلوم المختلطة"، إذ إنَّ الريّاضيّات تختلط فيها مع عناصرَ مادِّيةً. والمفهوم الضمنيّ لهذه الفروع هو أنّه لا يوجد بين العلم والعمل وبين العلم والصناعة أيُّ تنافر بل إنَّ العكس هو الصحيح. إنَّ في الإمكان، من جهة ، أن نُدخل فعلاً "قواعد الصناعة" وأدواتها أيضاً في موضوع العلم نفسه؛ كما يُمكن توجيه العلم، من جهة أُخرى، نحو أهداف خارجة عن هذا التمثيل الجديد. فإذا كان العلم، يتوجّه نحو العمل، فإنَّ العمل يجب أن يكون مستنداً إلى العِلم. ويُمكن للمعرفة، عندئذ، أن تصل إلى مستوى العلم، وفقاً لهذا التمثيل الجديد، بدون أن تتوافق مع المُخطّط الأرسطي أو المُخطّط الأقليدي. لقد أزالت هذه العلاقات الجديدة بين العِلم والعمل، وبين العلم والصناعة، على الأقلّ نظريّاً، الحدودَ

[١] انظر: الفارابي، "إحصاء العلوم"، نشرة عثمان أمين، الطبعة الثالثة (القاهرة، ١٩٦٨).

[٢] انظر : ابن سينا، مقالة في تقاسيم الحكمة والعلوم، التي ترجمها ر. ميمون (R. Mimoune) ضمن الكتاب:
Études sur Avicenne, dirigées par J. Jolivet et R. Rashed, Collection «Sciences et philosophie arabes - Études et reprises» (Paris, 1984)
ص. ١٤٣-١٥١. وانظر أيضاً:
R. Rashed, «Mathématiques et philosophie chez Avicenne», dans Études sur Avicenne
ص. ٢٩-٣٩، وهو المقال الذي أعيد نشره ضمن:
Optique et Mathématiques: Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe, Variorum reprints (Aldershot, 1992), XV.

التي وضعتها الأرسطيّة بينهما، لكي تجعل تطبيق الرياضيّات والعلوم في منزلة رفيعة إلى جانب المعارف الأخرى.

ونجد ضمن هذه المجموعة المعقّدة لعلم الحيل عدداً من الفروع العلميّة التي يوجد من بينها صناعة المساحة أو القياس. ولكنّ لعلم المساحة هذا، الذي دُرِس جيِّداً قبل الفارابي، كتابات غنيّة جدّاً. وهكذا يذكر النديم عدّة أسماء مثل الحسن بن الصباح وابن ناجيّة وابن برزة، الخ. ويمكن أن نضيف إلى هذه الأسماء الخوارزمي نفسَه والكِندي وأبا كامل والقبيصي وسنان بن الفتح، الخ، والمتأخرين قليلاً عن هؤلاء مثل عبد القاهر البغدادي والأسفزاري والكرجي وخلفائه من بين آخرين يمكن ذكرهم. فهذه القائمة طويلة جدّاً، حتّى إنّ دراسة كل هذه الكتابات عن المساحة قد تحتلُّ مجلّداً ضخماً على الأقلّ. لنكتفِ هنا بالأنواع المختلفة لهذه الكتابات.

يمكن أن نُرجِع **أوّل** نوع من هذه الكتابات في المساحة إلى كتاب "علم المناظر" لأقليدس[٣]، حيث نجد دراسة لمسألة في المساحات المجسَّمة. ولقد تناول هذه الدراسة ثانية الكِندي[٤] ومن بعده سنان بن الفتح تحت العنوان المعبِّر "المساحات المناظريّة". ثمَّ درس القبيصي[٥] نفسه هذه المسألة. ويمكن أن نجد، بدون شكٍّ، مسائل أخرى مثلها. ويرجع ابن الهيثم إلى هذا الموضوع في نصّ مستقلٍّ على شكل رسالة مختصَرة تحت عنوان "في معرفة ارتفاع الأشخاص القائمة وأعمدة الجبال وارتفاع الغيوم"[٦]. ويوجد مؤلّف من النوع نفسه ولكن بدون براهين، منسوب إلى ابن الهيثم، "في استخراج أعمدة الجبال".

والنوع **الثاني** من الكتابات المكرَّسة للمساحة هو، أيضاً، قديم؛ وهو يمثُل كفصل ضمن مؤلّفات الجبر أوّلاً، مثل كتاب الخوارزمي وكتاب أبي كامل، وبشكل عامّ ضمن مؤلّفات علم الحساب، مثل مؤلّفات البوزجاني والكرجي والبغدادي والفارسي وغيرهم. تنتمي

---

[٣] انظر :
Euclide, L'Optique et la Catoptrique, Œuvres traduites pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke,
طبعة جديدة (باريس ١٩٥٩)، القضايا ١٨ إلى ٢٠.

[٤] انظر: كتاب تقويم الخطأ، ضمن ر. راشد، علم المناظر وعلم انعكاس الضوء(بيروت ٢٠٠٣)، القضايا يح - كب، ص. ٢٥٠-٢٥٤ .

[٥] انظر: ع. أنبوبا،
«Un mémoire d'al-Qabīṣī (4e siècle H.) sur certaines sommations numériques», Journal for the History of Arabic Science »
المجلد السادس، رقم ١وَ ٢ (١٩٨٢)، ص. ١٨١ - ٢٠٨ وَ ١٨٨-١٨٩.

[٦] انظر: المجلد الثاني من هذه الموسوعة، ص. ٤٩٢-٤٩٣، رقم ٦٢؛ وانظر لاحقاً.

الغالبية العظمى من الكتابات الخاصَّة بالمساحة إلى هذا النوع الذي لم يكترث به ابن الهيثم، وفقاً لما نعرفه.

أمّا النوع **الثالث** من هذه الكتابات، فهو من الأعمال الخاصّة بالهندسيّين. نجد، من بينها، كتابَ ابن قرّة. وهو كتاب بدون براهين، يعطي فيه المؤلّف الصيَغ اللازمة لتحديد مساحات الأشكال المستوية المستقيمة والمنحنية، وكذلك لتحديد أحجام بعض الأجسام، مثل المكعَّب والكرة[٧].

ويتمثّل النوع **الرابع**، أخيراً، بمؤلّف ابن الهيثم "في أصول المساحة". يسعى ابن الهيثم، في هذا المؤلّف، الذي هو في الواقع كتاب وجيز، إلى تأسيس صناعة المساحة على أسسٍ متينةٍ. ويُمثّل ظهور هذا الكتاب حدثاً تاريخيّاً ومعرفيّاً أيضاً؛ فالأمر يتعلّق بمؤلّف، لأحد المنظّرين البارِزين في الهندسة، موجَّهٍ إلى المسّاحين. لم يكن ابن الهيثم، بالتأكيد، أوّل من سلك هذا الطريق. وذلك أنَّ سلفه إبراهيم بن سنان لم يتردَّد في تحرير كتاب موجَز في الصناعة موجَّه إلى صنّاع الرخامات الشمسيّة. ولكنَّ هذا النوع من الكتابات لا يوجَد، حسب ما نعرفه، عند أيّ هندسيّ من الهندسيِّين الكبار خلال الفترة الهلّينستيّة. يندرج هذا الموقف الجديد بكامله ضمن هذا المنهج المزدوِج لهذا الرياضيّ الذي كان يسعى نحو هدفين مترابطين بدقّة، وهما تأسيس هندسيٌّ لصناعة هي هنا صناعة المساحة، وتقديمُ القواعد التي يجب على المستخدمين تطبيقها. يظهر ابن الهيثم، هنا أيضاً، كأنّه متـمِّم لهذا التقليد الذي شارك فيه ثابت بن قرَّة وإبراهيم بن سنان وآخرون غيرهما بدون شكٍّ. ولكنَّ إعادة كتابة هذا التقليد بشكل دقيق لم تكن قد أنجِزت بعدُ. وسنكتفي هنا بتحليل كتابات ابن الهيثم فقط. تتكوَّن هذه الكتابات من أربعة مؤلّفات. وكنّا قد أشرنا سابقاً إلى مؤلّفين وصلا إلينا. ذكر المؤلّف الثالث كُتّاب السِّيَر القدامى تحت عنوان: "في مسألة في المساحة"[٨]؛ ويوحي هذا العنوان بأنَّ الأمر يتعلّق بدراسة لمسألة خاصّة. أمّا المؤلّف الرابع، فقد أشار إليه ابن الهيثم بنفسه في مقدِّمة مؤلّفه "في أصول المساحة"؛ وهو كتاب أنجزه في شبابه في الموضوع نفسه تحت العنوان نفسه؛ ولقد ضاع هذا الكتاب مثل العديد

[٧] انظر: ثابت بن قرّة ، في مسألة مساحة الأشكال المسطّحة والمجسّمة، مخطوطة إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الأوراق: ٤١و– ٤٤و.

[٨] ورد هذا العنوان عند القفطي وابن أبي أصيبعة، كما ورد في قائمة مؤلّف لاهور المجهول الهويَّة. انظر: المجلّد الثاني من هذه الموسوعة، ص. ٤٩٣، رقم ٦٥.

من المخطوطات الأصليّة لكتاباته. ويمكن أن نتساءل عن تطابق محتمَل بين مؤلّف "في مسألة في المساحة" وبين هذا المؤلّف المفقود الذي ربَّما أصاب عنوانَه بعض التحوير.

٤-٢ الشرح الريّاضيّ

٤-٢-١ كتاب " في أصول المساحة"

إنَّ خطّة الكتاب واضحة ومتلائمة جيِّداً مع الهدف المطلوب؛ وهو أن يُقدِّمَ للمسّاحين موجَزاً هندسيّاً دقيقاً يُعالِج صناعتهم، على أن يكون هذا الموجَز ابتدائياً. يُحرِّر ابن الهيثم، بعد المقدِّمة التي يشرح فيها المفاهيم الأوّليّة لهذا الفصل – المساحة، وحدة المساحة، المقادير القابلة للمسح – أوّلَ فصل قصير حول مساحة الخطوط المستقيمة والدائرية فقط، وهي الخطوط التي يحتاج إليها الصنّاع. ويُعالج في الفصل الثاني مساحات السطوح: المستطيل والمثلّث (مع صيغة إيرن) ومتعدّد الأضلاع المحدَّب والدائرة. أمّا الفصل الثالث، فهو مكرَّس لمساحات المجسَّمات: متعدِّدات السطوح والأسطوانة والمخروط والكرة. ويدرس الفصل الرابع التحديدَ التجريبيّ لارتفاع جسم ما. ويختم ابن الهيثم عمله مذكّراً بالنتائج والطرائق التي يمكن للمسّاح استخدامها.

لنتناولْ، باختصار، محتويات هذه الفصول المختلفة. يبدأ ابن الهيثم، كما فعل بنو موسى قبله بزمن طويل[٩]، بشرح ماهيّة وحدة المساحة التي هي وحدة اصطلاحيّة تُختار أوّلاً لقياس الخطوط، إذ إنَّ الأمر يتعلّق بالطول الاصطلاحيّ، لقطعة من خطّ مستقيم، الذي نُسمِّيه "الذِراع" مثلاً. ونستخرج من هذه الوحدة الاصطلاحيّة لقياس الطول، الوحدتين الأخريين لقياس السطوح والمجسَّمات: وحدة المساحة للسطوح هي مساحة المربَّع الذي يكون طول ضلعه مساوياً لوحدة الطول، ووحدة الحجم هي حجم المكعَّب الذي يكون طولُ ضلعه مساوياً لوحدة الطول. وقياس مقدار ما – الطول، العرض، العمق – يتمّ بواسطة الوحدة المُرفَقة به. قياس مقدار ما هو، بعبارة أخرى، العددُ المُنطَق أو غير المُنطَق

---

[٩] انظر: الصفحتين الأولَيين من "كتاب معرفة مساحة الأشكال البسيطة والكريّة" لبني موسى، ضمن الفصل الأوّل، من المجلّد الأوّل من هذه الموسوعة: "المؤسِّسون والشارحون: بنو موسى، ثابت بن قرّة، ابن سنان، الخازن، القوهي، ابن هود" (بيروت ٢٠١١).

الذي هو نسبة هذا المقدار إلى وحدة المقدار ذي النوع نفسه. ومعنى "النسبة"، هنا، هو ما تعطيه التعريفات ذات الأرقام ١، ٢، ٣، ٧ وَ ٩ من المقالة الخامسة من كتاب "الأصول".

لا يتناول ابن الهيثم، إذاً، في الفصل المكرَّس لقياس الخطوط، سوى الأنواع التي يعالجها المسّاحون، أي الخطوط المستقيمة والدائريّة. وهكذا نحصل على مساحة الخطّ المستقيم "بإطباق الذراع على جزء جزء منها إلى أن يفنيها، إمّا جميعه أو بعض أجزائه". والمساحة التي نحصل عليها بهذه الطريقة، أي العدد الذي يجب أن نضرِب به الوحدة، هو عدد مُنْطَقٌ. ولا يُشير ابن الهيثم، هنا، إلى الحالة التي لا يُمكن فيها الحصول بهذه الطريقة إلا على قيمة تقريبيّة للمساحة، وهذا ما يفعله بعد ذلك بخصوص الأقواس، على سبيل المثال.

ليكن لدينا، لأجل تحديد المساحة c لخطّ دائريّ، دائرة ذات قطر d، وليكن a مساحة قوس بحيث تكون نسبتها إلى الدائرة مساوية لعدد k. يُذكّر ابن الهيثم ، هنا بدون برهان، بالنتائج المعلومة وهي $\frac{22}{7}d \approx c$ وَ $kc = a$؛ ويُشير إلى أنَّ عمل المسّاح يتمثّل بقياس d وتحديد k. وهو يتناول ثانية هذه المسألة وطريقة تحديد d وَ k في الفصل المخصَّص لمساحات السطوح.

لا يتناول ابن الهيثم، في الفصل الثاني المكرَّس لمساحات السطوح، سوى السطوح التي تـــهمُّ المسّاحين، وهي السطوح المستويَة. وهو يكتب "...السطوح الكريّة والأسطوانيّة والمخروطيّة... ليس تدخل في صناعتهم للمساحة". ويبدأ بمساحة المستطيل، ويُقدِّم برهاناً لحساب هذه المساحة، عندما يكون لبُعْدَي المستطيل قاسمٌ مشترَك مأخوذ كوحدة للطول؛ ولا يُشير إلى الحالات الأخرى.

ثمَّ يُعالج ابن الهيثم مسألة مساحة المثلّث؛ تُستنتَج مساحة المثلّث القائم الزاوية مباشرة من مساحة المستطيل؛ ويتمُّ الحصول على S، مساحة مثلّثٍ اختياريّ ذي قاعدة b وارتفاع h، أي على $S = \frac{b.h}{2}$، بتطبيق القضيّة ٣٧ من المقالة الأولى من كتاب "الأصول". فتتمثّل المسألة بالنسبة إلى المسّاح بتحديد الارتفاع h. ويقوم ابن الهيثم عندئذ بدراسة مفصَّلة جدّاً للمثلّث مُفترِضاً أنَّ أطوال الأضلاع a ، b وَ c معلومة، ويقدِّم الوسائل للجواب عن السؤالين:

١- كيف نعرف إذا كان المثلّث قائم الزاوية أم لا؟

٢- كيف نحسب الارتفاع الخارِج من أحد الرؤوس؟ تدخل في الحساب، على القاعدة المواجهة للرأس المعني بالأمر، قطعة اسمها "قدم الارتفاع". يعالج ابن الهيثم ثلاث حالات:

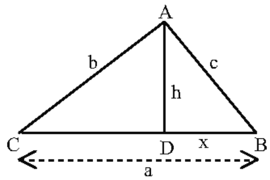
* الارتفاع الخارج من رأس زاوية منفرِجة،

* الارتفاع الخارج من رأس زاوية حادَّة،

الارتفاع الخاصّ بأعظم ضلع- وهذا الحساب صالح مهما كانت قِيَم زوايا المثلّث.

وإذا رمزنا بِـ a إلى أعظم ضلع في المثلّث، $a = BC$، وَ بِـ h إلى الارتفاع AD وَ بِـ x إلى قدم الارتفاع، $BD = x$ ، يكون معنا:

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \text{،} \quad h^2 = c^2 - x^2 = \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}.$$



الشكل ١

يُمكن أن نُثبت، انطلاقاً من حساب الارتفاع هذا، صيغة إيرن. وذلك أنّنا نحصل من العبارة السابقة على

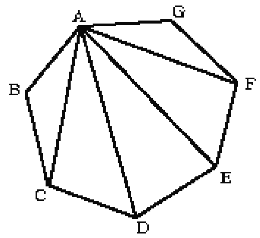
$$h^2 = \frac{(a+b+c)(a+c-b)(b+c-a)(b+a-c)}{4a^2}\text{؛}$$

ولكنَّ $S^2 = \frac{a^2h^2}{4} = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{b+a-c}{2}\right).$

لنضع $p = \frac{a+b+c}{2}$، فنحصل على $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

يُثبِت ابن الهيثم هذه الصيغة فيما بعد بطريقة أُخرى، بدون استخدام الارتفاع. وهو يُدخِل في برهانه المركز و r، نصف قطر الدائرة المحاطة بالمثلّث. فإذا كان $2p$ محيط المثلّث، يكون معنا $S = p.\ r$، مع $p(p-b)(p-a)(p-c)=p^2r^2$، فنحصل على S^2 ثمَّ على S. وهذه الطريقة، بالإضافة إلى ذلك، هي التي قد استخدمها بنو موسى[١٠].

ويدرس ابن الهيثم، بعد ذلك، المضلّعات المُحدَّبة. والفكرة هي التالية: يُمكن أن نُقسِّم كلَّ مضلّع إلى عدد من المثلّثات، فتكون مساحته مساوية لمجموع مساحات هذه المثلّثات، وكلُّ مساحة من هذه المساحات تُحسَب بواسطة أضلاع المثلّث المعنيَ بالأمر. يُمكن، في الحقيقة، أن نُقسِّم كلَّ مضلّع ذي عدد n من الأضلاع إلى $(n-2)$ مثلّثاً نحصل عليها بالوصل بين أحد رؤوس المضلّع– ليكن A هذا الرأس– وكلِّ الرؤوس الأخرى.

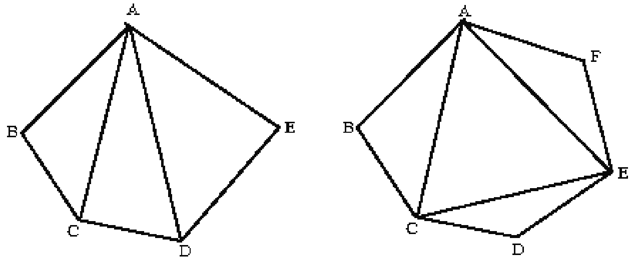


الشكل ٢

وتساوي مساحة المضلّع مجموع مساحات هذه المثلّثات ذات العدد $(n-2)$ التي نحصل عليها. يقول ابن الهيثم إنَّ هذا التقسيم يحصل بواسطة أوتار زوايا المضلّع. وقوله هذا صحيح لرباعيِّ الأضلاع ولمخمَّس أو مسدس الأضلاع؛ والأوتار، التي يُساوي عددها $(n-3)$، تعطي $(n-2)$ مثلّثاً.

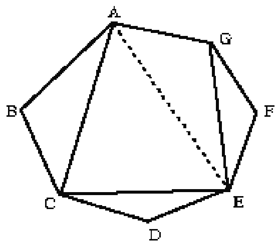
ولكنَّ تقسيم المضلّع إلى مثلّثات يتطلّب، عندما يكون $n \leq 7$، خطوطاً أخرى مغايرة للأوتار. وهكذا يكون عدد الأوتار مساوياً p، عندما يكون $2p = n$، فيكون المضلّع قابلاً للتقسيم إلى مثلّثات عددها p، بحيث تكون هذه الأوتارُ قواعدَ لهذه المثلّثات، وإلى مضلّعٍ، عدد أضلاعه p ضلعاً، مشكّلٍ من هذه الأوتار. يكون عدد الأوتار مساوياً p،

[١٠] انظر: القضيّة ٧، ضمن الفصل الأوّل من المجلد الأوّل من هذه الموسوعة.



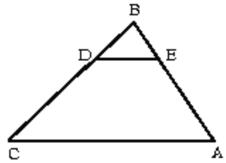
الشكل ٣

عندما يكون $2p+1 = n$، فنحصل على p مثلّثاً بحيث تكون هذه الأوتار قواعد هذه المثلّثات، وعلى مضلّع مشكّل من $(p+1)$ ضلعاً من هذه الأوتار ومن أحد أضلاع المضلّع. ويُمكن في كلتا الحالتين قياس أضلاع المضلّع الأصليّ، فيعطي ابن الهيثم طريقة لحساب الأوتار. يبقى علينا عندئذ أن نقسّم المضلّع ذي p أو $(p+1)$ ضلعاً. ويُمكن أن نقوم بالتقسيم بعد تحديد زوايا هذا المضلّع. لنأخذ مثال المضلّع $ABCDEFG$ (الشكل ٢)؛ AD وَ DE ليسا من أوتار زوايا المسبّع. يمكن أن نرسم، على الشكل ٤، كلّ الأوتار AC، CE وَ EG التي هي قواعد المثلّثات الثلاثة التي لها الرؤوس B وَ D وَ F، فيبقى عندئذ رباعيٌّ أضلاع يُمكن فصله برسم القطر AE . ليس الخطُّ AE وتراً لزاوية من زوايا المسبَع، ولكنّه وتر الزاوية $\widehat{G}$ في المثلّث AGE. وحساب هذا الوتر ممكن، إمّا بالقياس المباشر أو بالطريقة المعروضة أدناه لتحديد طول الوتر. وذلك أنّ المثلّث FGE يُصبح معلوماً بعد قياس طول GE، وتكون الزاوية $\widehat{FGE}$ معلومة أيضاً؛ فنستخرج من ذلك أنّ $\widehat{FGE} = \widehat{AGE}$ $\widehat{AGF}$، فنحصل على ضلعي هذه الزاوية.



الشكل ٤

يُعطي ابن الهيثم عندئذ طريقة لقياس طول الوتر. لنأخذ المثلّث BAC؛ نريد أن نحسب طول AC، وتر الزاوية $\widehat{B}$، استناداً إلى طوليْ BA وَ BC. يجب على المسّاح أن يختار نقطة على BC، ولتكن D، بحيث يكون طول DE، في المثلّث BDE المحاكي للمثلّث BCA، قابلاً للقياس مباشرة. ولكنّ معنا $\frac{BC}{BD}=\frac{AC}{DE}$، فإذا أخذ المسّاح طول BD مساوياً لذراع، يكون معنا $DE.BC=AC$.



الشكل ٥

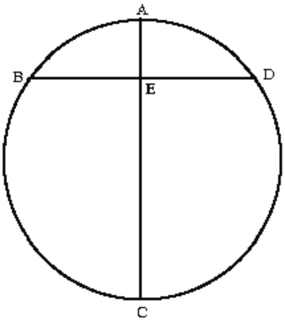
يرجع ابن الهيثم، بعد ذلك، إلى مساحة الدائرة ويعرض البرهان الذي قدّمه أرشميدس في "مساحة الدائرة".

تُحسب Σ، مساحة الدائرة ذات القطر d والمحيط $2p$، بواسطة الصيغة $\Sigma = p.\frac{d}{2}$.

يُذكّر ابن الهيثم أيضاً بأنّ أرشميدس وجد للنسبة $\frac{2p}{d}$ القيمة التقريبيّة $\frac{22}{7}$، فنحصل على $p \approx \frac{11}{7}d$ وَ $\Sigma \approx \frac{11}{14}d^2$، أو أيضاً $\Sigma \approx d^2 - \left(\frac{1}{7}+\frac{1}{14}\right)d^2$.

يجب على المسّاح، عندما لا تكون الدائرة معلومة بواسطة مركزها وقطرها، أن يحسب القطر d. يقدّم ابن الهيثم طريقة للحصول على طول القطر.

ليكن DB وتراً اختياريّاً في الدائرة، ولتكن E وسطه؛ يمرُّ المنصِّف العموديّ للوتر DE في مركز الدائرة ويقطع الدائرة على النقطتين A وَ C، فتكون AC قطراً للدائرة؛ يكون معنا



الشكل ٦

$$BE^2 = BE.ED = EA.EC \text{ وَ } ED = BE$$

فنحصل على $EC - \frac{BE^2}{EA}$ وَ $EA + \frac{BE^2}{EA} - AC$.

وهكذا يكون القطر معلوماً إذا كان طول الوتر DB معلوماً وإذا كان طول السهم AE معلوماً.

تظهر فائدة هذه الطريقة في الحالة التي يكون فيها القطر AC كبيراً جدّاً، أو صعب القياس، إذ إنّها تُغني عن قياس طوله مباشرة. نختار الوتر DB بحيث يكون طوله صغيراً إلى درجة كافية لتسمح بقياسه وقياس سهمه بسهولة.

يُلخّص ابن الهيثم، كما يقول، طريقة أرشميدس لإثبات مساحة الدائرة. سنعرض هذا التلخيص باختصار، نظراً إلى أهمّيّته التاريخيّة. يتعلّق الأمر ببرهنة ما يلي:

تساوي Σ، مساحة الدائرة ذات نصف القطر R والمحيط $2p$، الجِداءَ: $p.R$، أي أنّنا نحصل عليها، كما سنقرأ لاحقاً، "بضرب نصف قطرها بنصف محيطها، أعني عدد ما في نصف محيطها من أضعاف الذراع في عدد ما في نصف محيطها من أضعاف الذراع ".

لنضع $p.R = U$.

١- إذا كان $\Sigma > U$ ، يكون عندئذ $S = \Sigma - U$، فيكون $\Sigma > S$.

ليكن E مركز الدائرة وليكن AC وَ BD قطرين متعامدين، فيكون $ABCD$ مربَّعاً محاطاً بالدائرة. تُحدِّد خطوط التماسّ في النقاط A، B، C وَ D مربَّعاً، $NMLX$، محيطاً بالدائرة. يقطع قطرا هذا المربَّع الأقواس $\widehat{AD}$، $\widehat{DC}$، $\widehat{DB}$ وَ $\widehat{BA}$ في أوساطها المتوالية I، A، H وَ G. ويكون خطّ التماسّ في النقطة K موازياً للخطّ AD. نُخرِج من A وَ D العمودين على AD، فنحصل على مستطيل؛ ولتكن s مساحته، فيكون s أكبر من مساحة القطعة الدائريّة AKD. يكون معنا بالتتابع:

* مساحة $(NMLX) > \Sigma$ ومساحة $(NMLX)$ تساوي ضعفي مساحة $(ABCD)$، فيكون مساحة $(ABCD) > \frac{1}{2}\Sigma$، فيكون الفرق الأوّل r_1 بين Σ ومساحة $(ABCD)$ أصغر من $\frac{1}{2}\Sigma$، أي أنَّ $r_1 < \frac{1}{2}\Sigma$.

* s أكبر من مساحة القطعة الدائريّة AKD وتساوي ضعفي مساحة المثلّث AKD، فتكون مساحة المثلّث AKD أكبر من نصف مساحة القطعة الدائريّة AKD، فيكون الفرق بين مساحة القطعة الدائريّة AKD ومساحة المثلّث AKD أصغر من نصف مساحة القطعة الدائريّة AKD.

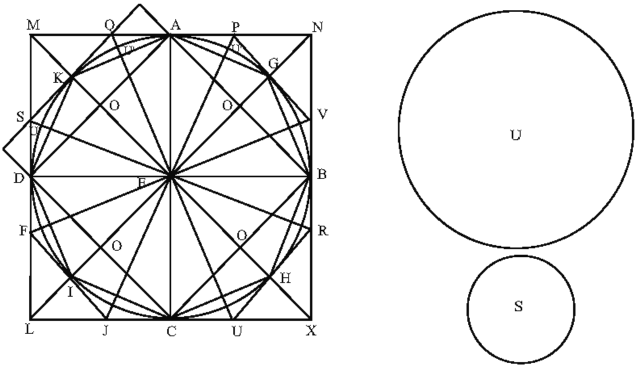
ونقوم بالعمل نفسه للقطع الدائرية الثلاث الأخرى التي تكون أوتارها أضلاع المربَّع $ABCD$. وإذا رمزنا بِـ r_2 إلى الفرق الثاني بين Σ ومساحة المضلّع $AKDICHBG$، يكون معنا $r_2 < \frac{1}{2} r_1$، فنحصل على $r_2 < \frac{1}{2^2}\Sigma$.

ونكرِّر هذه العمليّات حتّى نحصل على $S < \frac{1}{2^n}\Sigma > r_n$.

لنفرض أنَّ Σ_n هي مساحة المضلّع $AKDICHBG$ وأنَّ هذا المضلّع يُحقّق الشروط المطلوبة، أي أنَّ $S > \Sigma - \Sigma_n$ ، أو $\Sigma_n > U$.

يكون معنا: مساحة $(EAKD)$ = مساحة (AED)+ مساحة (AKD)، وهذا ما يساوي:

$\frac{1}{2}AD.EK=\frac{1}{2}AD.OK+\frac{1}{2}AD.EO$ ؛ فإذا كان $2p_{n-1}$ محيط $ABCD$، يكون معنا $p_{n-1}.R=\Sigma_n$. ولكنَّ $U<\Sigma_n$، فنحصل على $p.R<p_{n-1}.R$، أي على $p<p_{n-1}$؛ وهذا مستحيل لأنَّ $p>p_{n-1}$.



الشكل ٧

يستخدم ابن الهيثم، في هذا القسم الأوّل، المربَّعَ $NMLX$ ليبرهن أنَّ مساحة $ABCD$ أكبر من نصف Σ، ليتمكّن من تطبيق القضيّة الأولى من المقالة العاشرة من كتاب "الأصول": يكون معنا $S>\Sigma$ ، فنطرح من Σ أكثر من نصفها ونعيد الكرَّة.

٢- إذا كان $U<\Sigma$، يكون لدينا ثلاث حالات: ا) U تساوي مساحة $(NMLX)$، ب) U أكبر من مساحة $(NMLX)$، ج) U أصغر من مساحة $(NMLX)$.

ليكن $2p_1$ محيط الشكل $NMLX$ المحيط بالدائرة، فتكون مساحة $(NMLX)$ مساوية لِـ $p_1.R$.

ا) $U=$ مساحة $(NMLX)$ $\Leftrightarrow p.R=p_1.R \Leftrightarrow p=p_1$ ، وهذا غير ممكن لأنَّ القوس $\widehat{AKD}$ تساوي $\frac{p}{4}$، ويكون $AM+MD=\frac{p_1}{4}$ وَ $AM+MD>\widehat{AKD}$ ، فيكون $p<p_1$.

ب) U أكبر من مساحة $(NMLX)$ $\Leftrightarrow p.R>p_1.R \Leftrightarrow p>p_1$ ، وهذا مستحيل لأنَّ $p<p_1$.

ج) U أصغر من مساحة $(NMLX)$.

لنضع $S = \Sigma - U$ ، فيكون الفرق r_1 بين مساحة $(NMLX)$ و Σ أكبر من S، ويكون r_1 مساوياً لأربعة أضعاف مساحة المثلث المنحني $NMLX$ ، ويكون $S < r_1$.

نتناول، بعد ذلك خطوط التماسّ في النقاط K، I، H وَ G وهي وفق الترتيب أوساط الأقواس $\widehat{AD}$، $\widehat{DC}$، $\widehat{CB}$ وَ $\widehat{BA}$ فنحصل على المثمَّن المحيط بالدائرة. يكون معنا $MQ > QK$ وَ $QK = QA$، فيكون $MQ > QA$، فتكون مساحة (MKQ) أكبر من مساحة (KQA)، ولذلك تكون مساحة (MKQ) أكبر من مساحة الجزء $(KQAU')$، وتكون مساحة (QMS) أكبر من مجموع مساحتي الجزءين $(KQAU')$ وَ $(KSDU')$، فتكون بالتالي مساحة (QMS) أكبر من نصف مساحة المثلّث المنحني $(AKDM)$، فتكون أربعة أضعاف مساحة (QMS) أكبر من نصف r_1، فيكون الفرق بين r_1 وأربعة أضعاف مساحة (QMS) أصغر من نصف r_1. ليكن r_2 الفرق بين مساحة المثمَّن المحيط بالدائرة و Σ؛ يكون معنا $\frac{1}{2}\ r_1 > r_2$.

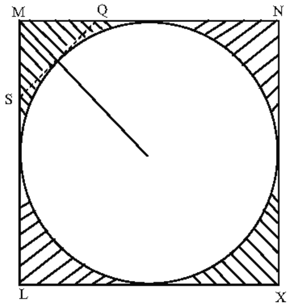
إذا ضاعفنا أيضاً أضلاع المضلّع المحيط بالدائرة، بإخراج خطوط تماسّ الدائرة في كلّ نقطة من النقاط U'، وإذا قمنا بالعمليّة نفسها ، فطرحنا من r_2 أكثر من نصفه، نحصل على $\frac{1}{2}r_2 > r_3$، فيكون $\frac{1}{2^2}\ r_1 > r_3$ ؛ فتكون الفروق المتتالية تناقصيّة. ونعيد الكرَّة حتّى نحصل على: $S > \frac{1}{2^{n-1}}\ r_1 > r_n$.

لتكن Σ_n مساحة المضلّع الذي يُحقّق الشروط؛ إذا كان $2p_n$ محيطه، يكون معنا $\Sigma_n = p_n.R$ ، ويكون معنا $\Sigma_n - \Sigma = r_n < S$، فيكون $U > p_n.R$؛ وهذا ما يؤدّي إلى $p.R > p_n.R$ ، أي إلى $p > p_n$ ؛ وهذا مستحيل لأنَّ $p < p_n$.

ملاحظات: إنَّ لدينا، في هذا القسم الثاني من البرهان، وفقاً للفرضيّات $U = p.R < \Sigma$. والمربَّع $NMLX$ محيط بالدائرة، فإذا كان $2p_1$ محيطه، يكون $p < p_1$ ويكون مساحة $(NMLX) = p_1 .R$.

يكون معنا، بالضرورة إذاً، $R.\ p < R.\ p_1$، أي $U>$ مساحة $(NMLX)$؛ وهذا ما علله ابن الهيثم في الحالتين أ) وَ ب)، إذ إنّه برهن استحالة المتباينة: مساحة $(NMLX) \geq U$.

إذا كان معنا الآن $U >$ مساحة $(NMLX)$ وَ $S = \Sigma - U$، يحقق الفرق r_1 بين مساحة $(NMLX)$ و Σ (r_1 هو المساحة المخططة على الشكل ٨) المتباينة $S < r_1$.



الشكل ٨

نطرح من هذه المساحة r_1 أربعة أضعاف مساحة (MQS)؛ وهذه المساحة المطروحة أعظمُ من نصف r_1. فتتحقق شروط تطبيق القضيّة الأولى من المقالة العاشرة من كتاب "الأصول".

تُبيِّن مقارنة بسيطة مع كتاب "مساحة الدائرة" لأرشميدس، في نصِّه اليوناني الأصلي أو في ترجماته العربيّة، أن ابن الهيثم يُحرِّر من جديد بلغة عصره منهجَ أرشميدس. ولكنَّ هذا ليس موضوع دراستنا هنا.

ثمَّ ينتقل ابن الهيثم إلى دراسة المساحة S، مساحة القِطـــاع الدائريّ، ويُبيِّن أنَّ لدينا، وفقاً للقضيّة ٣١ من المقالة السادسة من كتاب "الأصول"، $\frac{S}{\Sigma} = \frac{l}{2p} \Leftarrow S = \frac{l}{2} . \frac{d}{2}$ ، حيث يكون l طول قوس الدائرة التي تُحدِّد القطاع الدائريّ.

ثمَّ يتناول ابن الهيثم مساحة قطعة الدائرة. إذا كانت القطعة أصغر من نصف دائرة، نحصل على مساحتها من مساحة القِطـــاع الموافق لها بعد أن نطرح من مساحة القِطـــاع مساحةَ المثلّث الذي يكون الوتر قاعدته، ويكون رأسه في مركز الدائرة. يكون من

الضروريّ، إذاً، أن نعرف l طول القوس التي تُحدِّد القطاع أو القطعة. ويكون هذا الطول معلوماً، إذا كانت k، نسبة القوس المعنية بالأمر، إلى محيط الدائرة الكامل معلومة.

يُقدِّم ابن الهيثم، عندئذ، طريقة لإيجاد قيمة تقريبيّة للنسبة k، على أن تكون على أكبر قدر ممكن من الدِقّة. ترتكز هذه الطريقة على رسم قوس مساعدة مساوية لربع دائرة ذات نصف قطر مساوٍ لوتر القوس المدروس. ويتمُّ التحديد التجريبيّ للنسبة k على هذه القوس بواسطة البركار بحيث نحصل على مقدار فتحة البركار، بعد عدَّة محاولات.

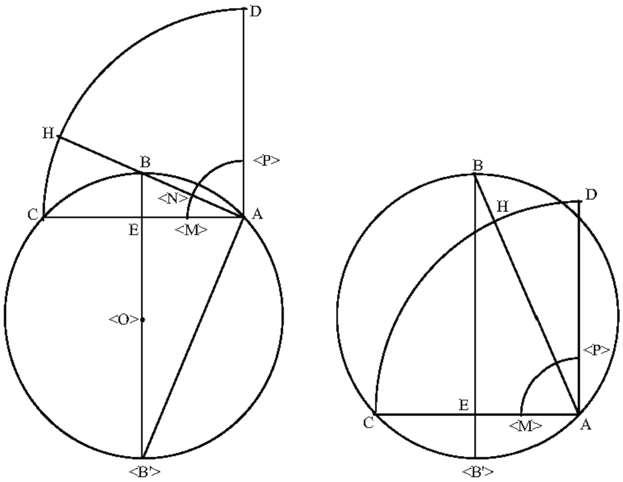
لتكن $\widehat{ABC}$ القوس التي نريد قياسها، وليكن AC وترها و EB سهمها. لنرسم الدائرة ذات المركز A ونصف القطر AC؛ وهي تقطع نصف الخط AB على النقطة H، كما تقطع على النقطة D العمودَ في النقطة A على AC؛ وتكون القوس $\widehat{CHD}$ مساوية لربع دائرة؛ ويكون معنا $\frac{\widehat{CH}}{\widehat{CD}} = \frac{\widehat{CAH}}{90^0}$.

ليكن BB' القطر الخارج من B؛ القوس $\widehat{BCB'}$ تساوي نصف دائرة وتقبل الزاوية القائمة $\widehat{BAB'}$؛ والقوس $\widehat{BC}$ تقبل الزاوية $\widehat{BAC}$. ويكون معنا $\frac{\widehat{BC}}{\widehat{BCB'}} = \frac{\widehat{BAC}}{90^0} = \frac{\widehat{CAH}}{90^0}$؛ فنستخرج من ذلك $\frac{\widehat{ABC}}{c} = \frac{\widehat{BC}}{\widehat{BCB'}} = \frac{\widehat{CH}}{\widehat{CD}}$، حيث تكون c قوس الدائرة الكاملة.

أمّا في الحالة التي تكون فيها القوس كبيرة جدّاً، أي إذا كان وترها ذا طول كبير، فنأخذ نقطة M على AC ونُبدِّل ربع الدائرة CHD بربع الدائرة MNP؛ يكون معنا عندئذ

$$\frac{\widehat{MN}}{\widehat{MP}} = \frac{\widehat{CH}}{\widehat{CD}} \qquad (*)$$ ؛

فنقوم بالقياسات عندئذ على شكل أصغر من الشكل الأوَّل.

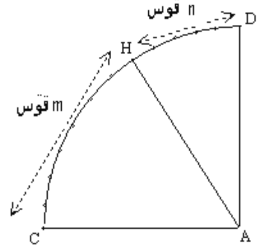


الشكل ٩

يؤدّي اختيار نقطة M على AC إلى تحديد تحاكٍ ذي مركز A ونسبة $\frac{AM}{AC}$. القوس $\widehat{CHD}$ التي تُحدِّد النسبة $\frac{\widehat{CH}}{\widehat{CD}}$، متحاكية مع القوس $\widehat{MNP}$، ويكون معنا (*). ونلاحظ أنَّ ابن الهيثم يقول بوضوح إنّه يريد تطبيق تصغير على القوس $\widehat{CHD}$ ويقترح أخذ القسم AM بدلاً من القسم AC. فهو يستخدم، إذاً، التحاكي $(A, \frac{AM}{AC})$.

وهكذا ترجع طريقة ابن الهيثم إلى قياس، بواسطة البركار، للقوسين $\widehat{CH}$ وَ $\widehat{HD}$ (أو $\widehat{MN}$ وَ $\widehat{NP}$) اللتين يكون مجموعهما ربع دائرة. يفترض ابن الهيثم أنَّ اختيار فتحة البركار يتمّ بحيث يُمكن نقلها عدداً m من المرّات بدون باق بين C وَ H (أو بين M وَ N) من جهة، وبحيث يُمكن نقلها عدداً n من المرّات بدون باق بين H و D (أو بين N وَ P) من جهة أخرى. يكون معنا إذاً عددٌ m من الأوتار المتساوية بين C و H، وعددٌ n من الأوتار المتساوية بين H وَ D، فيكون معنا عدد $(m+n)$ من الأوتار المتساوية بين C وَ D. وتقابل هذه الأوتارَ المتساوية أقواسٌ متساوية، فيكون $\frac{\widehat{CH}}{\widehat{CD}} = \frac{m}{m+n}$.

إنّه من الواضح أنَّ الحصول على النسبة بين القوسين لا يمكن إلا مع بعض التقريب الذي يمكن دائماً تحسينه.



الشكل ١٠

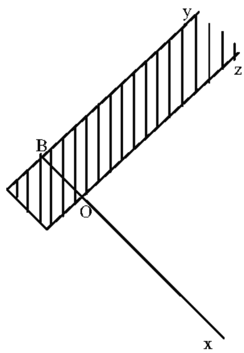
يشرح ابن الهيثم، بعد ذلك وبكثير من التفصيل، كيف يُمكن أن تكون النسبة المطلوبة غيرَ مُنطَقة. ولكنَّ الطريقة التي أشار إليها ابن الهيثم تؤدّي إلى نسبة *k* مُنْـطَقة. يجب على المسّاح، إذاً، أن يُحدِّد العدد *k* بأحسن تقريب، لكي يكون الفرقُ، بين القيمة التي يحصل عليها والقيمة الصحيحة، صغيراً إلى درجة تجعله بدون تأثير في النتائج التي تدخل فيها هذه النسبة.

يصل ابن الهيثم، بعد دراسة مساحات السطوح، إلى المجسّمات، فيعالج منها فقط تلك التي يدرسها المسّاحون، أي المجسّمات المحدودة بسطوح مستوية – وهي متعدِّدات السطوح – والأُكَر والأسطوانات والمخروطات.

أوّلُ متعدِّد للسطوح الذي درسه ابن الهيثم هو متوازي المستطيلات. يُقدِّم ابن الهيثم لحساب حجمه برهاناً في الحالة التي يكون فيها لأبعاده الثلاثة قاسماً مشتركاً متّخَـذاً كوحدة للحجم؛ وهو لا يشير إلى الحالات الأخرى. ويقوم بالاستدلال مفترضاً أنَّ كلَّ بعد، من أبعاد متوازي المستطيلات، مساوٍ لعدد من الأذرع، أي أنَّ كلّ بُعد مُضاعَفٌ لطول مأخوذ كوحدة للطول، وأنَّ وحدة الحجم هي المكعَّب الذي يكون حرفه مساوياً لوحدة الطول هذه. ولكنّنا نعلم، وفقاً للقضيَّة ٣٢ من المقالة الحادية عشرة من كتاب "الأصول"، أنّه إذا كان لمتوازيَي مستطيلات الارتفاع نفسَه، فإنّ حجميهما متناسبان مع مساحتَـي قاعدتيهما؛ فيمكننا، أن نستخدم هذه الخاصَّة، سواء أكانت قياساتُ هذه الأبعاد الثلاثة، بواسطة وحدة الطول، أعداداً صحيحة أم غير صحيحة.

يقصر ابن الهيثم دراسته على حجم متوازي المستطيلات، ولا يُشير إلى كيفيّة حساب حجم متوازي السطوح، ولا إلى حجم متعدِّد للسطوح قائم أو مائل. ولكنّه يُذكّر بالنتيجة الخاصَّة بهذا الحجم الأخير، كما يشير، وفقاً للقضيَّة السابعة من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول"، إلى أنَّ حجم الهرم يساوي ثلث حجم متعدِّد السطوح الذي له القاعدة نفسها والارتفاع نفسه.

يشرح ابن الهيثم، بعد ذلك، أنّه يمكن أن نقسم أيّ متعدد للسطوح إلى أهرام، فيكون حجمه مساوياً لمجموع أحجام هذه الأهرام؛ ونحصل على هذا التقسيم، إذا قسمنا صفائح متعدِّد السطوح وفقاً لأوتار زواياها. كلُّ ما في الأمر، إذاً بالنسبة إلى المسَّاح، هو أن يعرف كيفيّة حساب مساحة قاعدة الهرم وارتفاعه. ولكنَّ قاعدةَ الهرم مثلّثٌ، أو مضلّعٌ. فإذا كانت مثلّثاً، يكفي أن نقيس أضلاعه الثلاثة، لكي نحسب مساحته. وإذا كانت مضلّعاً، تكون مساحته مساوية لمجموع مساحات المثلّثات المحدَّدة بأوتار زوايا المضلّع، كما رأينا سابقاً. يجب، على كلِّ حال، أن نقيس أطوال هذه الأوتار، حتّى لو كانت قاعدة المجسَّم على الأرض. يُقدِّم ابن الهيثم، عندئذ، الطريقة التالية لتحديد وتر زاوية من زوايا قاعدة المجسَّم.

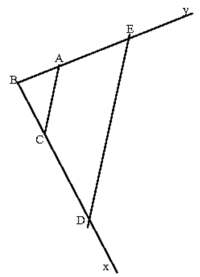


الشكل ١١

ترتكز هذه الطريقة على رسم زاوية $\widehat{xBy}$، في سطح قاعدة المجسَّم، مساوية لزاوية القاعدة $\widehat{xOz}$. نستخدم لأجل ذلك مسطرة ذات طرفين متوازيين فنُلصِق أحدَ هذين الطرفين على طول Oz، أحد ضلعي $\widehat{xOz}$، فيكون $By \,//\, Oz$؛ ونُلصِق على طول الضلع Ox طرف

مسطرة أخرى، فيقطع By على النقطة B. وتكون الزاوية $\widehat{B}$ مساوية للزاوية المدروسة (بسبب توازي أضلاعَ الزاويتين ثُناءً).

ثُمَّ ننقل، بعد أن نحصل على الزاوية $\widehat{xBy}$ ، على ضلعي هذه الزاوية، الطولين BE وَ BD المقاسين على ضلعَي زاوية قاعدة المجسَّم.



الشكل ١٢

ثمَّ نتناول، ثانية، الطريقة التي عرضناها سابقاً لتحديد طول وتر. إذا كان $l= BA$ وَ $BC=\frac{BD}{BE}$، يكون معنا $\frac{BD}{BC}=\frac{BE}{BA}$، فيكون المثلّثان ABC وَ EBD متحاكيين. ونقيس AC ونستخرج المعادلة $DE=AC.\frac{BE}{BA}$، فنحصل على $AC.BE=DE$.

إذا كانت القاعدة في مستوٍ متواصل، أي أملسٍ بدون تضرُّس، يُمكن أن نُمدِّد ضلعَي القاعدة على استقامة، حتّى نحصل على زاوية مقابلة بالرأس لزاوية القاعدة، فتكون مساوية للزاوية المدروسة.

وهكذا تكون لدينا طريقتان للحصول على زاوية مساوية للزاوية المدروسة:

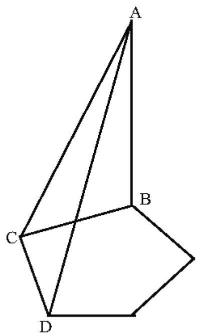
١– نرسم، بواسطة مسطرتين، حيث تكون الأولى ذات حرفين متوازيين وعرض مُعيَّن، زاوية ذات ضلعيْن موازيين لضلعَي القاعدة.

٢– نمدِّد، على استقامة وعلى الأرض إذا أمكن ذلك، ضلعَي الزاوية المدروسة؛ فنحصل على زاوية مقابلة لها بالرأس.

والسطوح الجانبيّة للهرم مثلّثيّة، سواء أكانت قاعدته مثلّثاً أو مضلّعاً. ويُدخِل ابن الهيثم، لأجل قياس الارتفاع، نقاطاً وقطعاً موجودة داخل مضلّع القاعدة. ويستخدِم، عندئذ، شكلاً مستوياً مساعداً ليقوم عليه بالرسوم الضروريّة للحصول على القَطَع التي يُريد قياسها. فهو يتناول سطحين لهما حرف مشترَك مثل AC. والمستويات ACB، ACD وَ BCD تُحدِّد زاوية مُثلّث السطوح ذات الرأس C المسمّاة "زاوية الهرم".

يستخدم ابن الهيثم عندئذ رسوماً في مستوي قاعدة الهرم ليقيس الارتفاع.

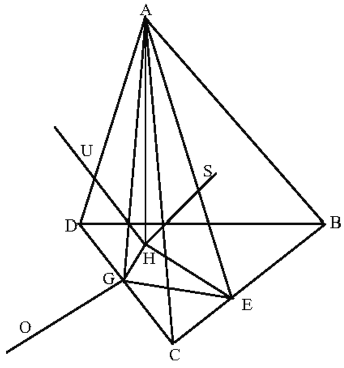
ليكن AE وَ AG ارتفاعَي المثلّثين ABC وَ ACD. وليكن LIK مثلّثاً بحيث يكون $\widehat{BCD} = \widehat{LIK}$، $LI = CE$ وَ $IK = CG$. يكون معنا:



الشكل ١٣

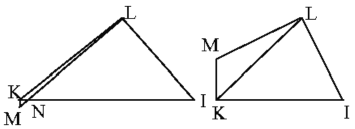
ا) إذا كانت الزاوية $\widehat{LIK}$ قائمة، تكون الزاوية $\widehat{CEG}$، عندئذ، قائمة. ولكنَّ $\widehat{CEA}$ زاوية قائمة، فيكون CE عموديّاً على المستوي EAG. ليكن GO موازياً للخطّ CE، فيكون GO عموديّاً على المستوي EAG، فيكون GO عموديّاً على GA؛ ولكنَّ GA عموديٌّ على DC، فيكون GA عموديّاً على الخطّين GO وَ GC، فيكون GA عموديّاً على مستويهما، أي على BCD؛ فيكون GA ارتفاع الهرم.

وتكون الزاوية $\widehat{IKL}$ قائمة أيضاً، فيكون AE ارتفاعاً للهرم.



الشكل ١٤

ب) إذا لم تكن أيَّة زاوية من الزاويتين $\widehat{ILK}$ وَ $\widehat{IKL}$ قائمة، نُخرِج العمودين في L و K على ضلعَي الزاوية $\widehat{LIK}$؛ فيتقاطعا، بالضرورة، على نقطة M. وإذا كانت الزاويتان في L و K حادَّتين، تكون M داخل الزاوية $\widehat{LIK}$؛ وإذا كانت إحدى الزاويتين في L وَ K منفرجة، تكون M خارج الزاوية $\widehat{LIK}$.



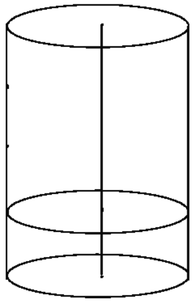
الشكل ١٥

ونُخرج من G وَ E العمودين على CG وَ CE، فيتقاطعان على نقطة H، النقطة المماثلة للنقطة M.

ليكن HS موازياً لـِ CE، وليكن HU موازياً لـِ CG. والزاويتان $\widehat{CEA}$ وَ $\widehat{CEH}$ قائمتان، وفقاً للفرضيّة، فيكون CE عموديّاً على المستوي (AHE)، ويكون HS عموديّاً على المستوي (AHE)، فنحصل على $AH \perp HS$. والزاويتان $\widehat{CGA}$ وَ $\widehat{CGH}$، هما أيضاً، قائمتان، وفقاً للفرضيّة، فيكون CG عموديّاً على المستوي (AHG) ويكون بالتالي HU عموديّاً على المستوي (AHG)، فنحصل على $AH \perp HU$، فيكون الخطُّ AH ارتفاع الهرم. نتناول المثلّث AEH لتحديد طول الارتفاع AH، حيث يكون معنا: $AE^2 - EH^2 =$

AH^2. ولكنَّ الطولَ $LM = EH$ في الشكل المستوي قابلٌ للقياس، والطول AE قابل للقياس على السطح ABC للهرم؛ يكون، إذاً، $AE^2 - LM^2 = AH^2$، ويكون AH قابلاً للحساب.

يتناول ابن الهيثم، بعد ذلك، حجم الأسطوانة ذات القاعدة الدائريّة وحجم المخروط ذي القاعدة الدائريّة. إذا كانت s مساحة القاعدة، وكان h ارتفاع أسطوانة قائمة، يكون الحجم $s.h = V$.



الشكل ١٦

والخطُّ الذي يصل بين مركزي دائرتي القاعدتين هو ارتفاع الأسطوانة، وهو يساوي طول الخطّ المولّد للأسطوانة. ليكن h قياس الارتفاع، وليكن V حجم الأسطوانة المطلوب وَ s مساحة القاعدة.

لنفصل على الارتفاع، بدءاً من القاعدة، طولاً مساوياً لوحدة الطول، ولنخرِج من النقطة التي نحصل عليها مستوياً موازياً لمستوي القاعدة؛ فنحصل على أسطوانة قاعدتها s وارتفاعها مساوٍ للوحدة؛ ليكن v حجمها. يكون معنا: $\frac{s}{\text{وحدة مساحة}} = \frac{v}{\text{وحدة حجم}}$.

تكون مساحة القاعدة s مساوية لحجم الأسطوانة الصغيرة v، إذا اخترنا وحدتين متلائمتين للمساحة وللحجم: $v = s$.

يفترض ابن الهيثم، بعد ذلك، أنَّ الارتفاع مقسومٌ إلى عدد h من الأجزاء المساوية لوحدة الطول. ونحصل، إذا أخرجنا مستويات موازية للقاعدة، على عدد h من الأسطوانات المساوية للأسطوانة الصغيرة الأولى، فيكون: $s.h = v.h = V$.

نلاحظ، وفقاً للقضيَّة ١٤ من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول"، أنَّ لدينا: $\frac{h}{1}=\frac{V}{v}$، فتكون المعادلة السابقة صالحة مهما كان h، قياس الارتفاع (كعدد صحيح أو غير صحيح).

أمّا حجم الأسطوانة المائلة، فنحن نعرف أنّه مساوٍ لحجم الأسطوانة القائمة التي لها القاعدة نفسها والارتفاع نفسه.

يتناول ابن الهيثم، بعد ذلك، حجم المخروط القائم وحجم المخروط المائل، فيذكّر بأنّه مساوٍ لثلث حجم الأسطوانة التي لها القاعدة نفسها والارتفاع نفسه ، فيكون $\frac{1}{3}\ s.h = V$.

وإذا أردنا الحصول على s، مساحة القاعدة الدائريّة، نقيس محيطها $2p$، ونستخرج منه القطر $\frac{7}{22}.2p \approx d$، فيكون $\frac{pd}{2}=s$.

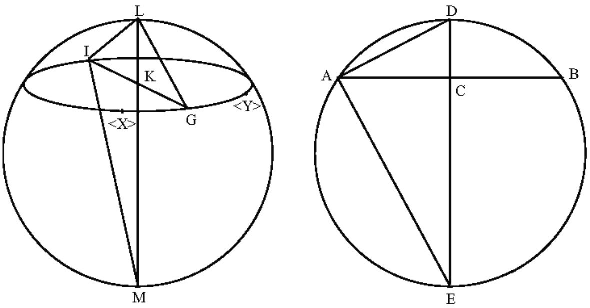
ينهي ابن الهيثم دراسته، لأحجام المجسَّمات، بدراسة حجم الكرة. فهو لم يكن على علم فحسب بأعمال أسلافه في هذا المجال، مثل أرشميدس وبني موسى على الأخصّ، بل كان قد حدَّد بنفسه هذا الحجم في مؤلّف[11] حُرِّرَ قبل مؤلّفه "في أصول المساحة". وكان قد أثبت أنَّ هذا الحجم يساوي مساحة دائرة عظمى للكرة مضروبة بثلثيْ قطرها.

يشرح ابن الهيثم كيفيّة رسم دائرة، في مستوٍ، مساوية لدائرة عظمى للكرة، وكيفيّة تحديد القطر. فهو يقدّم الطريقة التالية. نرسم، بواسطة البركار الذي تكون فتحته مساوية لـِ e، دائرة ذات قطب L على الكرة. ثم نأخذ نقطتين X وَ Y على هذه الدائرة. نحدّد G وَ I، وسطَي القوسين $\widehat{XY}$، بطريقة تقريبية: نُغيِّر فتحة البركار حتّى تسمح بإيجاد النقطة G بحيث يكون $GX = GY$، فيكون $\widehat{GX}=\widehat{GY}$؛ ثمَّ نحدِّد النقطة I بحيث يكون $IX = IY$، فيكون $\widehat{IX}=\widehat{IY}$. والقطعة IG هي قطر الدائرة المرسومة. وإذا كانت النقطة K وسط القطعة IG، فإنَّ الخطّ يمرُّ بمركز الكرة ويُعطي القطر LM لهذه الكرة. يُمكن أن نقيس طول IG بواسطة فتحة البركار، ولكنَّ الأمر مختلفٌ بالنسبة إلى الطولين LK و LM، داخل الكرة. يدلُّ ابن الهيثم، عندئذ، على كيفيّة رسم شكل مسطّح مساوٍ للشكل $ILGM$ ، بواسطة الأطوال المعلومة $e = IL = GL$ وَ $2h = 2IK = IG$. ونرسم قطعة، AB، ذات وسط C

---

[11] انظر : "قول في مساحة الكرة"، ضمن المجلد الثاني من هذه الموسوعة، ص. ٢٨٦-٣٠٠.

مع $IG = AB$، فيكون $h= IK = CA$؛ ونأخذ نقطة D على منصِّفها العموديّ، بحيث يكون $e = LG = AD$. ويقطع الخطُّ العموديُّ في A على AD الخطَّ DC على النقطة E.



الشكل ١٧

المثلث القائم الزاوية DAE، في الشكل المستوي، مساوٍ للمثلث LGM، في الشكل المجسَّم، لأنهما مشابهان لمثلث قائم الزاوية ذي وترٍ e ($e = LG = AD$) وضلع h ($h = IK = CA$) ولأن لهما ضلعان متساويان $LG = AD$.

يُمكن، عندئذ، أن نقيس القطر DE على الشكل المستوي، أو أن نحسب DE تبعاً للطولين المعلومين e وَ h : $e = AD$ وَ $h = AC$. يكون معنا $e^2 - h^2 = AD^2- AC^2 = DC^2$ ، فنحصل على $\sqrt{e^2-h^2} = CD$.

ويكون معنا، من جهة أخرى، $DC.DE = AD^2$ ، فنحصل على $\frac{e^2}{\sqrt{e^2-h^2}} = DE$.

يُمكن أن نكتب أيضاً $DC.DE = AC^2$ ، فنحصل على $\frac{h^2}{\sqrt{e^2-h^2}} = CE$ ، فيكون

$$\sqrt{e^2-h^2} + \frac{h^2}{\sqrt{e^2-h^2}} = DE.$$

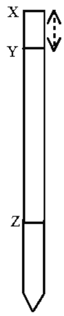
لنضع $d=DE$؛ فتكون مساحة الدائرة العظمى $S = \pi\frac{d^2}{4} \approx \frac{11}{14}d^2 = d^2 - \frac{1}{7}d^2 - \frac{1}{14}d^2$ ، ويكون حجم الكرة $V = \frac{2}{3}d.S$.

لنلاحظ أنَّ فائدة الشكل المستوي هي السماح بقياس الطولين $LK = DC$ وَ $LM = DE$.
ولكنَّ حساب هذين الطولين، انطلاقاً من الطولين المعلومين $e = LI = GL$ وَ $h = KI$، يُمكن أن يتمَّ انطلاقاً من المثلث LGM في الشكل المجسَّم.

لنلاحظ أيضاً أنَّ فتحة البركار $e = LI = GL$، لرسم دائرة قطبها L على الكرة، تبقى اختياريّة. إنَّ دقة النتيجة، التي نحصل عليها بهذه الطريقة، تتعلق بالعناية التي يؤدِّيها المسّاح في تحديد النقطتين I وَ G ، وسطي قوسي الدائرة ذات القطب L، لأنّه لا يُمكن أن يحصل على هاتين النقطتين إلا بالتجربة والخطأ للعثور على فتحة البركار المناسبة.

يُعالج الفصل الأخير من هذا المؤلّف لابن الهيثم مسألةً تهمُّ المسّاحين قبل كلّ المسائل الأخرى؛ وهي تحديد ارتفاع هرم أو مخروط أو جسم صلب مرتفع فوق الأرض، بطريقة تجريبيّة. والارتفاع المطلوب هو العمود المُسقَط، من نقطة هذا الجسم الأكثر علوّاً، على مستوي القاعدة. ويمكن استخدام هذه الطريقة، خاصّة، عندما يَتعَذر بلوغ إحدى النقطتين، الرأسِ ومسقطِه، أو كلتيْهما.

نأخذ، وفقاً لهذه الطريقة، عوداً وشاقولاً، بحيث يكون طولُ كلّ منهما أعظمَ من قامة الراصد. ونحفر على العود، ذي الطرف X، علامةً دائريّة على مسافة XY مساوية للذراع، وهو وحدة الطول المُختارة هنا. يستخدم الراصدُ، عندئذ، الشاقولَ لكي يُحدِّد ارتفاعَ عينه، h، عن الأرض؛ وهو يضع، لأجل ذلك، خيطَ الشاقول مقابل عينه بواسطة إصبعه، ثمَّ يجعل الخيط ينزلِق على إصبعه فيُصعِد الخيطَ أو يُهبطه حتّى تلمس ثقّالة الشاقول الأرضَ. فيكون طول الخيط بين الأصبع والثقّالة مساوياً للارتفاع المطلوب h. ثمَّ ينقل هذا الطول على العود بدءاً من النقطة Y، فيحصل على النقطة Z، حيث يحفر علامة دائريّة حول العود؛ يكون معنا $XY = 1$ وَ $YZ = h$.



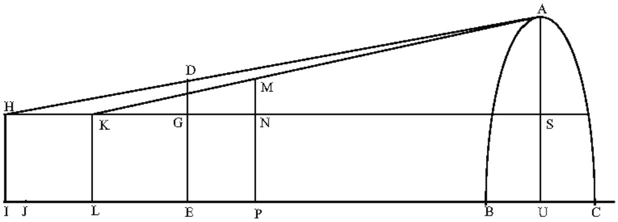
الشكل ١٨

أمّا باقي العود، فيمكن أن يكون طرفه مُسَنّناً بحيث يسمح بغرزه في الأرض.

ليكن الآن AU الارتفاع الذي نريد قياسه. الأرضُ ممثّلة، في الحالة التي نقيس فيها ارتفاعَ حائطٍ أو جبلٍ، بالخطّ BC. ويكون معنا $AU \perp BC$.

نضع العود XYZ في الوضع DGE مغروزاً في الأرض؛ ويكون معنا $BC \perp DE$، $XY = DG$ وَ $YZ = GE$. يبحث الراصد عن الوضع الذي يسمح له بأن يُصوِّبَ نظره، في آن واحد، إلى النقطتين D، طرف العود، و A، رأس الجسم الذي نريد قياس ارتفاعه؛ ليكن HI هذا الوضعَ، حيث تُمثّل النقطة H العين، وتمثّل النقطة I وسط القدم. يكون معنا $HI \parallel DE$. يحفر الراصد الأرض في النقطة I ويُسجِّل المسافة $l_1 = IE$. ويرسم الخطّ IE الذي يمرُّ بالنقطة U. ثمَّ ينتزع العود من الأرض ليضعه في الوضع MNP الأكثر قرباً من العمود AU الذي يجب قياس طوله؛ وتكون النقطة P على EU مع $EU \perp MP$، $XY = MN$ وَ NP YZ. يبحث الراصد، عندئذ، عن الوضع الذي يسمح له بأن يُصوِّب نظره إلى النقطة M والرأس A. ليكن KL هذا الوضع، حيث تكون K العين وتكون L وسط القدم على الخطّ IU. ويحفر الراصد الأرض في النقطة L ويُسجِّل المسافة $l_2 = LP$ وَ $d = LI$.

يكون المستوي، المحدَّد بالخطّين HI وَ DE، عمودياً على الأرض ويحتوي على الخطّ AU. تقع النقاط I، L، P وَ U، على الخطّ IE الذي رسمه الراصد. والنقاط H، K، G وَ N، متسامتة على خطّ موازٍ للخطّ IE؛ وهو يقطع AU على النقطة S.



الشكل ١٩

وهكذا تكون لدينا الأطوال المعلومة: $h = MP = GE = KL = HI$ ، $l = MN = DG$، والأطوال المقاسة على الخطّ UI. والمثلّثان HDG وَ HAS قائما الزاوية ومتشابهان؛ فيكون معنا $\frac{HG}{GD} = \frac{HS}{SA}$.

والمثلثان HDG وَ HAS هما، أيضاً، قائما الزاوية ومتشابهان؛ فيكون معنا $\frac{MN}{NK} = \frac{AS}{KS}$. ولكنّ $MN = GD$، فنحصل على $\frac{HG}{NK} = \frac{HS}{KS}$.

ولكنَّ لدينا $HS > KS$، فنحصل على $HG > NK$ وبالتالي على $IE > LP$. فلتكن J نقطة على القطعة IE بحيث يكون $NK = LP = JE$ ، فيكون معنا $\frac{EI}{EJ} = \frac{HS}{KS}$، فنحصل على $\frac{EI}{IJ} = \frac{HS}{KS}$. ولكنّ $IL = HK$، فيكون $\frac{HS}{IE} = \frac{IL}{IJ}$، وَ

$$HS.IJ = EI.IL \quad (١)$$ ؛

ونستخرج، من المعادلة $\frac{HS}{SA} = \frac{HG}{GD}$ مع $l = GD$،

$$HG.SA = HS \quad (٢)$$.

ونحصل من (١) وَ (٢) على $EI.IL = HG.SA.IJ$.

ولكن $EI = HG$، فنحصل على $SA = \frac{IL}{IJ}$. فيكون الارتفاع AU مساوياً لـِ $US + SA = GE + \frac{IL}{IJ}$، وهذا ما يمكن كتابته، إذا استخدمنا الأطوال التي يقيسها المسّاح:

$UA=\frac{d}{l_1-l_2}$، حيث يكون h ارتفاع العين فوق الأرض، وتكون الأطوال l_1 وَ l_2 وَ d مقاسة على الخطّ المرسوم على الأرض وسهلة البلوغ؛ وهذا ما يُعلّل الاحتياطات الخاصّة بتعليم النقاط التي تحدِّد هذه الأطوال.

يُنهي ابن الهيثم كتابه بــ "جدول المسّاح" الذي يتناول فيه ثانية النتائج وطرائق القياس بدون البراهين؛ وذلك ليسمح، بدون شكٍّ، للمسّاح بأن يجد بسهولة الصيغةَ التي يبحث عنها. ويُحقّق هذا الجدول ، وحده وبفضل المكان الذي يحتلّه في الكتاب، الأهدافَ التي أراد ابن الهيثم بلوغها.

ونلاحظ أنَّ ابن الهيثم، في هذا الكتاب، يُرجع قياس الخطوط المنحنية إلى قياس الخطوط المستقيمة، ويُرجِع قياس مساحات السطوح إلى قياس مساحات المستويات، ويُرجع كل هذه القياسات، في النهاية، إلى قياسات خطّية.

وهذه القياسات منسوبة إلى وحدة قياس اختياريّة؛ وهو يُعبِّر عنها بواسطة أعداد مُنْطقة أو غير مُنطقة. يُدخل ابن الهيثم، بالفعل، مفهوماً عددياً للنِّسَب بين المقادير.

إنَّ منهجَ ابن الهيثم مُحْكَمٌ في هذا المؤلّف كما هي الحال في أعماله الأخرى؛ والخواصّ والبراهين المتعلّقة بقياس الأحجام منقولة، إلى أبعد درجة ممكنة، عن الخواصّ والبراهين المشابهة لها المتعلّقة بالهندسة المستوية. وهكذا نتحقّق، في هذا المؤلّف وفي المؤلّفات الأخرى الخاصَّة بالمحيطات المتساوية وبالأحجام المتساوية، من أنَّ المضلّعات مقسومة إلى مثلّثات، كما أنَّ متعدِّدات السطوح مقسومة إلى أهرام.

إنَّ الاهتمام الرئيسيّ لابن الهيثم في هذا المؤلّف هو تأسيس الهندسة العمليَّة على براهينَ دقيقة. ولعلَّ هذا هو السبب الذي جعله يُهمل مسألة الأخطاء في القياسات.

٤–٢–٢ في مسألة مجسَّمة

ينسب التقليد المخطوطيُّ إلى ابن الهيثم رسالتين قصيرتين مكرَّستين لمسألة في قياس المجسَّمات. عنوان الرسالة **الأولى** هو "في معرفة ارتفاع الأشخاص القائمة وأعمدة الجبال

وارتفاع الغيوم". وعنوان الرسالة **الثانية** هو "في استخراج أعمدة الجبال". تعالج هاتان الرسالتان نفس المسألة بطريقتين مختلفتين. تتدرج هذه المسألة، كما قلنا سابقاً، ضمن تقليد قديم يرجع، نوعاً ما، إلى كتاب "المناظر" لأقليدس؛ فقد عالجها الكِندي وسنان بن الفتح والقبيصي، وغيرهم بلا شكّ؛ وابن الهيثم هو الذي حلّها في موجزه. تُظهر المقارنة بين الحلّين، مباشرة، أنَّ الفكرة الأساسية هي نفسها، ولو أنَّ الطريقة المستخدَمة في الموجَز أكثر دقّة وأكثر سهولة أيضاً. ويمكن أن يتعلّق الأمر، في هذه الرسالة، بحلّ أوّل؛ وربَّما تناوله ابن الهيثم ثانية عند تحريره للموجز الذي قد يكون متأخِّراً عن الرسالة. فلا يقدِّم هذا النصّ، في هده الحالة المحتملة، سوى فائدة تاريخيّة في نظر ابن الهيثم نفسه.

يتعلّق الأمر بتقديم طريقة لحساب ارتفاع AB يَتــَعَذّر قياسه بطريقة مباشرة، أيْ أنَّ مسقطه العموديّ يوجَد على مسافة لا يُمكن قياسها. يتناول ابن الهيثم عوداً ذا طول معلوم DE؛ ويضعه على موازاة الارتفاع AB، على التوالي، في موضعين مختلفين DE وَ GH، ويبحث عن موضع العين الذي يسمح، في آن واحد، برؤية الرأس A ورأس العود. ترجِع طريقة ابن الهيثم إلى قياس ثلاث مسافات: مسافة العين إلى طرف العود الأسفل، أيْ CD في الحالة الأولى، و KH في الحالة الثانية، والمسافة بين موضعَي العين.

ليكن AB، إذاً، الارتفاع الذي يجب قياسه، فوق الأفق Bx. لنأخذ العود DE ذا الطول المعلوم، ولنضعه في أيّ موضع، ولكن بحيث يكون $DE \perp Bx$. لنحدِّد، بالتجربة والخطأ، موضعَ العين C بحيث يمرُّ الشعاع البصريّ CA بالنقطة E. ثمَّ نُقرِّب العود من الارتفاع AB؛ وليكن GH الوضع الجديد للعود، وليكن K موضع العين، على أن تكون النقاط K ، G، وَ A متسامتة. يكون معنا

$$\frac{DE}{DC} = \frac{AB}{BC} \quad ؛ \qquad (١)$$

$$\frac{DE}{KH} = \frac{HG}{KH} = \frac{AB}{KB}. \qquad (٢)$$

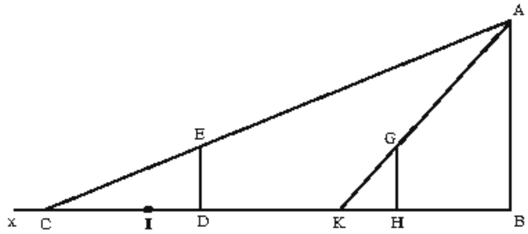
يكون معنا $BC > BK$، فنحصل على $DC > KH$. لتكن K نقطة على CD، بحيث يكون $HK = DI$. يكون معنا:

$$\frac{KB}{AB}=\frac{KH}{HG}=\frac{ID}{DE}. \qquad (٣)$$

نستخرج من (١) وَ (٣) : $\frac{CD}{DI}=\frac{CB}{BK} \Leftarrow \frac{CI}{ID}=\frac{CK}{KB}$؛

ونستخرج من هذه المعادلة الأخيرة ومن (٣): $\frac{CI}{DE}=\frac{CK}{AB} \Leftarrow AB=\frac{DE.CK}{CI}=\frac{DE.CK}{CD \quad KH}$.

نحن نعلم مقدار الطول DE، ويُمكن أن نقيس على الخطّ الأفقيّ Bx المسافتين CK وَ CI، فنتوصّل إلى حساب AB.

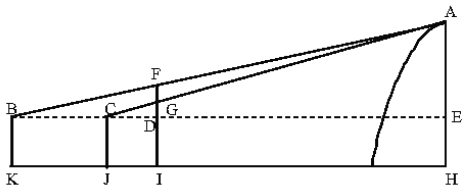


الشكل ٢٠

إذا أخذنا كلّ شيء بعين الاعتبار، نجد أنّ ابن الهيثم يعرض على المسّاحين طريقة بسيطة للحساب، ولو أنّ الطريقة غير سهلة في التطبيق. فكيف يُمكن وضع العين على الأفق Bx؟ وهذا، بالتحديد، ما سيتداركه في موجزه.

تختلف الرسالة الثانية – في استخراج أعمدة الجبال – عن الرسالة الأولى بالهدف والمنهج والأسلوب الذي تتميَّز به. يريد المؤلّف، في هذه الرسالة أن يُلبّي مباشرة حاجات المسّاحين مقدّماً لهم قاعدة كمّيّة قابلة للتطبيق مباشرة، كأنّها وصفة كما قد يُقال، بينما كان يحرِص في الرسالة الأولى على تعليل القاعدة المعروضة ببرهان. وهو يقدِّم، بالإضافة إلى ذلك في هذه الرسالة الثانية، قيمة عدديّة ثابتة لأحد الوسطاء، وهذا ما يقوّي الانطباع بأنّ الأمر يتعلّق بوصفة فقط. ويُبقي المؤلّف، من ناحية أخرى، العودَ ثابتاً، هذه المرة، ويُعلِّم إشارة عليه ليقوم بالرصدين، بينما يقوم في الرسالة الأولى بنقل العود من مكانه

الأوّل إلى مكانٍ ثانٍ لأجل القيام بتصويبـَـي النظر الضروريّين نحو الهدف. ولا يقوم ابن الهيثم، في هذه الرسالة، بتوضيح الفرضيّات، خلافاً لعادته. ولكي نفهم كيف انحَرَفَ عن هذه القاعدة التي اعتاد عليها، لنرسم الشكل الذي هو غائب في نسخة المخطوطة التي وصلت إلينا، حيث ترك له النسّاخ مكاناً بدون أن يرسمه فيه.



الشكل ٢١

القطعة IF هي العود الذي طولـُـه خمسُ أذرع ونصف، وَ ID هي قامة الراصد التي طولـُـها ثلاثُ أذرع ونصف (لم يوضّح المؤلّف هذه الفرضيّة)، ويكون $DG = GF =$ ذراع واحدة. نضع علامة على النقطة G. يقوم الراصد بأوّل تصويب، بحيث تكون النقاط B، F وَ A متسامتة (AH هو الارتفاع الذي يجب قياسه وَ B هي عين الراصد). ثمَّ يقوم الراصد بتصويب ثانٍ بحيث تكون النقاط C، G وَ A متسامتة (C هي عين الراصد).

لتكن $d(K, J) = l_1$ المسافة بين نقطتي الرصد؛ ولتكن $d(J, I) = l_2$ المسافة بين نقطة الرصد الثانية والعود؛ وليكن $h = DI = CJ = BK = EH =$ ثلاث أذرع ونصف، وليكن x الارتفاع المجهول HA، $d(H, K) = s$. يكون معنا، مباشرة:

$$l_2 < l_1 \quad ، \frac{2l_1}{l_1 - l_2} + h = x \text{ وَ } \frac{l_1(l_1 + l_2)}{l_1 - l_2} = s.$$

لنقارن هاتين الرسالتين، بهدف وضعهما في السياق التاريخي لذلك العصر، برسالتين أخريين، حرّرَهما، على التوالي، سنان بن الفتح وأبي صقر القبيصي.

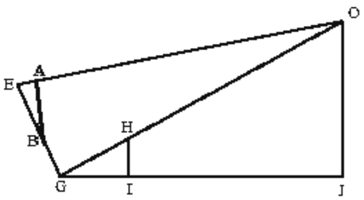
يتناول سنان بن الفتح ثانية هذه المسألة نفسها، في كتاب عنوانه "المساحات المناظريّة"[١٢]، وهي مسألة قياس ارتفاع جبل OJ. لتكن العين، التي تنظر إلى الرأس O، في G. نأخذ عوداً عموديًا على GO في G. نخرج BA من أيّة نقطة B على GE، بحيث يكون $BA \perp EO$. والمثلثان القائما الزاوية OGE وَ BAE لهما زاوية مشتركة، فيكون $\frac{EG}{GO}=\frac{EA}{BA}$،

فنحصل على $GO=\frac{BA.EG}{EA}$.

ثمَّ نأخذ عوداً، HI، غيرَ معلوم الارتفاع فنضعه عموديًا على EJ بحيث تكون النقاط G، H وَ O متسامتة. يكون معنا $\frac{GH}{HI}=\frac{GO}{OJ}$، فنحصل على $OJ=\frac{GO.HI}{GH}$.

ونفترض أنَّ بالإمكان قياس GH.

لنلاحظ أنَّ سنان بن الفتح يفترِض أوّلاً أنَّ العين موجودة في G، ثمَّ يفرضها في النقطة E على الخطّ العموديّ في G على الشعاع البصريّ GO. ثمَّ يُخرِج، من نقطة B مأخوذة على EG، الخطَّ العموديّ BA على الشعاع البصريّ EO. ولكنّه لا يشرح كيف نُخرِج خطوطاً عموديّة على شعاع بصريّ، ولا كيف نقيس القطع المستقيمة BA، EG، EA وَ GH الموجودة إمّا على شعاع بصري مثل EA وَ GH أو عموديّة على شعاع بصري مثل EG وَ BA. يُمكن، بالتأكيد، أن نتّخذ العصيّ المجوَّفة لتمثيل الخطوط والقطع المستقيمة، ولكنَّ سنان بن الفتح لا يعرض ما يشبه ذلك. إنَّ طريقته، خلافاً لطرائق ابن الهيثم، نظريَّة أكثر مما هي عمليَّة.



الشكل ٢٢

[١٢] انظر الملحق الثاني.

إنَّ حلّ أبي صقر القبيصي مختلف أيضاً. فهو يستخدم، لتحديد الارتفاع AB الذي يتـــعَذّر قياسه مباشرة، إسطرلاباً لكي يحصل على مقدار ارتفاع النقطة A فوق الأفق، في موضعين C وَ D لعين الناظر. وهو يُدخِل في هذا الحساب جيوب الزوايا المقاسة وجيوب التمام لهذه الزوايا. ويقوم بالحسابات بواسطة مثلّثات قائمة الزاوية.

ليكن $a = \widehat{ACB}$ وَ $b = \widehat{ADB}$. يكون معنا:

$\sin a = \sin \widehat{ACB}$ ، $\cos a = \sin \widehat{BAC}$ ، $\sin \alpha = \sin \widehat{ACB}$ ، $\cos \alpha = \sin \widehat{BAC}$ ، $\sin \beta = \sin \widehat{ADB}$ ، $\cos \beta = \sin \widehat{BAD}$.

ثمَّ يقوم القبيصي بالحساب التالي :

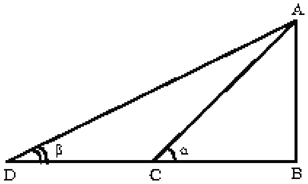
$$\cos\beta - \frac{\cos\alpha \sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha}.$$

ليكن $d = CD$، فيكون $AB = \frac{d.\sin\beta.\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$.

ويكون معنا، لأيّ مثلث ADB، $\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{DC}{\sin\widehat{ADC}}$؛ ولكنَّ $\alpha - \beta = \widehat{DAC}$، فنحصل على $AC = \frac{d.\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$.

ويكون معنا، في المثلث ABC، $AC.\sin\alpha = h = AB$ ، فنحصل على $h = d.\frac{\sin\alpha.\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$، وهي النتيجة التي يُعطيها القبيصي.

تتطلّب هذه الطريقة، إذاً، استعمالَ الإسطرلاب واستخدامَ جدولٍ مثلّثاتيٍّ للحسابات. والطول الوحيد الذي يجب قياسه هي المسافة CD بين موضعَي العين.



الشكل ٢٣

يتوجّه ابن الهيثم إلى المسّاحين، بخلاف ما يفعله القبيصي، وفقاً للوسائل التي توجد لديهم. ليس من واجبهم أن يستعملوا الإسطرلاب، ولا أن يستخدموا جدولاً مثلّثاتيّاً؛ بل إنّ عليهم أن يقيسوا مسافتين أو ثلاث مسافات، وفقاً للحالة التي يدرسونها.

٤-٣ تاريخ النصوص

٤-٣-١ "في أصول المساحة"

لقد كاد مؤلّف ابن الهيثم "في أصول المساحة" أن يكون في عداد كتب ابن الهيثم المفقودة. ليس لدينا بالفعل من هذا النصّ، خلافاً لما يؤكّده المؤرّخون وكتّاب السِّيَر المُحْدَثون، أيّ مخطوطة كاملة بل مقاطع منه فقط. ويوجَد منه حتّى الآن مقطعٌ وحيدٌ مطبوعٌ، ولكن بدون أن يُحقّق تحقيقاً علميّاً، في المكتب الهندي في لندن. ولقد اعتُبِرَ هذا المقطعُ، بالرغم من التناقض البديهيّ، نصّاً كاملاً لهذا المؤلّف. ولم تتمّ دراسة أيّ مقطع آخر من نصّ هذا المؤلّف، حتّى الآن.

لقد استطعنا الحصول، خلال بحوثنا حول هذا المؤلّف، على أربعة مقاطع تُتمّم بعضها البعض، لحسن الحظ؛ فاستطعنا بفضل هذه المقاطع أن نستعيد النصّ بكامله؛ ونورد فيما يلي التحقيق الأوّل لهذا النصّ والدراسة الأولى.

١- المقطع الأوّل، وهو الأهمُّ إلى حدٍّ بعيد، يوجد في سان بطرسبرغ في مكتبة المعهد الشرقيّ تحت الرقم *B2139*. وهو ضمن مجموعة تبدأ بمؤلّف "الفوائد البهائيّة" لابن الخوّام البغدادي، ويتبعه مؤلّف ابن الهيثم، ثمّ مؤلّف "الحساب" للكرجي.

يحتلّ نصّ ابن الهيثم الأوراق ١٠٠و-١٣٩ظ، وهي من مقاس *23,3×13,4*. والنصّ مكتوب في مستطيل *18,8×10,4* مرسوم بالأحمر؛ تحتوي كلّ صفحة على ١٥ سطراً ويحتوي كلّ سطر على ١٣ كلمة تقريباً. النصّ مكتوب بالخطّ النسخيّ وبالحبر الأسود؛ ولقد خُطّط بالحبر الأحمر تحت العناوين؛ والأشكال الهندسيّة مرسومة بهذا الحبر نفسه. لقد أفسدت الرطوبة، للأسف، أطراف الأوراق، وهذا ما جعل القراءة صعبة جدّاً.

نُسِخت هذه النصوص بِيَد شخص اسمه أبو بكر بن الخليل التاجر(؟)؛ وهذا ما تُشير إليه الجملة الختاميّة لمؤلّف ابن الخوّام:

"وفرغ من تحريرها العبد الضعيف المحتاج إلى رحمة ربّه الجليل أبو بكر بن خليل الـــاجر(لعلّها التاجر)..."

ونحن لا نعرف شيئاً عن هذا النسّاخ سوى أنَّ معرفته بالإملاء سيِّئة. تُبيِّن كثرة الأغلاط، بالفعل، أنَّ أبا بكر لا ينتمي إلى المجتمع العلميّ. نرمز إلى هذا النص بـِ [ل].

٢- يوجَد المقطع الثاني الذي أشرنا إليه أعلاه في مكتبة المكتب الهندي في لندن، تحت رقم ١٢٧٠، على الأوراق ٢٨ظ-٣٢ظ، نرمز إليه بـِ [ط]. لقد تكلّمنا على هذه المخطوطة في عدَّة مناسبات، لأنّها تحتوي على عدَّة مؤلّفات لابن الهيثم[١٣]. ولقد تعرَّض مؤلّفُ ابن الهيثم "في أصول المساحة" وكذلك المؤلّفُ الذي يسبقه في المخطوطة "في شكل بني موسى" لحادث مهمٍّ أشار إليه قارئ قديم. فقد أنقِصَ المؤلّفُ الأخير من آخره، وأنقِص المؤلّفُ الأوّل من أوّله، وقـُـدِّم المؤلّفان بشكل متواصل كمؤلّف واحد. كلُّ شيء يدلُّ على أنَّ هذا الحادث قد حصل للنسخة الأصليّة التي نُسِخت عنها هذه المخطوطة؛ ولم ينسَ أحد القرّاء أن يُنبِّه إلى هذا الحادث، فكتب على الهامش من جهة اليسار "قد فات من هنا آخر رسالة بني موسى"، كما كتب على الهامش من جهة اليمين "من هنا رسالة المساحة التي فات أوّلها". وهذا النقصان كبير في أهمِّيَّته.

[١٣] انظر على سبيل المثال: المجلّد الثاني من هذه الموسوعة، ص. ٦٧؛ انظر أيضاً الفصل الثالث من هذا المجلّد.

٣- يوجد المقطع الثالث في مكتبة السليمانيّة في إسطنبول، تحت رقم فاتح ٣٤٣٩، على الأوراق ١٠٣ظ-١٠٤ظ، ونرمز إليها بـِ [ف]. ولقد سبق أن أوردنا القليل الذي نعرفه عن هذه المخطوطة[١٤].

٤- يوجد المقطع الرابع ضمن مخطوطة في المكتبة الوطنيّة في سان بطرسبرج ذات الرقم (*fyrk arabe143*)،على الأوراق ١٣ظ-١٥ظ. يتعلّق الأمر بمجموعة من الكتابات الريّاضيّة؛ أوّل هذه المؤلّفات هو "كتاب المساحة" لأبي بكر المارستاني. يُعطي النسّاخ تاريخ نقل المخطوطة في الجملة الختاميّة لهذا المؤلّف "في العشر الأخير من ربيع الأوّل سنة اثنتي عشرة وستمائة"، أي خلال شهر تموّز/يوليو سنة ١٢١٥ ميلاديّة. الخطُّ هو نستعليق، ونرمز إليه بـِ [د]. ونلاحظ أنَّ الرطوبة قد أتلفت هذه المخطوطة؛ وهذا ما جعل قراءتها صعبة أحياناً.

تُبيِّن دراسة الروايات المختلفة والإسقاطات، بشكل أكيد، أنَّ هذه المقاطع الأربعة تنتمي إلى أربع فصائل مختلفة، وينقص في كلٍّ من هذه المقاطع كلمات وجمل خاصَّة به.

أمّا التحقيقات والترجمات والدراسات الموجودة لهذه المقاطع فهي شبه معدومة. وكما قلنا، سابقاً، إنَّ مقطع المكتب الهندي هو المقطع الوحيد الذي قرِئ؛ وذلك أنَّ أ. ويدمان (*E. Wiedmann*) ترجم منه إلى الألمانية الموجزَ النهائيَّ فقط، أي الأوراق ٣١و-٣٢ظ؛ وهو لم يُترجم المقطع بكامله كما زعم بعض المؤرِّخين وكُتّاب السِّيَر[١٥]. ولم تُتبَع هذه الترجمة الجزئيّة، التي أنجِزت بتصرُّف، بأيَّة دراسة. ولقد نُشِرَ هذا المقطع فيما بعد، بدون أيّة دراسة نقديّة للنصّ[١٦]؛ وهو لا يُمثّل، من ناحية أخرى، سوى ما يزيد على ثلث المؤلّف بقليل.

٤-٣-٢ "في معرفة ارتفاع الأشخاص القائمة وأعمدة الجبال وارتفاع الغيوم"

لا توجَد هذه الرسالة "في معرفة ارتفاع الأشخاص القائمة وأعمدة الجبال وارتفاع الغيوم" ضمن قائمة أعمال ابن الهيثم التي أوردها كُتّاب السِّيَر القدامى. ليست هذه هي

---

[١٤] انظر: المجلد الثاني من هذه الموسوعة، ص. ٦٧.

[١٥] انظر : E. Wiedmann, Aufsätze zur arabischen Wissenschafts-Geschichte(Hildesheim/New York, 1970) ، المجلّد الأوّل، ص. ٥٣٤-٥٤٢.

[١٦] انظر : ابن الهيثم، مجموع الرسائل ، المكتبة العثمانيّة (حيدرأباد ١٩٣٨-١٩٣٩).

الحالة الوحيدة التي تجري فيها الأمور على هذا الشكل؛ وهذا لا يُدخل أيَّ شكٍّ في نسبة النصّ إلى ابن الهيثم. وكان من الممكن، على الأكثر، أن يحفزنا هذا الوضع على التحقّق من أنَّ الرسالة لم تُستخرَج من مؤلّف آخر لابن الهيثم. وهذا ما لم يحدث، إذ إنَّ الطريقة التي نلاحظها، هنا، مختلفة عن الطرائق المطبَّقة في المؤلّفين الآخرين اللذين نعرفهما. ولقد وصل إلينا هذا الكتاب، بالإضافة إلى ذلك، في أربع مخطوطات منسوبة بوضوح إلى أبي عليّ بن الهيثم.

تنتمي المخطوطة الأولى إلى مجموعة مُهمَّة في مكتبة جامعة كولومبيا في نيويورك تحت الرمز (*Smith Or. 45/12*) على الورقتين ٢٤٣ظ-٢٤٤و. ونرمز إليها بـِ [كـ].

وكنّا قد استخدمنا هذه المخطوطة لإثبات كتابات الخيّام وشرف الدين الطوسي والسجزي، وبيَّنّا في كلّ مرّة أنّها النسخة الأصليّة التي استند إليها نسّاخ مجموعة لايدن (Leiden Or. 14) لينقل هذه النصوص. لا يُخالف مؤلّف ابن الهيثم هذا، هذه المرّة أيضاً، المؤلّفات الأخرى الواردة في هذه المجموعة. لقد نُسِخت المخطوطة، على الأرجح، خلال القرن الثالث عشر الميلاديّ، وكُتبت بالخطّ النسخيّ، ورُسمت أشكالها بيد النسّاخ. يُبيِّن تفحُّص المخطوطة، من ناحية أخرى، أنَّ عدّة أجزاء منها قد فُقدت، بانتزاع الأوراق على الأرجح، كما فُقِد مؤلّفٌ كاملٌ للقوهي، إذ إنَّ عنوانه قد ذكِر مع العناوين الأخرى في الصفحة الأولى (الورقة ١ و). يتعلّق الأمر بكتاب "صناعة الأسطرلاب بالبرهان".

تنتمي المخطوطة الثانية إلى مجموعة لايدن المُهمَّة (*Leiden Or. 14*)، في الورقتين ٢٣٦-٢٣٧؛ ونرمز إليها بـِ[ل]. لقد أشرنا أعلاه إلى هذه المجموعة، وأكّدنا أنَّ النسخة الأصليّة التي استُخدمت لنسخ عدّة مؤلّفات منها هي مخطوطة (*Smith Or. 45*). لنرجع مرّة أخرى إلى تاريخها.

نحن نعلم من الأب المُحتَرَم أ. دوزي (*A. Dozy*)، وفقاً للجدول الذي حرَّره سنة ١٨٥١، أنّ الريّاضيَّ المستعرِبَ غوليوس (*Golius*) قد استنسخ بيد أحمد الدرويش في حلب، خلال سفره إلى الشرق، المقالات الثلاث الأخيرة من كتاب "المخروطات"

لأبلونيوس. أنجِزت هذه النسخة في ١٥ ذي الحجّة سنة ١٠٣٦، أي في ٢٧ آب/أغسطس سنة ١٦٢٧ ميلاديّة. ولقد قام غوليوس، في حوالى هذا التاريخ، باستنساخ المخطوطة (Leiden Or. 14). يكتب دوزي[١٧] حول هذا الموضوع:

"*Opera, a Nicolao in usum Golii descripta, continentur Codice 14. Pleraque eorum mathematici sunt argumenti, quumque inter ea inveniantur quae unica sunt in Europa, Golio Codicem unum pluresve commodatos esse ab Orientali quodam viro suspicor, quos, quum venales non essent, in, Orientem remisit."*

وهكذا نعلم، وفقاً لتخمين دوزي، أنَّ نقولا، وهو شخص عربيٌّ مقيمٌ في أمستردام، قد نسخ هذه المخطوطة لغوليوس الذي أعاد إرسال المخطوطات المنسوخة إلى الشرق ومنها مخطوطة (*Smith Or. 45*).

لقد تبعنا دوزي، في كتاباتنا السابقة. ولقد استبعد ج. ج. ويتكم (*J. J. Witkam*)، مؤخـــَّراً، هذا التخمين، ودعم الفكرة القائلة إنَّ المخطوطة (*Leiden Or. 14*) نُسِخت في حلب في الفترة الزمنيّة نفسها، في نهاية العشرينيات من القرن السابع عشر الميلاديّ. وهو يكتب باللغة الهولندية[١٨]:

"De codex Or. 14 in de Leisde Universiteitsbibliotheek is zo'n verzameling van afschriften, die voor Golius in Aleppo gemaakt is, duidelijk op kanselarij-papier, en door een Aleppijse schrijver geschreven. De figuren in de wiskundige tractaten werden door Golius later met de hand bijgetekend in daarvoor aanebrachte uitsparingen in de tekst".

وهذا ما ترجمته:

"هذه المخطوطة، (*Leiden Or 14*) في مكتبة جامعة ليدن، هي عبارة عن مجموعة من النُصوص كتبها كاتب في حلب، بناء على طلب غوليوس، حسب ما تشير إليه وثيقة القنصلية بوضوح. وقام غوليوس بإدخال الأشكال في وقت لاحق بخط يده في الفراغات التي تركها الكاتب في النص."

---

[١٧] انظر:
Catalogus Codicum Orientalium Bibliothecae Academiae Lugduno Batavae,(Leiden 1851), p. xv.

[١٨] انظر:
Jacobius Golius(1596-1667) en zijn handschriften, Oosters Genootschap in Nederland, 10(Leiden, 1980) ص. ٥٣.

ويكتُب ج. ج. ويتكم بخصوص هذه المخطوطة (*Leiden Or. 14*) في تعليق تفضَّل بإرساله إلينا:

"المجموعة تتضمَّن نصوصاً عربيّة ونصّاً بالفارسيّة (رقم ٢٢)، وكتابة أوروبيّة (من القنصليّة الهولنديّة في حلب؟). أنجِــزت هذه النسخ بيد أحمد الدرويش (جملته الختاميّة في ص. ١٦٣، ولكنّه نسخ المجموعة بكاملها) في حلب لأجل يعقوب غوليوس (*Jacobius Golius*). أنجز الرسوم في المؤلّف رقم ١ غوليوس بنفسه الذي كتب الحواشي أيضاً. ويبدو أنَّ الأشكال والرسوم الأخرى قد أنجِــزت بيد النسّاخ نفسه. لقد حصل غوليوس على أكثر نصوص هذه المجموعة على شكل نسخ منقولة لأنّه، كما يبدو، لم يستطع الحصول على النسخ الأصليّة، باستثناء النصّ الأوّل في هذه المجموعة الذي هو نسخة أصليّة في هذه المجموعة الخاصّة من المخطوطات".

ويُمكن أن نُبيِّن، بدورنا، أنَّ هذه المجموعة تتضمَّن مخطوطات منقولة من مصادر مختلفة؛ وأهمُّ هذه المصادر هي المجموعة (*Smith Or. 45*). تتضمَّن مخطوطة لايدن ٢٦ مؤلّفاً، ولقد نُقل ١٢ مؤلّفاً منها عن مجموعة كولومبيا. وهي المؤلّفات التالية:

١– مقالة في الجبر والمقابلة للخيّام[١٩].

٢– إيضاح البرهان على حساب الخطأين، لأبي سعيد الصابئ.

٣– شرح أبي الفتوح بن الساري للمؤلّف السابق.

٤– مقدِّمة لصنعة آلة تُعرف بها الأبعاد، للسجزي.

٥– في كيفيّة تصوُّر الخطّين اللذين يقربان ولا يلتقيان، للسجزي.[٢٠]

٦– في إبانة الخطّين اللذين يقربان أبداً ولا يلتقيان، للقــُـمّي.

---

[١٩] حُقق وشُرح في ر. راشد وَ ب. وهاب زاده، رياضيّات عمر الخيّام (بيروت ٢٠٠٥)

[٢٠] حُقق وشرح ضمن ر. راشد، السجزي وابن ميمون، ص. ٢٦٣-٢٩٦:
Al-Sijzī et Maïmonide : Commentaire mathématique et philosophique de la proposition II-14 des Coniques d'Apollonius, Archives Internationales d'Histoire des Sciences , n° 19, vol 37(1987),
أعيد نشره في:
Optique et Mathématiques : Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe, Variorum reprints(Aldershot, 1992), XIII/

٧- مقالة في معرفة ارتفاع الأشخاص القائمة وأعمدة الجبال وارتفاع الغيوم، لابن الهيثم.

٨- مسألة ذكرها أبو نصر الفارابي في المقالة الأولى من الفنّ الأوّل في الموسيقى.

٩- من كلام أبي الفتوح بن السَّري.

١٠- مقالة في استخراج القطب على غاية التحقيق لابن الهيثم.

١١- كتاب صنعة الإسطرلاب بالبرهان للقوهي، متبوعاً بشرح أبي العلاء بن سهل.[٢١]

١٢- مسألة سألها شمس الدين أمير الأمراء النظاميّة إلى شرف الدين الطوسي.

توجَد المخطوطة الثالثة ضمن مجموعة مكتبة ملك في طهران، تحت رقم ٣٤٣٣، على الورقتين: ١ظ-٢و؛ نرمز إليها بـِ [ا].

نسِخــَت هذه المخطوطة في المدرسة النظاميّة في بغداد في منتصف ربيع الأوَّل في سنة ٥٥٧ للهجرة، أيْ في آذار/مارس سنة ١١٦٢ للميلاد. المخطوطة مكتوبة بعناية بالخطّ النسخيّ، وليس فيها تشطيب ولا تعليق في الهوامش. ولكن ليس هناك ما يدلٌّ على أنَّ النسّاخ قد راجع نسخته وقابلها بالنسخة الأصلية. والتصحيح الوحيد يخصٌّ تعليقاً مضافاً بعد النصّ؛ وهو موجودٌ في [كــ]، أيْ أنّه يخصٌّ الطريقة المنسوبة إلى سعد الدين بن أسعد بن سعيد الهمذاني.

تنتمي المخطوطة الرابعة إلى مجموعة مكتبة مجلس الشورى في طهران، رقم ٢٧٧٣/٢، على الورقتين ١٩-٢٠؛ ونرمز إليها هنا بـِ [ط]. وتحتوي هذه المجموعة، أيضاً، على شرح نصّ ابن الهيثم هذا، الذي كتبه ابن أحمد الحسيني محمَّد اللاهجاني (الأوراق ١-١٧). ولقد أنجِز هذا الشرح يوم الأحد في ٢٥ ذي القعدة سنة ١١٠٥

---

[٢١] حقق وشرح في ر. راشد،
Géométrie et Dioptrique au Xème siècle, Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham(Paris les Belles Lettres, 1993)

للهجرة، أي في ١٨ تمّوز سنة ١٦٩٤. كُــتب نصّ ابن الهيثم باليد نفسها، فيكون قد كُتب حوالى التاريخ نفسه. نقل النسّاخ التعليق الأخير الذي كتبه الهمذاني، ولكن بدون أن يكتب اسم كاتبه؛ كما أنّه عكس ما صحَّحه نسّاخ [ا]. فهو يكتب في النصّ تصحيح هذا الأخير "الأفقين"، ويكتب في الهامش الكلمة المصحَّحة "الوفقين"؛ وهذا يدلُّ، كما يبدو، على أنَّ [ا] هي النسخة التي نقل عنها المخطوطة [ط].

إنَّ لدينا، إذاً، فصيلتين من المخطوطات: الفصيلة [كـــ، ل]، حيث تكون [ل] نسخة من [كـــ] وحدها؛ والفصيلة [ا، ط] حيث تكون [ط] نسخة من [ا] وحدها.

والفصيلتان لهما أصلٌ مشترَكٌ يرجع إلى تلك المخطوطة التي أضاف إليها النسّاخ تعليق الهمذاني، أيْ قبل منتصف القرن الثاني عشر للميلاد.

٤-٣-٣ "في استخراج أعمدة الجبال"

توجد هذه الرسالة، خلافاً للرسالة السابقة، على قائمة ابن أبي أصيبعة تحت عنوان "في استخراج أعمدة الجبال". ولكن ليس لدينا، حتّى الآن، سوى مخطوطة وحيدة. ونسبة هذه الرسالة إلى الحسن بن الحسن بن الهيثم واضحة؛ فاللغة هي لغة ابن الهيثم، والأسلوب، التجريبي نوعاً ما، هو أسلوب الفيزيائي ابن الهيثم. ولكن يبقى علينا أن نُسجّل بعض السمات الغريبة عن أسلوب ابن الهيثم الرياضيّ: غياب برهان طبقاً للأصول الواجبة، وجود فرضيّات غير واضحة (طول قامة الراصد، ثلاث أذرع ونصف)، طريقة خاصّة نوعاً ما لتحديد s (فهو يضرب بالعبارة $[l_1+l_2]$، ثمَّ يقسم بالعبارة نفسها بدلاً من أن يستخدم التحاكي بين المثلّثين *AEB* وَ *FDB*). فهل يتعلّق الأمر بتحرير قام به أحدهم استناداً إلى نصّ ابن الهيثم الأصليّ؟ ليس هناك شيء يدعم هذا التخمين.

والمخطوطة الوحيدة لهذا النصّ هي مخطوطة مكتبة بودليان (*Arch. Seld. A32*) في أكسفورد، على الأوراق ١٨٧و–١٨٨و. ولقد ترك النسّاخ مكاناً لشكل لم يرسمه خلال مراجعة نسخته ومقابلتها مع النسخة الأصليَّة. وقد يكون هذا الشكل موجوداً في هذه

النسخة الأصليّة أو قد يكون مكانه فارغاً فيها. والمخطوطة مكتوبة بالخطّ النسخي وجملتها الختاميّة مكتوبة بخطّ النستعليق. ويُذكّر النسّاخ بوضوح أنّه راجع النسخة وقابلها بالنسخة الأصليّة؛ ولقد أضاف في الهامش تصحيحاً واحداً وإسقاطاً واحداً.

ولم يحظَ هذا النصُّ بأحسن ممّا حظيت به النصوص السابقة، فهو لم يُحقّق ولم يُترجَم أو يُدرس من قبلُ.

نصوص مخطوطات ابن الهيثم:

٤-٤-١ "في أصول المساحة"

٤-٤-٢ "في معرفة ارتفاع الأشخاص القائمة وأعمدة الجبال وارتفاع الغيوم"

٤-٤-٣ "في استخراج أعمدة الجبال"

ب – ١٠٠ – و

قول للحسن بن الحسن بن الهيثم
في أصول المساحة

كنت ألفت كتابًا في أصول المساحة في أيام الشبيبة، ثم عرضت عوارض من صروف الزمان أعدمتني كثيرًا من أصول المصنفات، وكان هذا الكتاب في جملة ما عدمته. ولما أتى على ذلك حين من الدهر، سألني بعض من يحب العلوم ويميل إلى الفضائل أن أصنع له شيئًا في المساحة، فأستأنفت هذا الكتاب إسعافًا له. وهو يشتمل على أصول جميع ما يُستعمل من المساحات، إلاّ أني أشك أن في بعض ألفاظه وبراهينه ‹ما› قد يخالف بعض ألفاظ الكتاب الأول وبراهينه، ومع ذلك قد زدت فيه زيادات ليست في الكتاب الأول. فإن اجتمع لبعض الناظرين في هذا العلم نسختان من هذا الكتاب مختلفتا الألفاظ، فليعلم أن السبب هو ما ذكر. وهذا حين أبتدأ بذكر المساحة.

مساحة المقادير هو تقديرها بالمقدار المفروض للمساحة. والمقدار المفروض للمساحة هو خط مستقيم يُتفق على مقداره لتقدر به جميع المقادير، كالمكيال الذي يتفق عليه لتقدر به جميع المكيلات، وكالمثقال والأرطال التي تقدر بها جميع الأثقال الموزونة. وهذا الخط هو الذي يسميه المساح ذراعًا / أو مقدارًا هو بحسب اقتراح المبتدئ بفرضه. ل – ١٠٠ – ظ

والمقادير الممسوحة تنقسم إلى ثلاثة أنواع، هي الخطوط والسطوح والأجسام. فالخطوط الممسوحة التي تعرض الحاجة إلى مساحتها، هي أبعاد المسافات وأطوال سطوح الأجسام وعروضها وارتفاعات الأجسام المرتفعة. والسطوح الممسوحة هي سطوح الأجسام. والأجسام الممسوحة هي جنس جميع الأجسام التي ترام مساحتها.

2 قول: قول – الحسن: حسن – 6 ذلك: ذالك، ولن نشير إليها فيما بعد / بعض: بعضه – 7 في: من – 8 وبراهينه: وبرهانيه – 9 ألفاظ: الفاظه / وبراهينه: وبرهانه – 11 مختلفتا الألفاظ: مختلفا الالفاظه / ذكر: ذكره / أبتدأ: ابتداء – 12 هو: وهذ حائز معروض. المفروضة – 13 به (ثانية): في – 15 مقدارا: مقدر / اقتراح: اقراح – 16 تنقسم: ينقسم، ولن نشير إليها فيما بعد / والسطوح: والسطح / الأجسام: جسام – 17 وأطوال: ولاطوال / الأجسام: جسام – 18 سطوح الأجسام: سطوح جسام.

فأما الخطوط، فإنها تنقسم إلى خمسة أنواع هي: المستقيم والمستدير والقطوع الثلاثة التي هي قطوع المخروطات، إلا أن المَسَّاحين ليس يستعملون في صناعتهم إلا الخطوط المستقيمة والمستديرة فقط.

والسطوح تنقسم إلى ثلاثة أنواع هي: المسطح والمحدب والمقعر؛ وليس يستعمل المساحون في صناعتهم غير المسطح فقط. فأما المحدب والمقعر فهي السطوح الكرية والأسطوانية والمخروطية والمركبة من هذه، وليس تدخل في صناعتهم المساحة، ومع ذلك فإن هذه السطوح ترد إلى السطوح المستوية، لأن كل واحد من هذه يستخرج له نسبة إلى الطوائف التي تقع فيه. وقد تبين ذلك في كتب المهندسين، فتصير مساحة جميع السطوح هي مساحة السطوح المستوية هذه.

فأما الأجسام فهي نوع واحد، وهي كل ما له / طول وعرض وعمق؛ وإنما تختلف ل-١٠١-و أشكالها فقط.

ومساحة الخطوط هو تقديرها بالذراع نفسه؛ ومساحة السطوح هو تقديرها بمربع الذراع؛ ومساحة الأجسام هو تقديرها بمكعب الذراع. فأما كمية مساحة الخطوط، فهو عدد ما فيها من أضعاف الذراع. فأما كمية مساحة السطوح، فهو عدد ما فيها من أضعاف مربع الذراع. فأما كمية مساحة الأجسام، فهو عدد ما فيها من أضعاف مكعب الذراع.

فأما كيفية مساحة الخطوط، فإن المستقيم منها تكون مساحته بإطباق الذراع على جزء جزء منها إلى أن يفنيها، إما جميعه وإما بعض أجزائه. فأما المستديرة منها، وهو محيط الدائرة، فكيفية مساحته هو أن يمسح قطر الدائرة ثم يضرب عدد ما في قطر من أضعاف الذراع في ثلاثة وسبع، فما اجتمع فهو كمية مساحة محيط الدائرة. وكان أرشميدس قد بين أن محيط الدائرة هو مثل قطرها بثلاث مرات وسبع على غاية ما يمكن من التقريب. فعلى هذه الصفة يعرف كمية مساحة محيط الدائرة. فأما القوس من الدائرة، فإنه كمية مساحتها، تعلم من معرفة نسبتها إلى جميع المحيط؛ وسنبين فيما بعد كيفية تعلم هذه النسبة عند كلامنا في مساحة قطاع الدائرة.

2 المساحين: المساحات – 4 هي: الى – 5 المساحون: المساحة – 6 والمركبة: والمركب / هذه: هذا هي، ثم كرر بعدها الجملة السابقة «يستخرج له نسبة ... تقع فيه»، ثم ضرب عليها بالقلم – 7 إلى (الثانية): التي – 8 الطوائف: طواير / وقد: فقد /المهندسين: مهندسين – 15 الأجسام: الخطوط – 16 مساحته: مساحة – 17 إلى: التي / جميعه: بجميعه – 18 مساحته: مساحة – 19 ثلاثة: ثلثه / وكان: ولان – 20 ثلاث: ثلثة / وسبع: وسبعه – 22 مساحتها: مساحة ها، ولن تشير إلى مثلها فيما بعد / معرفة: معرفته / جميع: فوق السطر / المحيط: محيط.

فأما كيفية مساحة السطوح بالقول المجمل، فإنه يكون / بمساحة أطوالها وعروضها ل-١٠١-ظ وضرب بعضها في بعض على ما سنبيّنه من بعد.

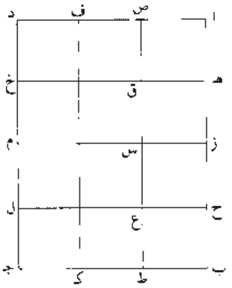
وكيفية مساحة الأجسام بالقول المجمل، يكون بمساحة قواعدها وارتفاعاتها وضرب بعضها في بعض على ما يتبين من بعد.

فأما كيفية مساحة السطوح بالتفصيل الصناعي، فإنه يكون كما نصف: قد تبين أن جميع السطوح ترجع إلى السطوح المستوية، والسطوح المستوية التي تدخل في صناعة المَسَّاح هي التي يحيط بها خطوط مستقيمة وخطوط مستديرة. والسطوح المستوية التي يحيط بها خطوط مستقيمة منها متوازية الأضلاع قائمة الزوايا ومنها ما يخالف ذلك.

فالسطح المتوازي الأضلاع القائم الزوايا يكون مساحته بأن يمسح ‹أحد› طوليه وأحد عرضيه، ثم نضاعف عدد ما في طوله من أضعاف الذراع بعدد ما في عرضه من أضعاف الذراع، فما خرج فهو عدد ما في بسيطه من أضعاف مربع الذراع.

ومثال ذلك: سطح ا ب جـ د متوازي الأضلاع قائم الزوايا، وليكن الذراع المفروضة للمساحة تقدر ا ب أربع مرات وتقدر ب جـ ثلاث مرات، فيضرب أربعة في ثلاثة، فيكون اثنتا عشرة.

فأقول: إن كمية مساحة سطح ا جـ هي اثنتا عشرة ذراعًا، أعني اثني عشر ضعفًا لمربع / الذراع المفروض للمساحة. ل-١٠٢-و



1 المجمل: المحتل، وأثبت الصواب تحتها / فإنه يكون: كررها في بداية الصفحة التالية – 5 الصناعي: الصناعتي – 6 تدخل: كتب أولا يحيط، ثم ضرب عليها بالقلم / صناعة: صناعت، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد – 9 المتوازي: المتوازية / القائم: القايمه – 10 عدد: عددا / طوله: طوليه / عرضه: عرض – 11 بسيطه: بسيط – 12 قائم: قايمه 13 تقدر: يقدر / أربع: اربعه / ثلاث: كتبها «ىىلىه»، ولن نشير إليها فيما بعد – 14 اثنتا: اثنا – 15 ا جـ: ا د / هي: هو / اثنتا: اثنا / اثني: اثنا – 16 الذراع المفروض: الذراع، كما هو معروف مؤنث ومذكر، ويأخذ الناسخ بالاثنين، ولن نغير ما أخذ به / للمساحة: للمساحات.

برهان ذلك: أنا نقسم ا ب أقسامًا متساوية، كل واحد منها مساوٍ للذراع، فيكون أربعة أقسام، ولتكن ا هـ هـ ز ز ح ح ب، ونقسم ب جـ أيضًا بأقسامٍ متساوية، فيكون ثلاثة أقسام. فلتكن ب ط ط ك ك جـ. ونخرج من نقط هـ ز ح خطوطًا موازية لخطي ب جـ ا د. ولتكن خطوط هـ خ ز م ح ل. ونخرج من نقطتي ط ك خطين موازيين لخطي ا ب د جـ. وليكونا خطي ط ص ك ف. وليقطع خط ط ص خطوط ح ل ز م هـ خ على نقط ع س ق، فيكون سطوح ا ق هـ س ز ع ح ط مربعات متساويات متساويات الأضلاع قائمة الزوايا. أما أنها متساويات فلأن قواعدها متساوية وهي ا هـ هـ ز ز ح ح ب، فهي فيما بين خطين متوازيين، وهما ا ب ص ط. وأما متساويات الأضلاع فلأن عروضها، وهي ا ص هـ ق ز س ح ع، كل واحد منها مساوٍ لخط ب ط، وب ط مساوٍ لكل واحد من ب ح ح ز ز هـ هـ ا التي هي أطوال هذه المربعات. فأما قائمة الزوايا فلأن زاوية ح ب ط قائمة وخط ط ع موازٍ لخط ب ح، فزاويتا ح ب ط ع ط ب مساويتان لقائمتين وزاوية ح ب ط قائمة. فزاوية ع ط ب قائمة. وزاويتا ب ح ع ح ع ط مقابلتان لزاويتي ع ط ب ح ب ط. فهما مساويتان لهما. فمربع ب ح ع ط قائم الزوايا. فكذلك يتبين أن كل واحد من مربعات ع ز / ز ق ق ا قائم الزوايا. فمربعات ا ق هـ س ز ع ح ط ل-١٠٢-ظ متساويات الأضلاع قائمة الزوايا، وعدة هذه المربعات هي عدة خطوط ا هـ هـ ز ز ح ح ب التي هي عدة ما في ا ب من أضعاف الذراع. وأيضًا فإن سطوح ا ط ص ك ف جـ متساوية لأنها على قواعد متساوية، وهي ب ط ط ك ك جـ، وفيما بين خطين متوازيين. وهما ا د ب جـ. وعدة هذه السطوح هي خطوط ب ط ط ك ك جـ التي هي عدد ما في ب جـ من أضعاف الذراع. وإذا ضاعفنا عدد المربعات التي في سطح ا ط بعدد سطوح ا ط ص ك ف جـ، كان الذي يجتمع عدد ما في جميع سطح ا جـ من المربعات المتساويات التي كل واحد منها مساوٍ لمربع ح ط الذي هو مربع الذراع المفروض للمساحة. لكن عدد المربعات التي في سطح ا ط هو عدد خطوط ا هـ هـ ز ز ح ح ب الذي هو عدد ما في ا ب من أضعاف الذراع. وعدد سطوح ا ط ص ك ف جـ هو عدد خطوط ب ط ط ك ك جـ الذي هو عدد ما في ب جـ من أضعاف الذراع. فإذا ضاعفنا

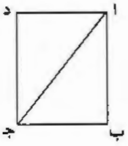
1 منها: منهما – 2 أربعة ... فيكون: أثبتها في الهامش – 4 ز ح: د ح – خطي: لخط – 7 قائمة: قايم – 9 منها: منهما – مساوٍ: مساوي، ولن نشير إليه فيما بعد – 11 مساويتان: متساويتان – 12 مقابلتان: متقابلتان – 13 ع ط ب: ح ط ب – الزوايا: الزوية، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد – 17 وفيما: وفيها – 21 مربعات: مربعات – منها: منهما – 23 هو (الثانية): هي.

عدد ما في ا ب من أضعاف الذراع بعدد ما في ب جـ من أضعاف الذراع، كان الذي يخرج هو عدد ما في جميع سطح ا جـ المتوازي / الأضلاع القائم الزوايا ‹من› أضعاف مربع الذراع؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن. ل-١٠٣-و

فأما السطوح المستقيمة الخطوط التي ليست بقائمة الزوايا، فإن منها ما يحيط به ثلاثة خطوط ومنها ما يحيط به أكثر من ثلاثة خطوط؛ والتي يحيط بها أكثر من ثلاثة خطوط، فإن جميعها ينقسم إلى مثلثات. فالطريق العامّ في مساحة جميع السطوح المستقيمة الخطوط هو طريق مساحة المثلثات؛ فالتي يحيط بها ثلاثة خطوط مستقيمة هي مثلثات وتمسح كما تمسح المثلثات؛ والسطوح التي يحيط بها أكثر من ثلاثة خطوط مستقيمة تقسم بمثلثات، ويمسح كل واحد منها على انفراده، ويجمع مساحة جميع المثلثات التي انقسم إليها السطح، فما اجتمع فهو مساحة جميع السطح.

والمثلثات منها قائم الزاوية ومنها منفرج الزاوية ومنها حادّ الزوايا. ومساحة كل واحد منها تكون باستخراج عموده الذي يخرج من رأسه على قاعدته، ثم يضرب هذا العمود في نصف القاعدة، فما خرج فهو مساحة المثلث، أعني أنه يضرب عدد ما في العمود من أضعاف الذراع في عدد ما في نصف القاعدة من أضعاف الذراع، فما اجتمع فهو / عدد ما في المثلث من أضعاف ‹مربع› الذراع. ل-١٠٣-ظ

ومثال ذلك: مثلث ا ب جـ، وليكن أوّلاً قائم الزاوية، وليكن الزاوية القائمة زاوية ا ب جـ، ورأسه نقطة ا، فيكون عموده هو خط ا ب وقاعدته خط ب جـ.



فأقول: إن مساحته هو ما يجتمع من ضرب ا ب في نصف ب جـ.

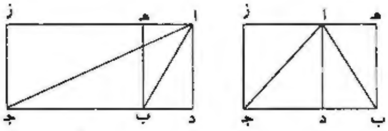
برهان ذلك: أنا نخرج من نقطة جـ خطًا موازيًا لخط ا ب، وليكن جـ د؛ فيكون جـ د عمودًا على ب جـ. ونخرج من نقطة ا خطًا موازيًا لخط ب جـ، فليكن ا د؛ فيكون ا ب جـ د متوازي الأضلاع قائم الزوايا. فيكون كمية مساحته هي ما يجتمع من ضرب

1 بعدد: فعدد – 2 القائم: القايمه / مربع: مربعًا – 4 المستقيمة: المستقيم – 5 بها: به – 6 إلى: التي – 7 طريق: غير واضحة – 12 هذا: هذه – 16 الزاوية (الثانية): زاوية / زاوية: الزاوية – 17 نقطة: نقطته / عموده: عمود / وقاعدته: وقاعدة – 18 مساحته: مساحة – 20 خطًا: خاط – 21 قائم: قايمة.

عدد ما في ا ب من أضعاف الذراع في عدد ما في ب جـ من أضعاف الذراع، كما تبين في الشكل الذي قبل هذا. ومثلث ا ب جـ هو نصف سطح ا ب جـ د، فكمية مساحته هو نصف ما يجتمع من ضرب ا ب في ب جـ. وضرب ا ب في نصف ب جـ هو نصف ضرب ا ب في ب جـ، فالذي يجتمع من ضرب ا ب في نصف ب جـ هو كمية مساحة مثلث ا ب جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وليكن مثلث ا ب جـ منفرج الزاوية أو حادّ الزوايا. ونخرج من نقطة رأسه، وهي ا، عمود ا د.

فأقول: إن كمية مساحة مثلث ا ب جـ هو ما يجتمع من / ضرب ا د في نصف ب جـ. ل-١٠٤-و



برهان ذلك: أنا نخرج من نقطتي ب جـ خطين موازيين لخط ا د، وليكونا ب هـ جـ ز، فيكونان عمودين على قاعدة ب جـ. ونخرج من نقطة ا خطًا موازيًا لخط ب جـ، وليلق خطي ب هـ جـ ز على نقطتي هـ ز، فيكون سطح هـ ب جـ ز متوازي الأضلاع قائم الزوايا، فكمية مساحة هذا السطح هو ما يجتمع من ضرب هـ ب في ب جـ. ومثلث ا ب جـ هو نصف سطح هـ ب جـ ز لأنهما على قاعدة واحدة وفيما بين خطين متوازيين. فكمية مساحة مثلث ا ب جـ هو نصف كمية مساحة سطح هـ ب جـ ز، فضرب هـ ب في نصف ب جـ هو كمية مساحة مثلث ا ب جـ. لكن هـ ب مثل ا د لأن سطح ا د هـ ب متوازي الأضلاع، فكمية مساحة مثلث ا ب جـ هو ما يجتمع من ضرب ا د، الذي هو العمود، في نصف ب جـ الذي هو قاعدة المثلث؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

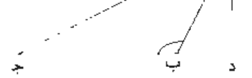
وقد بقي أن نبين كيف نعلم أن المثلث قائم الزاوية أو منفرج الزاوية أو حادّ الزوايا، فإذا كان المثلث منفرج الزاوية أو حادّ الزوايا، فكيف يستخرج عموده.

2 الشكل: شكل – 3 مساحته: مساحة – 4 فالذي: ولّذي – 5 وذلك: وكذالك ان، ثم ضرب على «ان» بالقلم – 10 نقطتي: نقطة / موازيين: متوازيين/ وليكونا: وليكون – 12 خطي: خط / جـ ز: جز ط حـ – 13 قائم: قايمة / هذا: هاذا – 14 هـ ب جـ ز: هجر – 15 هـ ب جـ ز: هجر – 16 لأن: لأنه – 17 متوازي: متوازين – 19 منفرج: منفرجه – 20 عموده: عمود.

والطريق إلى علم مائية المثلث: هو أن يضرب أعظم أضلاعه / في مثله، أعني عدد ما في الضلع الأعظم من أضعاف الذراع في مثله ويحفظ، ثم يضرب كل واحد من الضلعين في مثله ويجمعهما، ويقابل به المربع الأول. فإن كان المجتمع من هذين المربعين مساويًا للمربع الأول، فإن المثلث قائم الزاوية كما تبين في آخر المقالة الأولى من كتاب أوقليدس، ومساحته تكون بضرب نصف أحد الضلعين الأصغرين في الآخر. فما خرج فهو كمية مساحته، كما تبين من قبل. ل-١٠٤-ظ

وإن كان المجتمع من مربعي الضلعين الأصغرين أصغر من المربع الأول، فإن المثلث منفرج الزاوية؛ وإن كان المجتمع من مربعي الضلعين الأصغرين أعظم من المربع الأول، فإن المثلث حادّ الزوايا.

واستخراج عمود المثلث المنفرج الزاوية: هو أن يسقط المجتمع من مربعي الضلعين الأصغرين من مربع الضلع الأعظم. فما يبقى أخذ نصفه، ثم يقسم هذا النصف على قاعدة المثلث، أعني يقسم عدد ما في هذا النصف على عدد ما في القاعدة من أضعاف الذراع، فما خرج من القسمة حفظ، ويسمى مسقط الحجر؛ وقاعدة المثلث المنفرج الزاوية، إذا استخرج عموده على هذا الوجه، هي أحد الضلعين الأصغرين. فأيهما فرض قاعدة، كان مسقط الحجر هو المتصل بذلك / الضلع، لأن كلّ زاوية من زوايا المثلث يخرج منها عمودٌ على الضلع المقابل لها. وإذا تحصل مسقط الحجر، ضرب في مثله، وسقط مربعه من مربع الضلع الأصغر الذي يلي رأس المثلث، وهو الضلع الأصغر الذي لم يجعل قاعدة؛ فما يبقى من مربع هذا الضلع أخذ جذره، وهو العمود. ل-١٠٥-و

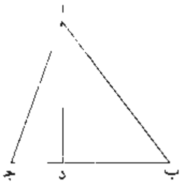


ومثال ذلك: المثلث المنفرج الزاوية الذي تقدم، وهو ا ب جـ، وزاوية ا ب جـ منه منفرجة. وقد تبين في الشكل الثاني عشر من المقالة الثانية من كتاب أقليدس أن مربع ا جـ

2 أضعاف: اضلاع – 4 كما: وكما 5 ومساحته: ومساحة نصف: لنصف – 6 مساحته: مسحة – 7 مربعي: مربع / المربع: مربع – 8 مربعي: مربع 10 المنفرج: المنفرجه مربعي: مربع – 11 نصفه: نصف هذا: هاذ، وبن نشير إليها فيما بعد – 12 عدد ما (الثانية): عددها – 14 هي: هو فأيهما: ايهما.

مثل مربع ا ب ومربع ب جـ وضعف السطح الذي يحيط به جـ ب ب د. فإذا نقص مربع ا ب ومربع ب جـ مجموعين من مربع ا جـ، كان الذي يبقى هو ضعف سطح جـ ب في ب د. فإذا أخذ نصفه، كان ذلك هو سطح جـ ب في ب د. وكل سطح من ضرب عددين أحدهما في الآخر، فإنه إذا قسم على أحد ذينك العددين، كان الذي يخرج من القسمة هو العدد الآخر. فلذلك إذا قسمنا نصف الباقي من مربع ا جـ على خط ب جـ، كان الذي يخرج من القسمة هو خط ب د. ‹و›يسمى مسقط الحجر. ومثلث ا د ب قائم الزاوية، فمربع ا ب هو مثل مربع ا د ومربع د ب. فإذا نقص مربع د ب من مربع ا ب، كان الذي يبقى هو مربع ا د، فإذا أخذ جذره، كان ذلك خط ا د، أعني عدد ما في / ا د من أضعاف الذراع. وخط ا د هو عمود مثلث ا ب جـ المنفرج الزاوية وهو خارج ل-١٠٥-ظ من المثلث. فعلى هذه الصفة يكون استخراج عمود المثلث المنفرج الزاوية.

فأما المثلث الحادّ الزوايا، فإن كل واحدة من زواياه حادّة، وكل واحد من أضلاعه يجوز أن يجعل قاعدة، لأن كل واحد من أضلاعه يمكن أن يخرج إليه عمود من الزاوية المقابلة. واستخراج عمود المثلث الحاد الزوايا: هو أن يفرض أحد أضلاعه قاعدة، ويضرب أحد الضلعين الباقيين في مثله، ويحفظ، ثم يضرب الضلع الباقي في مثله، ويضرب القاعدة في مثلها، ويُجمع هذان المربعان، ثم ينقص منهما المربع الأوّل الذي حفظ؛ فما يبقى أخذ نصفه، ثم يقسم هذا النصف على القاعدة؛ فما خرج من القسمة فهو مسقط الحجر. فإذا تحصّل مسقط الحجر، ضرب في مثله، ثم يسقط ذلك من مربع الضلع الباقي، الذي جمع مربعه مع مربع القاعدة، فما يبقى أخذ جذره، وهو العمود.



3 نصفه: نصفه، وكتب فوقها «ذينك العددين»، ثم ضرب عليها بالقلم / سطح (ثانية): مسطح – 9 المنفرج: المنفرجة – 10 هذه: هاذا / المنفرج: المنفرجه – 11 المثلث: مثلث / زواياه: زوايا / أضلاعه: ضلاع – 12 يجوز: يجوز / أضلاعه: اضلاع – 13 أضلاعه: اضلاع – 18 جمع: جميع.

ومثال ذلك: المثلث الحادّ ‹الزوايا› الذي تقدم وهو مثلث ا ب جـ وزاوية ا ب جـ منه حادّة وقاعدته ب جـ. وقد تبين في الشكل الثالث عشر من المقالة الثانية من كتاب أقليدس أن مربع ا جـ ينقص عن مربع ا ب ومربع ب جـ مجموعين بضعف السطح الذي يحيط به خطا جـ ب / ب د. فإذا نقص مربع ا جـ، وهو أحد الضلعين الباقيين بعد ب-١٠٦-و القاعدة، من مربعي ا ب ب جـ مجموعين، كان الذي يبقى هو ضعف سطح جـ ب في ب د. فإذا أخذ نصفه، كان ذلك هو سطح جـ ب في ب د. فإذا قسم ذلك على ب جـ، كان الذي يخرج من القسمة هو ب د، وب د هو الذي يسمى مسقط الحجر. ومثلث ا ب د قائم الزاوية، وزاوية ا د ب منه قائمة لأن ا د عمود على ب جـ، فمربع ا ب هو مثل مربع ب د ومربع ا د مجموعين. فإذا نقص مربع ب د من مربع ا ب، كان الذي يبقى هو مربع ا د. فإذا أخذ جذره، كان ذلك خط ا د الذي هو عموده. فعلى هذه الصفة يستخرج عمود المثلث الحاد الزوايا.

وقد يمكن أن يستخرج مساحة جميع المثلثات بطريق واحد، وهو طريق المثلث الحاد الزوايا، لأن كل مثلث ففيه زاويتان حادتان، فإنما تختلف الزاوية الباقية. فإذا كان ‹في› كل مثلث زاويتان حادتان، فقد يمكن أن يستخرج أعمدته ومساحته بطريق واحد، وهو استخراج عمود المثلث الحاد الزوايا. وذلك يكون بأن يفرض أعظم أضلاع المثلث قاعدة للمثلث، إن كان المثلث مختلف الأضلاع؛ وإن كان فيه ضلعان متساويان، فرض أحد أضلاعه الذي / ليس بأصغر أضلاعه ‹قاعدة›؛ وإن كان متساوي الأضلاع، فرض واحد ب-١٠٦-ظ من أضلاعه قاعدة، ثم يضرب أحد الضلعين الباقيين في مثله، ويحفظ، ويضرب الضلع الباقي من الضلعين الباقيين في مثله، ويضرب القاعدة أيضًا في مثلها، ويُجمع المربعان الآخران وينقص منهما المربع الذي حفظ. وليس يكون مجموع هذين المربعين إلا أكثر من المربع الذي حفظ، لأن مربع القاعدة وحدها ليس بأصغر من المربع الذي حفظ. وإذا أسقط المربع الأول المحفوظ من المربعين المجموعين، ‹و›أخذ نصف الباقي، وقسم على القاعدة، يكون الذي يخرج من القسمة هو مسقط الحجر؛ وتمام العمل في استخراج العمود على ما تقدم في استخراج عمود المثلث. وإذا تحصل العمود، ضرب في نصف القاعدة، وهو مساحة المثلث.

3 مربع ا جـ: كرر بعدها «وزاوية ا ب جـ منه حادة وقاعدته» ثم ضرب عليها بالقلم – 5 مربعي: مربع – 6 نصفه: نصف – 8 قائمة: قائم – 10 عموده: عمود – 11 هذه: هذ – 13 الباقية: الباقي – 14 أعمدته ومساحته: أعمدتها ومساحتها – 16 أحد: احد – 18 ثم: أثبتها فوق السطر – 19 الباقيين: الباقي – 20 مجموع: أثبتها فوق السطر / إلا أكثر: الأكثر – 23 وتمام: والتمام – 25 القاعدة: القاعد.

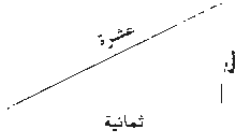
وبرهان على هذا العمل هو: أن كل مثلث قائم الزاوية أو منفرج الزاوية، فإن أعظم أضلاعه هو الذي يوتر الزاوية القائمة ‹أو› المنفرجة. فإذا جعل أعظم أضلاع المثلث قاعدة، صار الضلعان الباقيان يوتران زاويتين حادتين. فإذا ربع أحد الضلعين الباقيين ‹و›حفظ، كان الذي يحفظ هو مربع الضلع الذي يوتر زاوية حادة، ويكون المربعان المجموعان هما مربعي الضلعين المحيطين بالزاوية الحادة، فيصير العمود / ل-١٠٧-و الذي يستخرج هو العمود الذي يخرج من الزاوية القائمة أو المنفرجة إلى قاعدة المثلث التي هي وتر هذه الزاوية. فيصير طريق استخراج عمود المثلث القائم أو المنفرج ‹الزاوية› واستخراج مساحته على هذه الصفة هو طريق استخراج عمود المثلث الحاد ‹الزوايا› ومساحته.

وإن لم يكن في المثلث ضلع هو أعظم أضلاعه، فليس يكون إلا حاد الزوايا، لأن المثلث القائم أو المنفرج ‹الزاوية› يكون الضلع الذي هو وتر الزاوية القائمة أو المنفرجة أبدًا أعظم من الضلعين الباقيين.

قد يمكن أن يستخرج مساحة جميع المثلثات بطريق واحد عامّ لا يحتاج فيه إلى استخراج العمود، وهو أن يجمع أضلاع المثلث ويؤخذ نصف ما اجتمع، ثم يضرب هذا النصف في زيادته على أحد أضلاع المثلث، فما خرج ضرب في زيادة النصف على ضلع ‹آخر من أضلاع المثلث، فما خرج ضرب في زيادة النصف على الضلع› الباقي من أضلاع المثلث، فما اجتمع أخذ جذره، فما خرج فهو مساحة المثلث.

ومثال ذلك: مثلثٌ أضلاعه عشرة وثمانية وستة؛ يجمع الثلاث، فيكون أربعة وعشرون، فيؤخذ نصفها، فيكون اثنا عشر، فيضرب في زيادة الاثني عشر على ستة، وهي ستة، فيكون اثنان وسبعون، ثم نضرب الاثنين وسبعين في زيادة اثني عشر على ثمانية، وهي أربعة، فيكون مائتان وثمانية وثمانون، / ل-١٠٧-ظ ثم نضرب مائتين وثمانية وثمانين في زيادة الاثني عشر على العشرة، وهي اثنان، فيكون خمسمائة وستة وسبعون، فيؤخذ جذرها، فيكون أربعة وعشرون وهي مساحة المثلث؛ وهذا المثلث هو قائم الزاوية لأن مربع العشرة هو مثل مربعي الثمانية والستة مجموعين. فالزاوية التي يحيط بها الثمانية والستة قائمة، فمساحته هو مضروب الثمانية في نصف الستة، الذي هو ثلاثة، ‹و›هو أربعة وعشرون.

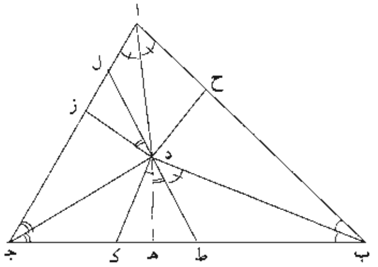
1 منفرج: منفرجه – 2 أضلاعه: اضلاع / يوتر: يؤتر، ولن نشير إليها فيما بعد – 4 حفظ: خظ / حادة: حادته – 5 مربعي: مربع / بالزاوية: الزاوية – 6 إلى: التي / هذه: هذا – 7 أو المنفرج: والمنفرجه / مساحته: مساحة – 8 هذه: هذا / ومساحته: ومساحة – 9 يكن: يكون – 10 أو المنفرج: والمنفرجه / الضلع: ضلع / أو: و – 12 إلى: التي – 17 أضلاعه: اضلاع – 19 اثنان وسبعون: اثنين وسبعين / اثني: اثنا – 20 مائتان وثمانية وثمانون: مائتين وثمانية وثمانين – 21 الاثني عشر: الاثنتي عشرة / وسبعون: وسبعين – 22 وعشرون: وعشرين – 23 مربعي: مربع / قائمة: قائم – 24 وعشرون: وعشرين.



وبرهان على هذا الطريق العامّ الذي ذكرناه: وهو أن يفرض مثلث ا ب جـ، ‹أي› مثلث كان. ويقسم زاوية ا ب جـ منه بنصفين بخط ب د، ويقسم زاوية ا جـ ب منه بنصفين بخط جـ د. ويخرج من نقطة د أعمدة د هـ د ح د ز. فلأن زاوية ح ب د مساوية لزاوية هـ ب د والزاويتين اللتين عند نقطتي ح هـ قائمتان. وخط ب د مشترك لمثلثي ح ب د هـ ب د. فالمثلثان متساويان متساويا الأضلاع. فعمود د ح مساوٍ لعمود د هـ وضلع ح ب مساوٍ لضلع ب هـ. وكذلك نبين أن عمود د ز مساو لعمود د هـ وضلع هـ جـ مساوٍ لضلع جـ ز. فأعمدة د ح د هـ د ز متساوية، وضرب د ز في نصف ا جـ هو مساحة مثلث / ا د جـ. فضرب عمود د هـ في نصف محيط المثلث هو مساحة مثلثات ا د ب ب د جـ جـ د ا. لكن هذه المثلثات الثلاثة هي جميع مثلث ا ب جـ، فضرب نصف محيط ا ب جـ في عمود د هـ هو مساحة مثلث ا ب جـ. فضرب مربع عدد ما في د هـ من أضعاف الذراع في مربع عدد ما في نصف محيط المثلث من أضعاف الذراع هو مربع مساحة المثلث. لأن كل عددين يضرب أحدهما في الآخر، ثم يضرب ما خرج في مثله، فإن الذي يجتمع هو مساوٍ لما يكون من ضرب مربع أحد العددين في مربع الآخر. وضرب مربع أحد العددين في مربع الآخر هو ضرب أحد العددين في مثله، ثم ما اجتمع في مربع الآخر، وضرب أحد العددين في مثله، ثم ما اجتمع في مربع العدد الآخر هو ضرب أحد العددين في مربع الآخر، ثم ما اجتمع في الأول. لأن الذي يكون من ضرب الأعداد بعضها في بعض بالتقديم والتأخير يكون أبدًا متساويًا. فضرب مربع نصف محيط المثلث في مربع د هـ هو ضرب نصف المحيط في مربع د هـ، ثم ما خرج في نصف المحيط. فضرب عدد ما في نصف محيط مثلث ا ب جـ من أضعاف الذراع في مربع عدد ما في د هـ من أضعاف الذراع، ثم ما خرج في عدد ما في نصف المحيط من أضعاف الذراع، هو مربع / مساحة مثلث ا ب جـ.

ل-١٠٨-و
ل-١٠٨-ظ

2 بخط ب د: بخيط ه – 3 بنصفين: بنصف، بخط: بخيط – 4 والزاويتين: الذي، والزاويتان: اللتان – 5 فالمثلثان: فالمثلثان – 6 لضلع: بضلع 7 د ز: كتب قبلها «وضلع»، ثم ضرب عليها بالقلم – 9 هذه: هذ – 13 مربع (الثانية): مربعه – 14 مربع (الثانية): المربع 17 متساويًا: مساويًا



وأيضًا، فإن مربع ا د مساوٍ لمربعي ا ح ح د، لأن الزاوية التي عند ح قائمة؛ وكذلك مربع ا د مساوٍ لمربعي ا ز ز د، فمربعا ا ح ح د مساويان لمربعي ا ز د ز، ومربع ح د مساوٍ لمربع ز د لأنه قد تبين أن د ح مساوٍ لـ د ز، فيبقى مربع ا ح مساويًا لمربع ا ز، فـ ا ح مثل ا ز وح د مثل ز د وا د مشترك، فمثلثا ا ح د ا ز د متساويا الأضلاع والزوايا؛ فزاوية ح ا د مثل زاوية ز ا د. وأيضًا فإن زاوية ب هـ د قائمة وزاوية ب د هـ حادة، فنجعل زاوية ب د ک قائمة؛ وكذلك زاوية جـ د هـ حادة، فنجعل زاوية جـ د ط قائمة، فهي مساوية لزاوية د هـ ط، وزاوية د ط هـ مشتركة لمثلثي د ط هـ د ط جـ، فيبقى زاوية ط د هـ مساوية لزاوية د جـ ط. وزاوية د جـ ط مساوية لزاوية د جـ ل، وزاوية د جـ ل مساوية لزاوية ل د ز لأن مثلثي ل د ز د جـ ل متشابهان، فزاويتا ط د هـ ل د ز متساويتان، وزاويتا د هـ ط د ز ل متساويتان لأنهما قائمتان، وخط د هـ مساوٍ لخط د ز، فمثلثا د ط هـ د ل ز متساويا الأضلاع والزوايا، فخط ط هـ مساوٍ لخط ل ز وزاوية د ط هـ مساوية لزاوية د ل ز. وأيضًا فإن زاوية د ب جـ نصف زاوية ا ب جـ، وزاوية د جـ ب نصف / زاوية ل-١٠٩-و ا جـ ب، وزاوية د ا جـ نصف زاوية ب ا جـ، وزوايا د ب جـ د جـ ب د ا جـ نصف زوايا المثلث، وزوايا المثلث الثلاثة مثل ‹زاويتين› قائمتين، فزوايا د ب جـ د جـ ب د ا جـ مجموعة مساوية لزاوية قائمة. لكن زاوية د ب جـ هي مساوية لزاوية ک د هـ لأن مثلث هـ د ک شبيه بمثلث ب د ک لأن زاوية ب د ک قائمة؛ وكذلك زاوية هـ د ط مساوية لزاوية د جـ ب، فزاويتا ک د هـ هـ د ط، اللتان هما زاوية ک د ط، ‹مساويتان للزاوية التي تبقى من نقصان› زاوية د ا ز ‹من زاوية› قائمة. لكن زاوية ک د ط مع

1 فإن: وان / لمربعي: لمربع / لأن: لانه / قائمة: قايم – 2 لمربعي (الأولى): لمربع – 7 د ط هـ (الأولى): د هـ ط – 9 ل د ز: ا د ز / وزاويتا: وزاويتان – 11 ل ز: ل د – 14 الثلاثة: بثلثه – 15 لكن: ليكن – 17 هـ د ط: د ط – 18 زاوية د ا ز: مع زاوية د ا ز / لكن: ليكن.

زاوية ط د ب قائمة، فزاوية ط د ب مساوية لزاوية د ا ز. وقد تبين أن زاوية د ط هـ مساوية ‹لزاوية› د ل ز، فزاوية د ط ب مساوية لزاوية ا ل د وتبقى زاوية د ب ط مساوية لزاوية ل د ا، فمثلثا ا د ل د ب ط متشابهان؛ فنسبة ب ط إلى ط د كنسبة ل د إلى ل ا، ونسبة د ط إلى ط هـ كنسبة د ل إلى ل ز، فالنسبة المؤلفة من نسبة ب ط إلى ط د ومن نسبة ط د إلى ط هـ، التي هي نسبة ب ط إلى ط هـ، هي نسبة مؤلفة من نسبة د ل إلى ل ا ومن نسبة د ل إلى ل ز، والنسبة المؤلفة من هاتين النسبتين هي نسبة مربع د ل إلى ضرب ا ل في ل ز، فنسبة ب ط إلى ط هـ هي نسبة مربع د ل إلى ضرب ا ل / في ل ز. ومربع د ل هو ضرب جـ ل في ل ز لأن مثلث جـ ل د القائم الزاوية شبيه بمثلث د ل ز؛ فنسبة جـ ل إلى ل د هي كنسبة د ل إلى ل ز، فنسبة ب ط إلى ط هـ هي كنسبة ضرب جـ ل في ل ز إلى ضرب ا ل في ل ز؛ ونسبة ضرب جـ ل في ل ز إلى ضرب ا ل في ل ز هي نسبة جـ ل إلى ل ا لأن ل ز ارتفع مشتركًا، فنسبة ب ط إلى ط هـ كنسبة جـ ل إلى ل ا. فبالتركيب تكون نسبة ب هـ إلى هـ ط كنسبة جـ ا إلى ا ل، وهـ ط قد تبين أنه مثل ل ز، فنسبة جـ ا إلى ا ل كنسبة ب هـ إلى ل ز وكنسبة الجميع إلى الجميع، فنسبة ا جـ وب هـ مجموعين إلى ا ز هي كنسبة ب هـ إلى هـ ط. وقد تبين أن ا ز مثل ا ح، وجـ ز مثل جـ هـ وب هـ مثل ب ح، فـ ا جـ وب هـ مجموعين هما نصف محيط مثلث ا ب جـ، فنسبة نصف محيط مثلث ا ب جـ إلى ا ز هي كنسبة ب هـ إلى هـ ط ‹و›هي مؤلفة من نسبة ب هـ إلى هـ د ومن نسبة د هـ إلى هـ ط؛ ونسبة د هـ إلى هـ ط هي كنسبة جـ هـ إلى هـ د، لأن مثلثي جـ هـ د د هـ ط متشابهان، فنسبة ب هـ إلى هـ ط هي مؤلفة من نسبة ب هـ إلى / هـ د ومن نسبة جـ هـ إلى هـ د؛ والنسبة المؤلفة من هاتين النسبتين هي نسبة ضرب ب هـ في هـ جـ إلى مربع هـ د، فنسبة ب هـ إلى هـ ط هي نسبة ضرب ب هـ في هـ جـ إلى مربع هـ د. وقد تبين أن نسبة ب هـ إلى هـ ط هي كنسبة نصف محيط مثلث ا ب جـ إلى خط ا ز، فنسبة نصف محيط مثلث ا ب جـ إلى خط ا ز هي نسبة ضرب ب هـ في هـ جـ إلى مربع

ل – ١٠٩ – ظ

ل ١١٠ و

4 المؤلفة: المؤلف – 6 ل ز: لو / المؤلفة: والمؤلفة – 7 ل ز: ل و – 8 ل ز (الأولى): كتب بعدها العبارة التالية «ومربع د ل إلى ل ز، فنسبة ب ط إلى ط هـ هي كنسبة ضرب جـ ل»، ثم ضرب عليها بالقلم، ثم تابع فكتب «إلى ضرب ا ل في ل ز فنسبة ب ط إلى ط هـ هي نسبة مربعه د ل إلى ضرب ا ل في ل ز». والعبارتان تكرار، الأولى لما يلحق والثانية لما سبق / جـ ل د: حـ ر د – 11 ارتفع مشتركًا: ارتفاع مشترك – 12 كنسبة: نسبة / إلى (الثانية): التي، وكثيرًا ما كتبها هكذا ولن نشير إلى مثلها فيما بعد – 14 الجميع (الثانية): جميع – 15 أن: مال / مثل (الأولى): بمثله / مثل (الثانية): بمثل – 18 جـ هـ د: جـ هـ ب – 21 هـ د (الأولى): هـ ر.

هـ د، فضرب نصف محيط المثلث في مربع هـ د هو مساوٍ لضرب ب هـ في هـ جـ، ثم ما اجتمع في ا ز. وإذا ضرب الجميع في نصف المحيط ثانيًا، كانا أيضًا متساويين. فضرب نصف المحيط في مربع د هـ، ثم ما خرج في نصف المحيط هو مساوٍ لضرب ب هـ في هـ جـ، ثم ما خرج في ا ز، ثم ما اجتمع في نصف المحيط. وضرب نصف المحيط في مربع د هـ، ثم ما خرج في نصف المحيط هو ضرب مربع نصف المحيط في مربع د هـ كما قدمنا ذكره من ‹أن› ضرب الأعداد بعضها في بعض بالتقديم والتأخير يكون أبدًا متساويًا. فضرب مربع نصف المحيط في مربع د هـ – الذي تبين أنه مربع مساحة المثلث – هو مساوٍ لضرب ب هـ في هـ جـ، ثم ما خرج في ا ز، ثم ما خرج في نصف المحيط. وضرب ب هـ في هـ جـ، ثم ما خرج في ا ز، ثم ما خرج في / نصف المحيط هو مساوٍ لضرب نصف المحيط في ا ز، ثم ما خرج في هـ جـ، ثم ما خرج في ب هـ، لأن ضرب الأعداد بعضها في بعض بالتقديم والتأخير متساوٍ. فضرب نصف المحيط في ا ز، ثم ما خرج في هـ جـ، ثم ما خرج في ب هـ مساوٍ لمربع مساحة المثلث. وقد تبين أن ا جـ مع ب هـ هو نصف المحيط، وكذلك ا ب مع جـ هـ نصف المحيط لأن ح ب مثل ب هـ وح ا مثل ا ز وهـ جـ مثل جـ ز، وكذلك ب جـ مع ا ز نصف المحيط، فخط ا ز هو زيادة نصف المحيط على ضلع ب جـ، وجـ هـ هو زيادة نصف المحيط على ضلع ا ب، وب هـ هو زيادة نصف المحيط على ضلع ا جـ. وقد تبين أن نصف المحيط إذا ضرب في ا ز، ثم ضرب ما خرج في جـ هـ، ثم ضرب ما خرج في ب هـ، كان الذي يجتمع هو مربع مساحة المثلث. فإذا ضرب نصف المحيط في زيادته على ضلع ب جـ، التي هي ا ز، ثم ما خرج في زيادة النصف على ضلع ا ب، التي هي هـ جـ، ثم ما خرج في زيادة النصف على ضلع ا جـ، التي هي ب هـ، كان الذي / يجتمع هو مربع مساحة المثلث. وقد تقدم أن ضرب الأعداد بعضها في بعض بالتقديم والتأخير يكون متساويًا؛ فأي هذه الزيادات قدّم أو أخّر جاز. فإذا ضرب نصف محيط المثلث في زيادته على ضلع من أضلاع المثلث، أي ضلع كان، ثم ضرب ما خرج في زيادة النصف على ضلع آخر من أضلاع المثلث، ثم ضرب ما خرج في زيادة النصف على الضلع الباقي، كان الذي يجتمع هو مربع مساحة المثلث. فإذا أخذ جذر ما اجتمع، كان ذلك مساحة المثلث،

ل – ١١٠ – ظ

ل – ١١١ – و

2 ما: لما – وإذا ضرب: وإذ ضرب – كانا: كان المثلث، ثم ضرب على المثلث ناقصة [illegible] – 3 نصف: لنصف – مربع: مربعه – 6 قدمنا ذكره: قدمنا نذكره – 7 هو: وهو – 11 متساوٍ: مساوى – المحيط: محيط – 12 تبين: يتبين – 21 متساويًا: مساويا – 22 زيادته: زيادة – 24 ضلع: ضلع

وأعني ‹بما› يجتمع ما ذكرته وأذكره من ضرب الأعداد السمية لعدد ما في الخطوط من أضعاف الذراع والأعداد السمية لعدد ما في السطوح من أضعاف مربع الذراع؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

فقد استوفينا القول في مساحة المثلثات.

وجميع السطوح المستقيمة الخطوط تنقسم بمثلثات؛ فمساحة جميع السطوح المستقيمة الخطوط ترجع إلى مساحة المثلثات: بأن يقسم السطح منها بمثلثات، ثم يمسح كل واحد من تلك المثلثات على انفراده، ثم تجمع مساحات جميعها؛ فما اجتمع فهو مساحة تلك السطوح. وقد تقدم أن / [ل – ١١١ – ظ] السطح القائم الزوايا يمسح بأن يضرب أحد أضلاعه في الضلع الذي يحيط معه بزاوية قائمة؛ إلا أنه لا طريق إلى أن تعلم أن زوايا السطح قائمة إلا أن يخرج قطران فيقسمانه بأربعة مثلثات بقسمة كل واحد منهما بمثلثين. ثم نعتبر كل واحد من المثلثات الأربعة بأن نعتبر أضلاعه. فإن كان في كل واحد منها زاوية قائمة وكانت الزوايا القائمة هي التي توترها الأقطار، فإن السطح قائم الزوايا؛ وإن لم يكن كذلك فليس السطح قائم الزوايا.

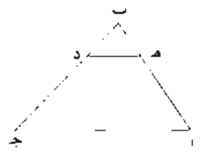
وإذا كان لا طريق ‹إلى› مساحة السطح ‹الغير› القائم الزوايا إلا بأن يُقسم بمثلثات ويُعلم أضلاع المثلثات، وكانت مساحة المثلثات هي مساحة السطح، كانت مساحة المثلثات التي ينقسم إليها السطح مغنية عن اعتبار السطح. فالأصل الذي يعتمد في مساحة جميع السطوح المستقيمة الخطوط هي مساحة المثلثات. وقد بقي أن نبين كيف تقسم السطوح بمثلثات. وقسمة السطوح بمثلثات تكون بأن يستخرج أوتار زوايا السطح، وليس كل سطح يمكن أن نذرع الأوتار التي تقسمه، لأن بعض السطوح قد يكون في تضاعيفها موانع وعوائق تعوق عن ذرع أوتارها. وقد يمكن أن يستخرج الأوتار / [ل – ١١٢ – و] التي تقسم السطوح المستقيمة الخطوط من غير أن تذرع الأوتار. والطريق إلى استخراج وتر كل زاوية يحيط بها خطان مستقيمان هو ما نذكره:

يُذرع الخطان المحيطان بالزاوية، ثم يُفصل من أحدهما ذراع، ‹ويقسم الخط الآخر على هذه الخط›، فما خرج من القسمة فُصل من الضلع الآخر مقدار مساوٍ له مما يلي

1 ضرب: ضرب الضرب – 5 فمساحة: مساحة – 7 انفراده: ان فراده – 8 السطوح: السطح / أحد: احده – 9 بزاوية: زاوية / قائمة (الثانية): القايم – 10 قطران: قطر / منهما: منها / نعتبر: نعتر – 11 نعتبر: نعتر – 12 قائم: القايمه / يكن: يكون – 16 مغنية: معنه – 20 تعوق: لعوق / ذرع: ذراع – 24 فصل: فضل.

الزاوية. ثم يُخرج من الفصل الأوّل إلى الفصل الثاني خطٌ مستقيم، وبقدر ما خرج من مقداره ضرب في الضلع الأول الذي فُصل منه ذراعٌ واحدٌ؛ فما خرج فهو الوتر الذي يصل بين طرفي الخطين المحيطين بالزاوية.

ومثال ذلك: خطا ا ب ب جـ يحيطان بزاوية ا ب جـ. ونريد أن نعلم مقدار وتر ا جـ. فنعرف ا ب ومقدار ب جـ. ونفصل من ب جـ ذراعًا واحدًا وهو ب د. ثم نقسم ا ب على ب جـ، فما خرج من القسمة فصل من الضلع الآخر، من ا ب، مثل ذلك المقدار، وليكن ب هـ. ونخرج خطًا مستقيمًا من د إلى هـ؛ وليس متعذر ذلك لقربه وصغره. ويقدر خط د هـ، فما كان ضربناه في ب جـ. فما خرج فهو مقدار ا جـ.



برهان ذلك: أنا قسمنا ا ب على ب جـ، فخرج ب هـ، فضرب ب جـ في ب هـ هو مقدار ا ب؛ وضرب ا ب في ب د هو مقدار ا ب لأن ب د واحد. فضرب ا ب في ب د مساوٍ لضرب جـ ب في ب هـ. فمقادير ا ب ب جـ ب د ب هـ الأربعة مقادير متناسبة، فنسبة ا ب / إلى ب هـ هي كنسبة ب جـ إلى ب د. فخط ا جـ موازٍ لخط هـ د كما تبين في المقالة السادسة من كتاب أقليدس. ومثلثا ا ب جـ هـ ب د متشابهان، فنسبة ا جـ إلى هـ د هي كنسبة جـ ب إلى ب د. فضرب ا جـ في د ب مساوٍ لضرب جـ ب في ب هـ. وضرب ا جـ في د ب هو ا جـ لأن د ب واحد. فضرب جـ ب في ب هـ هو ا جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبين. ل-١١٢-ص

فبهذا الطريق يمكن أن يقسم جميع السطوح المستقيمة الخطوط إلى مثلثات ويتيسر قسمتها وتتسهل.

فأما الدائرة فإن مساحتها تكون بأن يضرب نصف قطرها في نصف محيطها. أعني عدد ما في نصف قطرها من أضعاف الذراع في عدد ما في نصف محيطها من أضعاف الذراع؛ فما خرج فهو مساحتها. أعني عدد ما في سطحها من أضعاف مربع الذراع.

1 الفصل (الثانية): الفصل / مستقيم: مستقيمه – 5-6 ومقدار ... من ب: أثبتها في الهامش – 5 ذراعا: ذاعا – 6 فصل: فصل – 7 لقربه: لقربة – 11 ب هـ (الأولى): ب د – 12 فنسبة: أثبتها في الهامش – 13 السادسة: لسادسة كتاب: كتابا – 16 ب هـ: د هـ

وقد تبين لأرشميدس ذلك ببرهان لخصه على هذا المعنى. ونحن نذكر البرهان في هذا الموضع على نهاية الإيجاز.

ليكن دائرة عليها ا ب جـ د ومركزها هـ.

فأقول: إن ضرب نصف / قطرها في نصف محيطها مساو لمساحتها. ن-١١٣-و

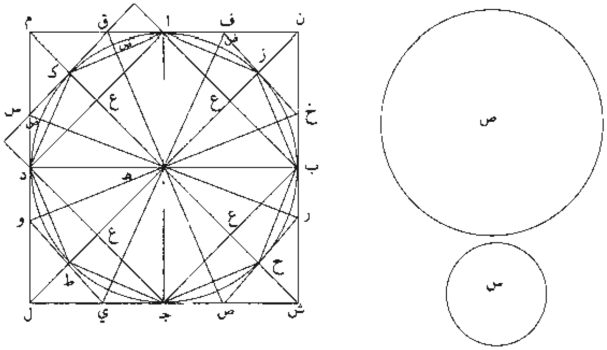
برهان ذلك: أنه لا يمكن غير ‹ذلك›. فإن أمكن فليكن ضرب نصف قطرها في نصف محيطها أعظم أو أصغر من مساحتها.

وليكن ضرب نصف قطر الدائرة في نصف محيطها مساويًا لشكل ص. وليكن أولاً أصغر من مساحة الدائرة، ولتكن زيادة الدائرة على شكل ص بمقدار شكل س. ونخرج في الدائرة قطرين متقاطعين على زوايا قائمة، وليكونا قطري ا هـ جـ ب هـ د. ونصل خطوط ا ب ب جـ جـ د د ا. فيكون شكل ا ب جـ د مربعا متساوي الأضلاع قائم الزوايا. ونجيز أيضًا على نقط ا ب جـ د خطوطًا مماسة للدائرة، ولتكن خطوط ن ا م م د ل ل جـ ش ش ب ن. فيكون شكل ن م ل ش مربعًا متساوي الأضلاع قائم الزوايا، لأن الأضلاع موازية للقطرين المتقاطعين على زوايا قائمة ومساوية لها. فيكون مربع ا ب جـ د نصف مربع ن م ل ش. فمربع ا ب جـ د أعظم من نصف الدائرة. ونصل خطوط هـ ع ز ن هـ ع ك م هـ ع ط ل هـ ع ح ش. فتكون زوايا ا هـ ب ا هـ د د هـ جـ جـ هـ ب قد انقسمت بنصفين نصفين، لأن خط ا هـ مثل خط هـ ب وخط هـ ن مشترك وقاعدة ا ن مثل قاعدة ب ن. فزاوية ا هـ ز مثل زاوية ب هـ ز. وكذلك / الزوايا الباقية. فقسي ا د د جـ جـ ب ب ا قد انقسمت بنصفين نصفين على نقط ك ط ح ز. ونصل خطوط ا ك ك د د ط ط جـ جـ ح ح ب ب ز ز ا. فيكون مثلث ا ك د أعظم من نصف قطعة ا ك د، لأنا إن أخرجنا على نقطة ك خطًا مماسا للدائرة، كان ذلك موازيا لخط ا د، لأن المماس يكون عمودا على قطر هـ ك. وقطر هـ ك هو عمود على خط ا د. وإذا أخرجنا من نقطتي ا د إلى الخط ‹المماس› عمودين قائمين على خط ا د، حدث سطح متوازي الأضلاع أعظم من قطعة ا ك د. ومثلث ا ك د هو نصف ذلك السطح، فمثلث ا ك د أعظم من نصف قطعة ا ك د. وكذلك المثلثات الباقية النظيرة لمثلث ا ك د، كل واحد منها أعظم من نصف قطعة ا ك د. وكذلك المثلثات الباقية النظيرة ن-١١٣-ظ

1 لأرشميدس: ارشمدس / ببرهان: برهن – 9 متقاطعين: مقاطعان – 11 ن ا م: ح م – 13 الأضلاع: اضلاع ومساوية: ومساوي – 15 هـ ع ح ش: هـ ع ح س – 16 انقسمت: انقسم – 17 ن: ز ل ب ن: ب جـ – 18 الزوايا الباقية: الزاويه الباقي – 20 نقطة: نقط – 21 ا د: ا ك / المماس: الماس – 22 خط: خط ا د: جـ – 23 متوازي: متوازيين – 25 قطعة: القطعة / الباقية: الباقي.

لمثلث ا كـ د، كل واحد منها أعظم من نصف القطعة التي هو فيها. وإن قسمت أيضًا قسي ا كـ كـ د د ط ط جـ جـ ح ح ب ب ز ز ا، كل واحد منها بنصفين، وأوترت بخطوط مستقيمة حدثت مثلثات هي أعظم من أنصاف القطع التي هي فيها. وإذا فعل ذلك دائمًا، يكون قد قسم من الدائرة أعظم من نصفها ومما يبقى أعظم من نصفه. ومقدار س هو زيادة الدائرة / على مقدار ص الذي هو أصغر منها، فهو أصغر من الدائرة. ل-١١٤-و

وكل مقدارين مختلفين يفصل من أعظمهما أعظم من نصفه ومما يبقى أعظم من نصفه، وفعل ذلك دائمًا، فلا بدّ أن يبقى مقدار هو أصغر من المقدار الأصغر.



فليكن الفضلات التي تبقى من الدائرة التي هي أصغر من شكل س هي قطع ا كـ كـ د د ط ط جـ جـ ح ح ب ب ز ز ا. فيكون شكل ا كـ د ط جـ ح ب ز ا أعظم من شكل ص. ولأن خط كـ هـ عمود على خط ا د، يكون ضرب هـ ع في نصف ا د هو مساحة مثلث ا هـ د. وكذلك ضرب كـ ع في نصف ا د هو مساحة مثلث ا كـ د، فضرب هـ كـ الذي هو نصف قطر الدائرة في نصف ا د هو مساحة شكل ا هـ د كـ؛ وكذلك ضرب نصف القطر في نصف ا ب هو مساحة شكل ا هـ ب ز؛ وكذلك القطعة الباقية. فضرب نصف قطر الدائرة في نصف محيط شكل ا ب جـ د هو مساحة شكل ا كـ د ط جـ ح ب ز الذي هو أعظم من شكل ص، الذي هو من ضرب نصف قطر الدائرة في نصف محيطها. فضرب نصف قطر الدائرة في نصف محيط شكل ا ب جـ د أعظم من ضرب نصف قطر الدائرة في نصف محيطها، فنصف محيط ا ب جـ د / أعظم من نصف محيط الدائرة، ومحيط هذا الشكل هو أعظم من محيط الدائرة، فخط ل-١١٤-ظ

3 القطع: القطعة – 4 قسم: ربما كانت «فصل» في الأصل – 5 هو زيادة الدائرة: مكررة في الصفحة التالية – 6 نصفه: نصف – 8 هي (الأولى): هو – 10 كـ هـ: هـ ح – 18 فخط: فخذ.

ا د – الذي هو جزء من الشكل كجزء قوس ا ک د من محيط الدائرة – أعظم من قوس ا ک د. والخط المستقيم هو أقصر خط يصل بين نقطتين، وما قرب منه أقصر مما بعد، فخط ا د أقصر من قوس ا ب، وهو أعظم منه، هذا محال. فليس شكل ص بأصغر من الدائرة.

وأقول: إن شكل ص ليس هو أيضًا أعظم من الدائرة. فإن أمكن، فليكن أعظم منها. وإذا كان أعظم من الدائرة فهو إما مساوٍ لشكل ن م ل ش وإما أصغر منه وإما أعظم منه. وضرب هـ ا الذي هو نصف قطر الدائرة ‹في نصف ا م مساوٍ لمساحة مثلث م هـ ا؛ وكذلك ضرب هـ د الذي هو نصف قطر الدائرة› في نصف د م مساوٍ لمساحة مثلث د هـ م. وكذلك مثلثات د هـ ل ل هـ جـ ش هـ جـ ‹ش هـ ب ن هـ ب ن هـ ا›. فضرب نصف قطر الدائرة في نصف محيط شكل ن م ل ش هو مساحة شكل ن م ل ش.

فإن كان شكل ص مساويًا لشكل ن م ل ش، فضرب نصف قطر الدائرة في نصف محيطها مساوٍ لضرب نصف قطر الدائرة في نصف محيط شكل ن م ل ش، فمحيط شكل ن م ل ش مساوٍ لمحيط الدائرة؛ وخط ا م د هو جزء من محيط هذا الشكل كجزء قوس ا ک د من محيط الدائرة؛ فخط ا م د مساوٍ لقوس ا ک د. لكن قوس ا ک د أقصر / من خط ا م د، لأن القوس أقرب إلى خط ا د المستقيم من خط ا م د. فقوس ا ک د ل-١١٥ و أقصر من خط ا م د وهي مساوية له؛ وهذا محال. فليس شكل ن م ل ش بمساوٍ لشكل ص.

وإن كان شكل ن م ل ش أصغر من شكل ص، فنبين كما تقدم أن محيط شكل ن م ل ش أصغر من محيط الدائرة؛ وهذا محال.

وإن كان شكل ن م ل ش أعظم من شكل ص، فليكن زيادة شكل ص على الدائرة بمقدار شكل س. فلأن شكل ن م ل ش أعظم من شكل ص، يكون زيادته على الدائرة أعظم من مقدار س، فالفضلات بمقدار الأشكال التي يفضل بها شكل ن م ل ش على الدائرة ‹و›هي أعظم من مقدار س. ونجيز على نقط ح ط ک ز خطوطًا مماسة للدائرة، ولتكن خطوط ق ک س و ط ي ص ح ر خ ز ف، ونصل خطوط هـ ق هـ س هـ و

2 المستقيم: المستقيمه / بين: يبين – 3 فخط: فخد / ا ب: ا ک د – 7 الذي: التي – 8 في: من – 9 ش هـ جـ: ش هـ ن – 14 كجزء: جزء – 15 لكن: ليكن، وفي الهامش – 16 المستقيم: المستقيمه – 19 فنبين: قد نبين – 20 الدائرة: الدابر – 23 أعظم ... فالفضلات: أثبتها في الهامش / الأشكال: شكل – 24 خطوطًا: خطوط – 25 ق ک س: ق ک ش / خ ز ف: ع ف ق.

هـ ي هـ ص هـ ر هـ خ هـ ف؛ ولتفصل هذه الخطوط محيط الدائرة على نقط ض. فلأن ك س مماس للدائرة وهـ ك ‹نصف› قطر، يكون هـ ك عمودًا على ق س، فزاوية ق ك م قائمة، فزاوية م ق ك حادة، فخط م ق أعظم من خط ق ك. وخط ق ك مساوٍ لخط ق ا، لأنهما مماسان للدائرة خارجان من نقطة واحدة، / فخط م ق أعظم من خط ل-١١٥-ظ ق ا، فمثلث ق م ك أعظم من مثلث ك ق ا، ومثلث ق ك ا أعظم من القطعة التي يحيط بها خطا ك ق ق ا وقوس ا ض ك، فمثلث م ق ك أعظم من قطعة ك ق ا ض ك. وكذلك مثلث م ك س أعظم من القطعة التي تليه، فمثلث ق م س أعظم من القطعة التي تليه، فمثلث ق م س أعظم من نصف قطعة ا م د ك ا، وكذلك مثلثات ف ن خ ر ش ص ي ل و أعظم من نصف القطعة التي هي فيها. وإذا أجيز على نقط ض خطوط مماسة للدائرة، فصلت من القطع الباقية مثلثات هي أعظم من أنصافها؛ ويتبين ذلك كما تبين في مثلث ق م س. فإذا فعل ذلك دائمًا، يكون قد فصل من الفضلات التي يزيد بها شكل ن م ل ش على الدائرة أعظم من أنصافها، ومما يبقى أعظم من نصفه. وهذه الفضلات هي أعظم من مقدار س. وكل مقدارين مختلفين يفصل من أعظمهما أعظم من نصفه ومما يبقى أعظم من نصفه؛ وفعل ذلك دائمًا، فإنه لا بدّ أن يبقى مقدار أصغر من المقدار الأصغر. فلتكن الفضلات التي عند نقط ق س و ي ص ر خ ف أصغر من مقدار س؛ ومقدار س هو زيادة شكل ص على الدائرة، فالفضلات التي عند نقط ق س و ي ص / ر خ ف على الدائرة أصغر من مقدار ص. ن-١١٦-و فشكل ق س و ي ص ر خ ف أصغر من مقدار ص. وخط هـ ك الذي هو نصف قطر الدائرة هو عمود على خط ق س، فضرب هـ ك في نصف ق س هو مساحة مثلث هـ ق س، وكذلك المثلثات الباقية. فضرب نصف قطر الدائرة في نصف محيط شكل ق س و ي ص ر خ ف هو مساحة هذا الشكل، وهذا الشكل هو أصغر من شكل ص، وشكل ص هو من ضرب نصف قطر الدائرة في نصف محيط ‹الدائرة›. فشكل ق س و ي ص ر خ ف أصغر من ضرب نصف قطر الدائرة في نصف محيطها، فمحيط شكل ق س و ي ص ر خ ف أصغر من محيط الدائرة؛ وهذا الشكل محيط الدائرة أقصر

1 ولتفصل هذه: والتفصل هذا – 3 قائمة: قايم / م ق ك: ق م ك – 4 لأنهما: الانهما / نقطة: نقط – 7 تليه: ىليه – 8 تليه: ىليه / ق م س: مس – 10 خطوط: خطوطا / الباقية: الباقي – 11 تبين: يتبين – 12 أنصافها: نصفاها – 13 نصفه: نصف – 14 نصفه (الأولى والثانية): نصف – 15 س: ش – 16 خ: ع، وكذلك فيما يلي – 17 س: ش / على: مع – 20 الباقية: الباقي – 22 فشكل: شكل.

من محيطه كما تبين من قبل؛ وهذا / محال. فليس شكل $\overline{\text{ص}}$ بأعظم من الدائرة ولا أصغر، فهو مساوٍ لها. ل-١١٦-ظ

وشكل $\overline{\text{ص}}$ هو من ضرب نصف قطر الدائرة في نصف محيطها، فضرب نصف قطر الدائرة في نصف محيطها مساوٍ لمساحة الدائرة؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

ثم أن أرشميدس استخرج نسبة قطر الدائرة إلى محيطها على غاية ما يمكن من التقريب، لأن القطر ليس له نسبة إلى المحيط على التحقيق لأنهما ليسا من جنس واحد؛ فلذلك استعمل في استخراج هذه النسبة تقريبًا ما. وإنما سلك هذا الطريق، لأن غرضه في ذلك كان استخراج مساحة الدائرة؛ والتقريب في نسبة القطر إلى المحيط ليس يغير في مساحة الدائرة ولا التفاوت في ذلك يؤثر في مساحة الدائرة تأثيرًا محسوسًا، فوجد نسبة قطر الدائرة إلى محيطها نسبة الواحد إلى ثلاثة وسبع. وله مقالة مفردة في هذا المعنى هي موجودة في أيدي الناس. فإذا أراد مريد أن يمسح الدائرة، مسح قطرها، ثم ضرب ذلك في ثلاثة وسبع، فما خرج فهو محيط الدائرة. فيأخذ نصف هذا المحيط ونصف القطر، ويضرب أحدهما في الآخر؛ فما خرج فهو مساحة الدائرة. وإن شاء، ضرب القطر كله في ربع المحيط. وإن شاء، ضرب المحيط كله في ربع القطر. فإن الذي يخرج من جميع ذلك / يكون متساويًا. ل-١١٧-و

وقد يستخرج مساحة الدائرة بغير هذا الوجه أيضًا، وهو أن يضرب القطر في نفسه، وينقص مما خرج سبعه ونصف سبعه، فما بقي فهو مساحة الدائرة؛ وهذا هو موافق للعمل الأول.

وبرهان ذلك: أن المحيط هو مثل القطر بثلاث مرات وسبع، فالمحيط هو اثنان وعشرون سبعًا من أسباع القطر. وربع المحيط هو خمسة أسباع القطر ونصف سبعه. وضرب القطر في ربع المحيط هو مساحة الدائرة، فضرب القطر في خمسة أسباعه ونصف سبعه هو مساحة الدائرة. وخمسة أسباع القطر ونصف سبعه ينقص عن جميع القطر سبعه ونصف سبعه، فضرب القطر في خمسة أسباعه ونصف سبعه ينقص عن ضرب القطر في مثله بضرب القطر في سبعه ونصف سبعه؛ وضرب القطر في مثله هو مربع القطر. وضربه في

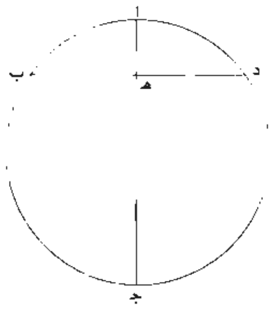
1 محيطه: محيط – 5 استخرج: استخراج – 7 هذه: هذاه – 8 يغير: يصر – 9 فوجد: في حد – 14 المحيط (الأولى): محيط – 16 هذا الوجه: هذا لوجه – 17 ونصف سبعه: أثبتها في الهامش – 24 بضرب: ضرب.

خمسة أسباعه ونصف سبعه ينقص عن مربعه بمقدار ضربه في سبعه ونصف سبعه الذي هو سبع المربع ونصف سبعه. فإذا ضرب القطر في مثله ونقص من ذلك سبعه ونصف سبعه، كان الباقي هو مضروب القطر في خمسة أسباعه ونصف سبعه، الذي قد تبين أنه مساوٍ لمساحة الدائرة. فإذا ضرب قطر الدائرة في مثله ونقص من ذلك سبعه ونصف / سبعه، ن-١١٧-ظ كان الذي يبقى هو مساحة الدائرة؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وقد آن ‹أن› نبين كيف يستخرج قطر الدائرة. لأنه ليس كل دائرة يكون قطرها موجودًا فيها ولا كل دائرة يكون مركزها موجودًا، فيمكن أن يجاز عليه خط فيكون هو القطر.

والطريق إلى استخراج قطر الدائرة، هو أن يخرج فيها وتر كيفما اتفق، ثم يقسم ذلك الوتر بنصفين، ويخرج من وسطه خط على زاوية قائمة ينتهي إلى محيط القطعة التي حازها ذلك الوتر، ثم يمسح ذلك الوتر، ويمسح ذلك العمود، ويضرب نصف الوتر في مثله، فما خرج يقسم على العمود، فما خرج من القسمة يضاف إليه العمود؛ فما اجتمع فهو قطر الدائرة.

مثال ذلك: دائرة ا ب جـ د ونريد أن نعرف قطرها. فنخرج فيها وترًا كيفما اتفق، وليكن خط ب د، ونقسمه بنصفين على نقطة هـ. ونخرج من نقطة هـ خط هـ ا عمودًا على خط ب د وننفذه على استقامة من جهة هـ حتى يلقى الدائرة، وليكن / ذلك خط ن-١١٨-و ا هـ جـ.



1 عن مربعه: من مربع – 3-5 الباقي ... كان: مكررة – 6 قطر: قطر القطر – 14 وتر: وترى – 15 ونقسمه: ونقسه نقطة (الأولى والثانية): نقط.

‹برهان ذلك›: فلأن خط ب د وتر في الدائرة، وقد قسم بنصفين على نقطة هـ، وأخرج من نقطة هـ عمود ا هـ جـ، يكون مركز الدائرة على خط ا هـ جـ، كما تبين ذلك في الشكل الأول من المقالة الثالثة من كتاب أقليدس. فخط ا جـ قطر الدائرة. ولأن خطي ا جـ ب د متقاطعان في الدائرة، يكون ضرب ا هـ في هـ جـ مساويًا لضرب ب هـ في هـ د، كما تبين في المقالة الثالثة أيضًا. وضرب ب هـ في هـ د مساوٍ لمربع ب هـ، لأنه مثل هـ د، فمربع ب هـ مساوٍ لضرب ا هـ في هـ جـ. فإذا قسم مربع ب هـ على خط هـ ا، كان الذي يخرج من القسمة هو خط هـ جـ الذي ‹يضاف إليه العمود الذي› هو عمود هـ ا ‹فيكون المجتمع جـ ا فهو› قطر الدائرة.

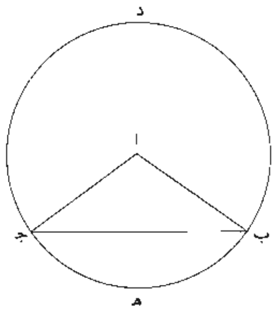
فإذا خرج في الدائرة وتر وكيفما اتفق، وقسم بنصفين، وأخرج من وسطه عمودٌ إلى ‹محيط› القطعة التي حازها ذلك الوتر، ثم ضرب نصف الوتر في مثله، وقسم ذلك على العمود، وأضيف ما يخرج من القسمة إلى العمود، كان الذي يجتمع هو قطر الدائرة؛ وذلك ما أردنا أن نبين./

ل-١١٨-ظ فأما كيف يمسح قطاع الدائرة، فإن القطاع يمسح بأن يضرب الضلع الذي هو نصف قطر الدائرة في نصف قوس القطاع؛ فما خرج فهو مساحة القطاع.

وأما قطعة الدائرة، فإنها تتمم ‹مثلث› قطاع؛ ويمسح القطاع، ثم يمسح المثلث الزائد، وينقص من مساحة القطاع، فما يبقى فهو مساحة قطعة الدائرة.

مثال ذلك: قطاع ا ب جـ.

أقول: إن ضرب ا ب في نصف قوس ب هـ جـ هو مساحة القطاع.



1 نقطة: نقط – 2 وأخرج: واخراج / مركز: مركوز – 3 الشكل: شكل / الثالثة: الثالث – 4 متقاطعان: متقاطعين – 9 وسطه: وسط – 13 بأن: با / الضلع: ضاع.

برهان ذلك: أنا نتمم الدائرة ولتكن ب د جـ، فيكون النقطة التي هي رأس القطاع مركز الدائرة، لأن القطاع هو الذي يكون رأسه مركز الدائرة وقاعدته قوس من محيط الدائرة. فيكون نسبة قوس ب هـ جـ إلى محيط الدائرة كنسبة سطح قطاع ا ب هـ جـ إلى جميع سطح الدائرة، لأن ذلك يتبين بمثل البرهان الذي ذكره أقليدس في آخر شكل من المقالة السادسة. فنسبة نصف قوس ب هـ جـ إلى نصف محيط الدائرة هي كنسبة القطاع إلى جميع الدائرة؛ ونسبة نصف قوس ب هـ جـ إلى نصف محيط الدائرة هي نسبة ضرب خط ا ب، الذي هو نصف قطر الدائرة، في نصف قوس / ب هـ جـ إلى ضرب ا ب في نصف محيط الدائرة وهو مساحة سطح الدائرة. فنسبة ضرب ا ب في نصف قوس ب هـ جـ إلى مساحة سطح الدائرة هو نسبة ‹مساحة› سطح قطاع ا ب هـ جـ إلى مساحة سطح الدائرة. فضرب خط ا ب، الذي هو نصف قطر الدائرة، في نصف قوس ب هـ جـ هو مساحة سطح قطاع ا ب هـ جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبين. ل-١١٩-و

وإذا مسح مثلث ا ب جـ وأسقط من مساحة القطاع، كان الباقي هو مساحة قطعة ب هـ جـ. لأن القطاع هو مجموع مثلث ا ب جـ مع قطعة ب هـ جـ.

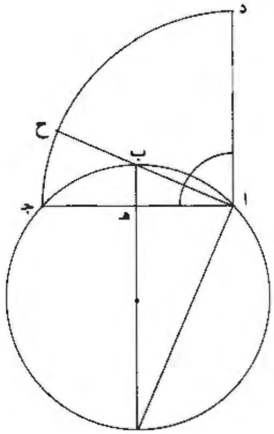
وقد بقي أن نبين كيف نعلم مقدار قوس القطاع والقطعة؛ وذلك أنه ليس كل قطاع يكون قوسه معلومة ولا كل قطعة من دائرة يكون قوسها معلومة. والقوس المعلومة هي التي يكون نسبتها إلى محيط الدائرة نسبة معلومة. فإذا لم تكن نسبة قوس القطاع أو القطعة إلى محيط الدائرة معلومة، فلا طريق إلى علم / مساحة القطاع والقطعة، ‹فلا يمكن أن نعلمهما› إلا بعد أن نعلم نسبة القوس إلى محيط الدائرة. ل-١١٩-ظ

والطريق إلى معرفة نسبة كل قوس إلى محيط دائرتها هو أن نقسم وتر القوس بنصفين، ونخرج من وسطه عمودًا ينتهي إلى القوس، ونوصل بين طرف الوتر وبين طرف العمود بخط مستقيم، ونقيم على طرف الوتر عمودًا على الوتر، ونجعل طرف الوتر مركزًا وندير ببعد الطرف الآخر من الوتر قوسًا من دائرة تفصل العمود القائم على طرف الوتر، فتكون هذه القوس ربع دائرة، لأنها توتر عند مركز دائرتها زاوية قائمة. ويخرج الخط الواصل بين طرف الوتر وبين طرف العمود الأول على استقامة إلى أن ينتهي إلى القوس

1 النقطة: نقطة – 2 رأسه: راس / وقاعدته: وقاعدة – 6 نصف (الثانية): أثبتها فوق السطر – 8 وهو: هو – 14 أن: مكررة في بداية السطر التالي – 15 قوسه: قوس – 16 تكن: تكون – 20 وسطه: وسبط / بين: يبين، وهكذا فيما يلي – 21 ونقيم: ويقام – 22 وندير: ويدار / ببعد: بعد / طرف: أثبتها فوق السطر – 23 هذه: هذ.

التي هي ربع دائرة، ثم تقدر القوس التي بين هذا الخط وبين طرف الوتر الذي يمر به ربع الدائرة ببركار، حتى يقدر البركار هذه القوس إما مرّة واحدة واما مرات، ويقدر مع ذلك جميع الربع، فيحصل من ذلك نسبة القوس – التي بين الوتر والخط الذي يقطع القوس – إلى ربع الدائرة، فتكون هذه النسبة هي نسبة القوس الأولى المطلوب / نسبتها إلى محيط دائرتها. ل-١٢٠-و

مثال ذلك: قوس ا ب جـ. ونريد أن نعرف نسبتها إلى محيط دائرتها، فنخرج وتر ا جـ ونقسمه بنصفين على نقطة هـ. ونخرج عمود هـ ب ونصل ا ب، ونقيم على نقطة ا من خط ا جـ عمودًا على خط ا جـ؛ وليكن ا د. ونجعل ا مركزًا ونُدير ببعد ا جـ قوسًا من دائرة، ولتكن جـ ح د. فتكون قوس جـ د ربع دائرة، لأن زاوية جـ ا د قائمة. ونخرج خط ا ب على استقامة حتى يلقى قوس جـ د، وليلقها على نقطة ح. فإذا قدر به قوس جـ ح بمقدار يقدر ‹به› جميع قوس جـ ح د، تحصّلت بذلك نسبة قوس جـ ح إلى قوس جـ د.



فأقول: إن نسبة قوس جـ ح إلى قوس جـ د هي نسبة قوس ا ب جـ إلى جميع محيط دائرتها.

2 ببركار: ببركال، وكذلك فيما يلي / مرّة: مرّته – 6 نعرف: معرفة – 7 ونقيم: ونقسم – 8 وندير ببعد: ونريد بعد / قوسًا: قوس – 10 وليلقها: وليلقه.

برهان ذلك: أن زاوية جـ ا ح على مركز دائرة جـ ح د، وهي على محيط دائرة ا ب جـ. فقوس جـ ب هي ضعف الشبيهة بقوس جـ ح. وقوس ا ب جـ ضعف قوس ب جـ. فقوس ا ب جـ هي أربعة أضعاف الشبيهة بقوس جـ ح. فنسبة قوس جـ ح إلى ربع دائرتها هي نسبة قوس ا ب جـ إلى جميع دائرتها. وقوس جـ ح د هي ربع دائرة. فنسبة قوس جـ ح إلى قوس جـ د هي نسبة / قوس ا ب جـ إلى جميع دائرتها؛ وذلك ما أردنا أن نبين. ب – ١٢٠ – ظ

وإن فرض على وتر ا جـ نقطة في أي موضع منه شاء الفارض، وأدير على مركز ا وببعد تلك النقطة قوس من دائرة تفصل خط ا جـ، كانت تلك القوس ‹ربع دائرة›، ونفصل منها قوسًا شبيهة بقوس جـ ح د. وهذا المعنى يحتاج إليه إذا كانت قوس ا ب جـ عظيمة المقدار، فيُضعف حينئذٍ على قوس جـ ح د، ويستعمل جزء من خط ا جـ بدل ا جـ، فيقوم مقام ا جـ، ويتحصل بذلك استخراج النسبة؛ فعلى هذه الصفة يكون استخراج نسبة القوس إلى محيط دائرتها.

إلا أنه ليس كل قوس تكون نسبتها إلى دائرتها نسبة عددية. لأن كل قوسين ‹لا› تكون نسبة إحداهما إلى أخرى نسبة عددية. فقوس جـ ح ربما لم تكن نسبتها إلى قوس جـ د نسبة عددية. وإذا لم تكن نسبة هاتين القوسين إحداهما إلى الأخرى نسبة عددية، فليس يمكن أن يقدرهما جميعًا مقدار واحد مشترك، يقدر كل واحد / منهما، الذي ‹يمكن› أن نعينه. وإذا لم تكن نسبة قوس جـ ح إلى قوس جـ د نسبة عددية، فليس نسبة قوس ا ب جـ إلى محيط دائرتها نسبة عددية؛ وإذا كانت القوس على هذه الصفة، فليس يمكن أن تنطق بها؛ فإذا عرض في المساحة، فنسبة غير المنطق ‹توصل إلى أن ينطق› بالنسبة التي ليس بينها وبين النسبة الحقيقة تفاوت مؤثر؛ وكذلك المقدار إذا كان غير منطق، يوصل إلى أن ينطق بالمقدار الذي ليس بينه وبين ذلك المقدار تفاوت مؤثر. لأن الصناعة العملية ليس يمكن أن تخرج إلى الوجود إلا باستعمال ضرب من التقريب في المواضع التي لا يمكن فيها غاية التحقيق. ل – ١٢١ – و

وهذه الطريق هي التي سلكها أرشميدس في استخراج نسبة قطر الدائرة إلى محيطها. والطريق الذي به يستخرج نسبة قوس جـ ح إلى قوس جـ د هو أن نضيق فتحة البركار إلى

8 وببعد: وبعد – قوس: قوسا – ا جـ: د – 11 ويتحصل: ويحصل – 15 تكن: يكون – 17 تكن: يكون – عددية: عددين – 18 عددية: عددين – 19 بها: به، وفوق السطر – منطق: مطق – 20 التي: الذي – 21 إلى: فوق السطر – 22 باستعمال: باستعمال – 24 سلكها: سلكه – 25 نضيق: نضق.

غاية ما يمكن من تضييق. ويقدر بها قوس جـ ح ‹و›قوس جـ د. فإنه إذا صغرت فتحة البركار، لم يكن بد من أن ينتهي إلى مقدار يقدر القوسين. وإن لم تكن نسبتها نسبة عددية، لأنه إذا تصاغرت الأجزاء، صَغُر التفاوت الذي يفضل به / إحدى القوسين على ن-١٢١-ظ القوس المناسبة للقوس الأخرى حتى يصير التفاوت غير محسوس.

فعلى هذه الصفة يمكن أن يستخرج نسبة قوس جـ ح إلى قوس جـ د التي هي نسبة قوس ا ب جـ إلى محيط دائرتها.

فقد أتينا على شرح كيفيات مساحة جميع المسطحات المستعمل مساحتها وهي السطوح المستقيمة الخطوط والدائرة.

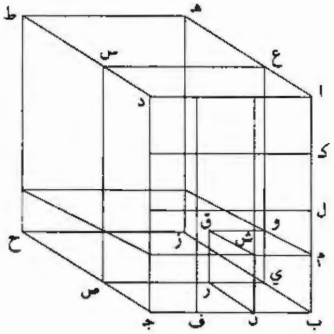
فأما كيفية مساحة المجسمات بالتفصيل الصناعي، فإن المجسمات منها ما يحيط به سطوح مستوية، ومنها ما يحيط به سطوح غير مستوية، ومنها ما يحيط به سطوح مستوية وغير مستوية. والمجسمات التي يحيط بها سطوح مستوية، منها ما هو متوازي السطوح ومنها ما ليس بمتوازي السطوح. والمتوازي السطوح منها ما سطوحها قائمة الزوايا ومنها ما ليس سطوحها قائمة الزوايا.

فالمجسم المتوازي السطوح الذي سطوحه قائمة الزوايا يكون مساحته بأن يضرب طول قاعدته في عرضها، ثم ما خرج في ارتفاع المجسم. أعني يضرب عدد ما في طول قاعدته من أضعاف الذراع في عدد ما في عرض قاعدته من أضعاف الذراع، ثم يضرب ما خرج في عدد ما في ارتفاعه / من أضعاف الذراع. وكلّ سطح من سطوحه يجوز أن يجعل ن-١٢٢-و قاعدة له وكل ضلع من أضلاعه يجوز أن يجعل ارتفاعًا له. لأن جميع أضلاعه قائمة على سطوحه على زوايا قائمة.

ومثال ذلك: مجسم ا ب جـ د هـ ز ح ط متوازي السطوح وجميع سطوحه قائم الزوايا.

أقول: إن مساحته هو مضروب طول قاعدته في عرضها، ثم ما اجتمع في ارتفاعه، أعني أن عدد ما في مجسم ب ط من أضعاف مكعب الذراع هو ما يجتمع من ضرب عدد ما في ا ب الذي هو طول القاعدة من أضعاف الذراع في عدد ما في ب جـ الذي هو عرض القاعدة من أضعاف الذراع في عدد ما في ب ز الذي هو ارتفاع المجسم من أضعاف الذراع.

1 تضييق: تضيق – 7 شرح: شرع – 9 بالتفصيل الصناعي: بالتفصل الصناعتي – 15 قاعدته (الأولى والثانية): قاعدة المجسم: الجسم – 16 قاعدته: قاعدة 17 ارتفاعه: ارتفاع – 22 قاعدته: قاعدة.



برهان ذلك: أنا نقسم ا ب بالأذرع، ولتكن ا ك ك ل ل م م ب؛ ونقسم ب جـ أيضًا بالأذرع، ولتكن ب ن ن ف ف جـ، ونخرج من مواضع القسمة خطوطًا موازية لأضلاع القاعدة. فيقسم القاعدة بمربعات متساويات الأضلاع قائمة الزوايا، كل واحد منها مساوٍ لمربع ب م ش ن الذي هو مربع الذراع، كما تبين في الشكل الأول من هذا الكتاب. ثم يقسم ب ز الذي هو ارتفاع المجسم، ‹ولنفصل› ذراعًا واحدًا، وهو ب ي. ويُفصل / أيضًا من كل واحد من ا هـ د ط جـ ح ذراع واحد على نقط ع س ص، (ل – ١٢٢ – ظ) ونصل خطوط ي ع ع س س ص ص ي، فيكون مربع ي ع س ص مساويًا لمربع ا ب جـ د وموازيًا له لأن أعمدة ب ي ا ع د س جـ ص متساوية. ونخرج من الخطوط المتوازية القائمة ‹التي في› القاعدة سطوحًا قائمة على القاعدة على زوايا قائمة، فهي تقسم مربع ع ي ص س بمربعات متساويات ‹ومساويات› للمربعات التي انقسمت بها القاعدة وتقسم مجسم ب س بمكعبات متساويات، كل واحد منها مساوٍ لمكعب ب م ن ش ي ق و ر، ومكعب ب م ن ش ي ق و ر هو مكعب ب م الذي هو الذراع. فمجسم ب س ينقسم بالسطوح القائمة على القاعدة بمكعبات متساويات، كل واحد منها مساوٍ لمكعب الذراع، وعدد هذه المكعبات هي عدد المربعات التي انقسمت بها القاعدة، لأن قاعدة كل واحد من هذه المكعبات هو واحد من المربعات التي في القاعدة، وعددَ المربعات التي انقسمت بها القاعدة هو العدد الذي يجتمع من ضرب عدد ما في طول القاعدة من أضعاف الذراع في عدد ما في عرض القاعدة من أضعاف الذراع. فعدد ما في مجسم ب س من

1 نقسم: يقسم / بالأذرع: بالاذراع / ب جـ: ا ب جـ – 2 مواضع: موا – 4 منها: منهما / مربع: مربعه – 6 واحد (الثانية): واحدا – 16 هو: هي.

المكعبات هو عدد ما يجتمع من ضرب عدد ما في طول القاعدة من أضعاف / [ب-١٢٣-و] الذراع في عدد ما في عرض القاعدة من أضعاف الذراع. ثم إذا قسمنا ارتفاع المجسم بالأذرع، ثم أخرجنا على مواضع القسمة سطوحا موازية للقاعدة، حدثت مجسمات كل واحد منها مساو لمجسم ب س، فيكون عدد ما في مجسم ب ط من أضعاف مجسم ب س هو عدد ما في ارتفاع مجسم ب ط من أضعاف الذراع. وكل واحد من المجسمات التي ينقسم بها مجسم ب ط فيه من المكعبات المساوية لمكعب الذراع مثل عدد ما في مجسم ب س، فيكون عدة ما في مجسم ب ط من أضعاف مكعب الذراع هو العدد الذي يجتمع من ضرب عدد ما في طول القاعدة من أضعاف الذراع في عدد ما في عرض القاعدة / [ل-١٢٣-ظ] من أضعاف الذراع في عدد ما في ارتفاع المجسم من أضعاف الذراع.

فكل مجسم متوازي السطوح قائم الزوايا، فإن كمية مساحته هو المجتمع من ضرب طول قاعدته في عرضها، ثم اجتمع في ارتفاع المجسم. أعني أن عدد ما فيه من أضعاف مكعب الذراع هو المجتمع من ضرب عدد ما في طول قاعدته من أضعاف الذراع في عدد ما في عرض قاعدته من أضعاف الذراع في عدد ما في ارتفاع ‹المجسم› من أضعاف الذراع؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وليس كل المجسمات التي تحيط بها سطوح مستوية تكون متوازية السطوح. ولا كل ما كان منها متوازي السطوح تكون سطوحه قائمة الزوايا. والطريق إلى مساحة المجسمات التي ليست بمتوازية السطوح والمجسمات المتوازية السطوح التي ليست بقائمة الزوايا هو أن تقسم بمخروطات، ثم يمسح كل واحد من تلك المخروطات على انفراده ويجمع مساحاتها، فيكون ما يجتمع منها هو مساحة جميع المجسم.

وأيضا، فإن المجسم المتوازي السطوح القائم الزوايا ليس يعلم أنه قائم الزوايا إلا بعد أن يعتبر بزواياه، ولا طريق إلى اعتبار زواياه إلا بعد أن يقسم جميع سطوحه بمثلثات. وإذا قسمت جميع سطوحه بمثلثات، فقد انقسم المجسم / [ل-١٢٤-و] بمخروطات. وإذا انقسم المجسم بمخروطات، أمكن أن يمسح كل واحد من المخروطات على انفراده ويجمع، فيكون ذلك هو مساحة جميع المجسم. فالطريق العام في مساحة جميع المجسمات التي يحيط بها سطوح مستوية هو مساحة المخروط.

7 لعدد: عدد – 10 متوازي: متوازين – 12 قاعدته: قاعدة – 13 قاعدته: قاعدة – 15 ولا: فلا – 16 إلى: الا – 21 بزواياه: زوياه – 22 انقسم: اقسم – 24 فالطريق: فاطريق – 25 المخروط: المجسم.

والطريق إلى مساحة المخروط هو أن يمسح قاعدته، ثم يضرب ذلك في ثلث ارتفاعه؛ فما خرج فهو مساحته، لأن قد تبين في المقالة الثانية عشرة من كتاب أقليدس أن كل مخروط فهو ثلث المنشور الذي يحيط به سطوح متوازية الأضلاع وقاعدتان متقابلتان متساويتان متوازيتان، وأن مساحة المنشور الذي ‹على› هذه الصفة هو ضرب قاعدته في جميع ارتفاعه، فيكون مساحة المخروط هو ضرب قاعدته في ثلث ارتفاعه. وقد تبين كيف يمسح قاعدة المخروط المستقيم الخطوط، لأن قاعدة المخروط المستقيم الخطوط هي سطح مستقيم الخطوط؛ وقد تبين فيما تقدم كيف يمسح السطوح المستقيمة الخطوط، فقد بقي أن نبين كيف نستخرج ارتفاع المخروط. وقد بقي أيضًا أن نبين كيف نقسم سطوح المجسمات بمثلثات لينقسم بذلك المجسم بالمخروطات.

أما قسمة سطوح المجسم بمثلثات فتكون باستخراج أوتار الزوايا. وجميع / السطوح ل-١٢٤-ظ للمجسم المستقيم الخطوط يمكن فيها ذلك بالطريق الذي بيناه في استخراج أوتار [زوايا] الزوايا، في الشكل السادس من هذا القول، ما سوى قاعدة المجسم، فإنه ليس يوصل إلى داخل المجسم؛ فليعمل فيه العمل الذي بيناه هناك.

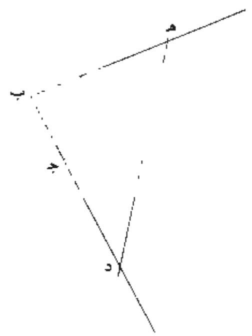
ونحن نبين الآن كيف يستخرج أوتار زوايا القاعدة.

وذلك بأن نحد مسطرتين يكون إحداهما ذات عرض مقدر وتلصق هذه العريضة بأحد الضلعين المحيطين بزاوية القاعدة التي يراد استخراج وترها. ونجعل بعض المسطرة خارجًا عن الزاوية، ثم نلصق المسطرة الأخرى بالضلع الآخر من أضلاع القاعدة الذي يحيط مع الضلع الأول بالزاوية المذكورة. ونركب طرف هذه المسطرة الثانية على طرف المسطرة الأولى. فيحدث في سطح المسطرة الأولى العريضة زاوية مساوية لزاوية القاعدة. لأن النهاية الخارجة من المسطرة العريضة موازية لنهايتها الملتصقة بضلع المجسم الذي هو ضلع القاعدة، والخط المخطوط مع نهاية المسطرة الثانية متصل بالضلع الآخر من أضلاع القاعدة، فيكون الزاوية التي يحيط بها الخط المخطوط في سطح المسطرة مع نهاية المسطرة ‹الأولى› مساوية لزاوية قاعدة المجسم. فإذا تحصلت هذه الزاوية، أثبتت المسطرة العريضة في سطح مستوٍ، وخُطَّ مع نهايتها الملاصقة / [كانت] للمجسم خطٌّ مستقيم في السطح ل-١٢٥-و المستوي، ثم يركب المسطرة الثانية على الخط المخطوط في سطح المسطرة الأولى العريضة،

2 مساحته: مساحة – 4 متوازيتان: متوازيان – 6 مستقيم: مستقيمة – 10 قسمة: قسمته / أوتار الزوايا: اوتا زويا – 12 هذا: هذه / المجسم: الجسم – 15 إحداهما: احدهما – 16 وترها: وبرهان / المسطرة: المصطرة – 18 الثانية: كتب بعدها «فيحدث»، ثم ضرب عليها بالقلم – 19 فيحدث: ثم يحيط / في: مكررة / الأولى: اولى.

ويخطّ مع نهاية هذه المسطرة خط مستقيم في السطح المستوي، فيحدث زاوية في السطح المستوي مساوية للزاوية التي في سطح المسطرة، لأن الخط الأول موازٍ لنهاية المسطرة العريضة التي تحيط بالزاوية التي في سطح المسطرة والخطّ الثاني متصل بالخط المخطوط في سطح المسطرة. فإذا تحصلت هذه الزاوية في السطح المستوي، فصل من أحد خطيها ذراع واحد، وقسم عدد ما في ضلع المجسم النظير للخط الآخر من خطي الزاوية من أضعاف الذراع على عدد ما في ضلع المجسم النظير للخط الأول من أضعاف الذراع؛ فما خرج من القسمة فصل من الخط الباقي من خطي الزاوية المرسومة في السطح المستوي مثل ذلك العدد، ووصل بين موضع الفصل وبين طرف الذراع الأول بخط مستقيم، وقدر هذه الخط؛ فما خرج من تقديره، ضرب في عدد ما في ضلع المجسم النظير للخط الذي فصل منه ذراع واحد ‹من أضعاف الذراع›. فما خرج فهو وتر زاوية قاعدة المجسم، الذي يفصل من قاعدة ‹المجسم› مثلثًا.

مثال ذلك: زاوية ا ب جـ هي الزاوية المساوية لزاوية قاعدة المجسم. وليكن / ا ب ل – ١٢٥ – ظ ذراعًا واحدا. وليكن ب جـ مساويًا لما خرج من قسمة ضلع المجسم النظير لخط جـ ب على الضلع النظير لخط ب ا. ويوصل ا جـ ويقدر، ويضرب ما يجد من مقداره في ضلع المجسم النظير لخط ا ب.



فأقول: إن الذي يخرج هو الوتر الذي يصل بين طرفي ضلعي القاعدة.

برهان ذلك: أنه إذا أخرج خطا ب ا ب جـ على استقامة مثل خطي ب هـ ب د، وجعل ب هـ مساويا لضلع المجسم النظير لخط ب ا، وجعل ب د مساويًا لضلع المجسم

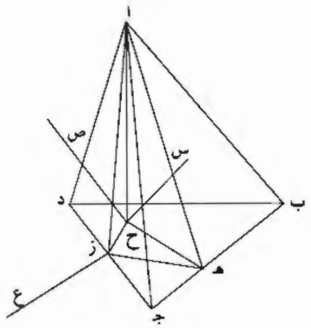
1 ويخطّ: ويحيط – 5 الزاوية: الزاية – 9 ضلع: الضلع – 11 مثلثا: مثلث – 13 واحدا: واحد – 14 الضلع: ضلع – 16 فأقول: فاقالو – طرفي: طرف / ضلعي: ضلع – 17 إذا: اذاا / خطا: خطي – 18 المجسم: الجسم، وكذلك فيما بعد.

النظير لخط ب جـ، ووصل هـ د، كان هـ د مساويًا للوتر الذي يصل بين طرفي ضلعي الجسم. وذلك أن ضلعي هـ ب ب د مساويان لضلعي الجسم وزاوية هـ ب د مساوية لزاوية قاعدة الجسم، فقاعدة هـ د مساوية للوتر الذي يوتر زاوية قاعدة الجسم. وقد تبين في الشكل السادس من هذه القول أن ضرب ا جـ في ب هـ مساوٍ لمقدار خط د هـ، فضرب ا جـ في ب هـ مساوٍ للوتر الذي يفصل قاعدة الجسم في سطح؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

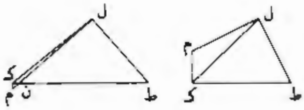
وإن كانت قاعدة الجسم في سطح مستوٍ / متصل، أخرج ضلعا القاعدة على ل-١٢٦-و استقامة، فإنه يحدث خارج الجسم زاوية مساوية لزاوية قاعدة الجسم، فنعمل فيها مثل ما عمل في زاوية ا ب جـ، فإنه يتحصل بذلك الوتر المطلوب.

فأما كيف يستخرج ارتفاع المخروط، فيكون كما نصف: نستخرج عمودي مثلثين من مثلثات المخروط من المثلثات الظاهرة التي تلقى زاوية واحدة من زوايا المخروط، كانت قاعدة المخروط مثلثًا أو كانت كثيرة الأضلاع، بَعد أن يكون رأسا ‹مثلثي› المخروط نقطة واحدة. ونستخرج مسقطي حجري المثلثين، ونرسم في سطح مستوٍ زاوية مساوية لزاوية قاعدة المخروط التي مع زاويتي المثلثين زاوية المخروط، كما بينا فيما تقدم. ثم نفصل من خطي هذه الزاوية المرسومة في السطح المستوي خطين مساويين لمسقطي حجري المثلثين، ويوصل بين طرفيهما، فيحدث زاويتان ومثلث. فنعتبر الزاويتين: فإن كانت إحداهما قائمة، فإن عمود المثلث / الذي يفصل مسقط الحجر الذي ليس الزاوية التي على طرفه قائمة هو ارتفاع ل-١٢٦-ظ المخروط. واعتبار الزوايا يكون بأن يضرب كل واحد من أضلاع المثلث في نفسه ويجمع كل اثنين منها ويقابل بهما الثالث. فإن ساوى اثنان منهما مربع الثالث، فإن الزاوية التي يحيط بها الاثنان ‹قائمة؛ وإن كانا أصغر، فإن الزاوية التي يحيط بها الاثنان أعظم من قائمة، وإن كانا أعظم، فإن الزاوية التي يحيط بها الاثنان› أصغر من قائمة. وإن لم تكن إحدى الزاويتين قائمة، أُقيم على طرف كل واحد من الخطين عمود وأُخرج، فهما يلتقيان. فإذا التقيا، قدر أحدهما وضرب مقداره في مثله، ثم ضرب عمود المثلث – الذي فصل من المثلث مسقط الحجر الذي على طرفه أُقيم الخط الذي قدر – في مثله، ثم يسقط مربع الخط من مربع هذا العمود، فما يبقى أخذ جذره، فما حصل فهو ارتفاع المخروط.

1 طرفي: طرف – 2 ضلعي: ضلع / لضلعي الجسم: لضلع الجسم / هـ ب د: هـ د – 3 يوتر: يؤتر – 6 أخرج ضلعا: اخراج ضلع – 11 بعد: بعده / رأسا: رامي / نقطة: نقط – 12-14 ونرسم في ... حجري المثلثين: مكررة – 13 زاويتي: زاوية، في التكرار / خطي: خط، وهو صحيح في التكرار – 14 السطح: سطح، في التكرار – 15 زاويتان: زاويتين / فنعتبر: فيعتبر / إحداهما: احدهما – 16 المثلث: مثلث / طرفه: طرف – 18 ساوى: مساوا – 20 من: ان / تكن: يكون – 21 وأخرج: اخراج – 24 هذا: هذه.



مثال ذلك: مخروط ا ب جـ د قاعدته ب جـ د ورأسه نقطة ا والمثلثات الباقية ا ب جـ ا ب د ا جـ د. ونريد أن نعرف ارتفاعه.



فنستخرج عمودي مثلثي ا ب جـ ا جـ د، وليكونا عمودي ا هـ ا ز. فيكون خطا هـ جـ جـ ز مسقطي حجريهما. ولنرسم في سطح مستوٍ زاوية مساوية لزاوية هـ جـ د، ولتكن زاوية ل ط ك. فنفصل ل ط مثل هـ جـ وط ك مثل جـ ز، ونصل ل ك. ثم نعتبر زاويتين مساويتين لزاويتي ط ل ك ل ك ط. فإن كانت إحدى هاتين الزاويتين قائمة، فإن عمود / المثلث الذي مسقط حجره الضلع الآخر من ضلعي الزاوية هو ارتفاع المخروط، أعني إن كانت زاوية ط ل ك قائمة، فإن عمود ا ز هو ارتفاع المخروط، وإن كانت زاوية ط ك ل قائمة، فإن عمود ا هـ هو ارتفاع المخروط. وإن لم تكن واحدة من الزاويتين قائمة، فإنا نقيم على نقطتي ل ك عمودين على خطي ل ط ك ط، وليكونا ل م ك م. ونخرجهما على استقامة فهما يلتقيان، فليلتقيا على نقطة م. أما إن كانت زاويتا ط ل ك ط ك ل حادتين، فإن التقيا يكون في داخل زاوية ل ط ك، أعني أن الخط الذي يخرج من الزاوية إلى موضع الالتقاء يكون يقطع زاوية ل ط ك. وأما إن كانت إحدى زاويتي ل - ١٢٧ - و

١ قاعدته: قاعدة / ورأسه: راس / والمثلثات: ومثلثات / الباقية: الباقي – 5 فنفصل: فيفص – 6 زاويتين: زاويتي / مساويتين: مساوية / لزاويتي: لزاوية – 7 ضلعي: ضلع – 9 تكن: يكون – 12 التقيا: التقاء.

ط ل ك ط ك ل منفرجة. فالالتقاء يكون خارج الزاوية، أعني أن الخط الذي يخرج من الزاوية إلى موضع الالتقاء يقع خارج الزاوية. وذلك أنه إذا كانت زاوية ط ل ك منفرجة، كانت زاوية ط ن ل حادة، فتكون زاوية ك ن م حادة، وزاوية ن ك م قائمة، ويلتقي الخطان خارج الزاوية. وإذا التقيا الخطان، قدر أحد الخطين اللذين هما ل م ك م، وليكن مثلاً ل م. وضرب في مثله ونقص ‹مربعه› من مربع ا هـ، فما بقي أخذ جذره، فما حصل فهو ارتفاع / المخروط. ل – ١٢٧ – ظ

والبرهان على جميع ذلك: أنا نتوهم في قاعدة المخروط خطا يصل بين نقطتي هـ ز. وليكن خط هـ ز، فيكون هـ جـ ز مساويًا لمثلث ل ط ك. فإن كانت زاوية ط ل ك قائمة، فإن زاوية جـ هـ ز قائمة.

فأقول: إن عمود ا ز هو ارتفاع المخروط.

برهان ذلك: أنا نخرج من نقطة ز خطًا موازيًا لخط جـ هـ في سطح القاعدة، وليكن خط ز ع. فلأن زاوية جـ هـ ز قائمة وزاوية جـ هـ ا قائمة، يكون خط جـ هـ عمودًا على سطح ا هـ ز. فلأن خط ز ع موازٍ لخط جـ هـ، يكون خط ز ع أيضا عمودًا على سطح ا هـ ز. فيكون زاوية ع ز ا قائمة. ‹و›زاوية جـ ز ا قائمة، فخط ا ز هو عمود على السطح الذي فيه خطا جـ ز ز ع. والسطح الذي فيه هذان الخطان هو سطح قاعدة المخروط، فخط ا ز هو عمود على سطح قاعدة المخروط، فهو ارتفاع المخروط.

وكذلك نبين أن زاوية ط ك ل إن كانت قائمة، فإن العمود ا هـ هو ارتفاع المخروط.

وإن لم تكن إحدى زاويتي ط ل ك ط ك ل قائمة والتقيا الخطان على نقطة م، فإنا نتوهم عمودين خارجين من نقطتي هـ ز قائمين على خطي جـ هـ جـ ز، فهما يلتقيان كالتقاء خطي ل م ك م، لأن مثلث هـ جـ ز مساوٍ لمثلث ط ل ك وشبيه به؛ فليلتق / العمودان على نقطة ح. ونصل ا ح ونجيز على ح خطًا موازيًا لخط جـ هـ في سطح قاعدة المخروط. وليكن ح س. وخطًا موازيا لخط جـ ز في سطح القاعدة أيضا، وليكن ح ص. فلأن زاوية جـ هـ ح قائمة وزاوية جـ هـ ا قائمة، يكون خط جـ هـ عمودا على سطح مثلث ا هـ ح؛ ولأن خط ح س موازٍ لخط جـ هـ، يكون خط ح س أيضا عمودًا على سطح مثلث ا هـ ح، فزاوية س ح ا قائمة. ولأن زاوية جـ ز ح قائمة وزاوية جـ ز ا قائمة، يكون خط جـ ز عمودًا على سطح مثلث ا ز ح؛ وخط ح ص موازٍ لخط جـ ز، فخط ب – ١٢٨ – و

3 قائمة: قايم – 4 الخطان (الأولى): الخاطان – 6 حصل: حاصل – 13 خط (الأولى): مكررة، ثم ضرب عليها بالقلم – 18 تكن: يكون – 19 خطي: خط – 20 هـ جـ ز: ح هـ ز / وشبيه: وشبيها / فليلتق: فيلتق

ح ص عمود على سطح مثلث ا ز ح، فزاوية ص ح ا قائمة. وقد كانت زاوية س ح ا قائمة، فخط ا ح عمود على خطي س ح ص ح، فهو عمود على السطح الذي فيه هذان الخطان؛ وهذان الخطان هما في سطح قاعدة المخروط. فخط ا ح هو عمود على سطح قاعدة المخروط. فهو ارتفاع المخروط. ‹و›لأن ا ح عمود على سطح القاعدة، فهو ب-١٢٨-ظ يحيط مع كل خط في سطح القاعدة بزاوية قائمة. فزاوية ا ح هـ قائمة، فمثلث ا هـ ح قائم الزاوية، فمربع ا هـ مساوٍ لمربع ا ح ومربع ح هـ. فإذا أنقص مربع ح هـ من مربع ا هـ، كان الباقي هو مربع ا ح. وح هـ مثل ل م، فإذا أنقص مربع ل م من مربع ا هـ، كان الباقي هو مربع ا ح، فإذا أخذ جذره، كان ذلك ا ح الذي هو ارتفاع المخروط؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وكذلك ‹يمكن› أن يستخرج ارتفاعات المخروطات بطريق غير هذه الطريق. وهو طريق يستخرج به ‹أعمدة› جميع الأجسام المرتفعة وبه يستخرج أعمدة الجبال والأشخاص العالية؛ ونحن نبينه من بعد.

وإن فرض سطح من سطوح المخروط قاعدة للمخروط، غير قاعدته الطبيعية التي هي قاعدة المجسم، واستخرج العمود الواقع من زاوية المخروط المقابل لتلك القاعدة على تلك القاعدة، بالوجه الأول الذي ذكرنا في استخراج ارتفاع المخروط، وضرب مساحة تلك القاعدة في ثلث ذلك الارتفاع، كان الذي يخرج هو مساحة المخروط.

وجميع الأجسام التي يستعمل المساح مساحتها هي الأجسام المستوية السطوح، / ‹و›الأساطين المستديرة والمخروطات المستديرة والأكر. فأما ما سوى هذه، فليس يدخل في ل-١٢٩-و صناعة المساحة. وقد بينا كيف يمسح جميع الأجسام المستوية السطوح.

فأما الأسطوانة المستديرة، وهي التي قاعدتاها دائرتان متساويتان متوازيتان ويحيط بها سطح واحد مستدير، فالطريق إلى مساحة هذه الأسطوانة هو أن يمسح قاعدتها ويمسح ارتفاعها، ثم تضرب مساحة القاعدة في الارتفاع؛ فما حصل فهو مساحة الأسطوانة.

أما إن كانت الأسطوانة قائمة على قاعدتها على زوايا قائمة، فذلك فيها بين، لأن طول الأسطوانة هو ارتفاعها. فإذا قدر من ارتفاع الأسطوانة ذراع واحد وأخرج من نهاية

2 لسطح: سطح – 3 قاعدة: لقاعدة – 4 فهو (الثانية): فيهو – 5 بزاوية قائمة: براوياة القائمة / ا ح هـ: هـ ح – 7 من: مكررة – 8 أخذ: اخده – 13 قاعدته: قاعدة – 14 المجسم: الجسم / واستخرج: استحراج – 20 الأسطوانة: كتبها الأستوان، أو الأستوانة، ولن نشير إليها فيما بعد – 21 مستدير: مستديرة / فالطريق: والطريق.

الذراع سطح موازٍ للقاعدة، فإنه ينفصل من الأسطوانة جزء قاعدتُه قاعدةُ الأسطوانة وارتفاعه ذراع واحد. فيكون عدد ما في هذه الجزء من أضعاف مكعب الذراع هو عدد ما في القاعدة من أضعاف مربع الذراع، لأن كل جزء من القاعدة قد قام عليه جزء من المجسم المستدير. فيكون نسبة الجزء من القاعدة إلى جميع القاعدة كنسبة الجزء / من المجسم ل - ١٢٩ - ظ إلى جميع المجسم. فيكون عدد ما في المجسم الذي هو جزء من الأسطوانة من أضعاف مكعب الذراع كعدة ما في القاعدة من أضعاف مربع الذراع. ثم إذا توهم ارتفاع الأسطوانة قد قسم بالأذرع، وأجيز على كل موضع من القسمة سطح موازٍ للقاعدة، انقسمت الأسطوانة بأقسام تساوي عدتها عدة ما في ارتفاع الأسطوانة من أضعاف الذراع؛ وكل واحد من الأقسام مساوٍ للجزء الأول الذي ارتفاعه ذراع واحد، فيكون عدد ما في جميع الأسطوانة من أضعاف مكعب الذراع هو المجتمع من عدة ما في الجزء الواحد الأول من أضعاف مكعب الذراع مضروبًا في عدة ما في ارتفاع الأسطوانة من أضعاف الذراع. وعدة ما في الجزء الأول من أضعاف مكعب الذراع هو عدة ما في القاعدة من أضعاف مربع الذراع. فإذا ضرب مساحة القاعدة في ارتفاع الأسطوانة، كان الذي يجتمع هو مساحة الأسطوانة.

فأما الأسطوانة المائلة، فإنها مساوية للأسطوانة القائمة التي قاعدتها قاعدة الأسطوانة المائلة وارتفاعها مساوٍ لارتفاعها. وذلك تبين ببراهين المقالة الثانية عشرة من / كتاب ل - ١٣٠ - و أقليدس؛ فالطريق إلى مساحة الأسطوانة المائلة هو أن يمسح قاعدتها، ثم يستخرج ارتفاعها ويضرب مساحة القاعدة في الارتفاع، فما حصل فهو مساحة الأسطوانة المائلة.

فأما المخروط المستدير فإن الطريق إلى مساحته هو أن يمسح قاعدته وتضرب في ثُلث ارتفاعه، فما يحصل من ذلك فهو مساحة / المخروط قائمًا على قاعدته أو كان مائلاً، لأنه ط - ٢٨ - ظ قد تبين في المقالة الثانية عشرة من كتاب أقليدس أن كل مخروط مستدير قاعدته دائرة، فإنه ثُلث الأسطوانة التي قاعدتها قاعدته وارتفاعها ارتفاعه.

فأما كيف تمسح قواعد الأساطين والمخروطات المستديرة، فإنه يكون بأن يقدر محيط قاعدتها. فما يحصل من مقدار المحيط قسم على ثلاثة وسبع، فما خرج من القسمة فهو

1 قاعدته: قاعدة – 4 المستدير: المستديرة / الجزء: كتب بعدها «من الأسطوانة»، ثم ضرب عليها بالقلم – 6 أضعاف: كتب بعدها «القاعدة»، ثم ضرب عليها بالقلم – 7 بالأذرع: بالاذراع – 8 تساوي: متساوي / عدة: كعدة / ما في: مكررة – 16 ببراهين: براهين – 17 المائلة: المائل – 20 المخروط: كان المخروط، وهو بداية مخطوطة [ط] كالمخروط [ل] – 21 عشرة: عشر [ط، ل] / مستدير: مستديرة [ل] / قاعدته: قاعدة [ل].

قطر القاعدة؛ وإذا حصل قطر القاعدة ومحيطها، فحينئذٍ تمسح الدائرة بالطريق الذي قدمنا ذكره في مساحة الدائرة.

فأما كيف تستخرج ارتفاعات الأساطين المائلة والمخروطات المائلة، فإنا نبينه من بعد.

فأما الكرة فإن الطريق إلى مساحتها، هو أن تمسح أعظم دائرة تقع فيها، ثم نضرب مساحة الدائرة / في ثلثي قطر الدائرة، الذي هو قطر الكرة؛ فما يحصل من ذلك فهو ل-١٣٠-ظ مساحة الكرة. وذلك أن الكرة هي ثلثا الأسطوانة التي قاعدتها أعظم دائرة تقع في الكرة، وارتفاعها مساوٍ لقطر الكرة. وقد بيّن ذلك المهندسون في كتبهم، وكتبهم في ذلك موجودة، وقد بيناه نحن أيضًا في قول مفرد.

فأما كيف تُستخرج أعظم دائرة تقع في الكرة، فإنه يكون كما نصف: نفتح البركار بأي مقدار كان، ثم نجعل إحدى رجليه على نقطة من الكرة، ثم نرسم بالرجل الأخرى دائرة في سطح الكرة، ثم نرفع البركار ويبقى على وضعه، ويُتعلم نقطتان على محيط الدائرة التي في الكرة، فتنقسم الدائرة بقوسين. فتنقسم كل واحدة من هاتين القوسين بنصفين ببركار آخر تقدر به إحدى القوسين؛ ويزاد في فتحة البركار وينقص إلى أن يقدر القوس في مرتين، فتنقسم القوس بنصفين، ويتعلم على وسطها نقطة؛ ثم يقدر القوس الأخرى كذلك إلى أن تنقسم بنصفين ويتعلم على وسطها نقطة. فإذا تحصلت هاتان النقطتان، فهما تقسمان محيط الدائرة بنصفين، فالخط المتوهم الذي يصل بين هاتين النقطتين هو قطر الدائرة. فنفتح البركار الثاني، ونجعل إحدى رجليه على إحدى النقطتين اللتين تقسمان محيط الدائرة / بنصفين، ونفتح البركار إلى أن تحصل رجله الأخرى على ل-١٣١-و النقطة الأخرى من النقطتين. فإذا حصلت رجلا البركار على النقطتين المتقابلتين. كانت فتحة البركار مساوية لقطر الدائرة المرسومة في سطح الكرة؛ فحينئذٍ نثبت رجلي هذا البركار في سطح مستوٍ حتى يؤثر رجلاه في السطح، ثم نجعل على النقطتين مسطرة، ونوصل بين النقطتين بخط مستقيم؛ فيكون هذا الخط مساويًا لقطر الدائرة المرسومة في سطح الكرة. فيقسم هذا الخط بنصفين ويخرج من وسطه عمود قائم على الخط على زوايا قائمة؛ ثم يؤخذ البركار الأول، فنجعل إحدى رجليه على طرف الخط المقسوم، ونحرك الرجل

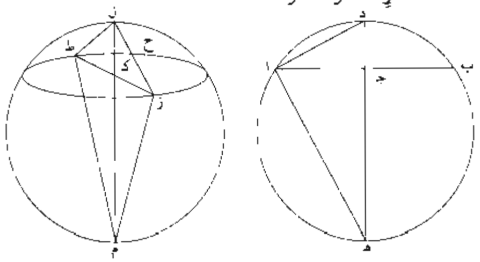
1 القاعدة (الثانية): الدائرة [ط] – 4 أن: ناقصة [ل] / تقع: يقع، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد [ط] – 5 ثلثي: ثلث [ل] – 6 ثلثا: ثلثه [ل] – 7 بيّن: نبين [ل] تبين [ط] / المهندسون: المهندوس [ل] – 8 مفرد: مفرده [ل] – 9 يكون: ناقصة [ل] / البركار: البركال [ل] – 10 نقطة: نقط [ل] – 11 البركار: البركال، ولن نشير إليها فيما بعد [ل، ط] – 14 وسطها: وسطها [ل] – 16 فهما: فيما [ل] – 17 هو قطر ... النقطتين: ناقصة [ل] – 18 ونفتح: وينفتحل [ل] / تحصل: يجعل [ل] 20 نثبت رجلي: نثبت رجلا [ل] نثبت رجلا [ط] – 22 بخط: بحيط [ل] – 23 هذا: هذه [ل] / زوايا: زاوية [ل].

الأخرى إلى أن تلقى العمود القائم؛ وهي لا بدّ أن تلقى العمود، لأن فتحة البركار الأول هي أعظم من نصف قطر الدائرة التي رسمها في الكرة، لأن موضع الرجل الثانية من البركار الأول هو قطب الدائرة التي رسمها / في الكرة، وكل خط يخرج من قطب (ط-٢٩-و) دائرة في الكرة إلى محيطها فهو أعظم من نصف قطر الدائرة، وذلك يتبين من كتاب الأكر لثاوذوسيوس. فإذا لقيت رجل البركار العمود القائم على الخط، تعلم على موضع لقائهما نقطة، ووصل بين هذه النقطة وبين طرف الخط، الذي عليه كان رجل البركار، بخط مستقيم؛ / ثم أخرج العمود في الجهة الأخرى، وأقيم على طرف الخط الخارج من (ل-١٣١-ظ) طرف الخط المقسوم إلى العمود خطٌ على زاوية قائمة، وأخرج على استقامة حتى يلقى العمود. فالخط الذي ينفصل من العمود بين هذا الخط والخط الأول هو قطر الكرة.

وإن شئنا، قدّرنا نصف الخط الذي هو مساوٍ لقطر الدائرة المرسومة في الكرة، وقدّرنا ما ينفصل من العمود، ثم نضرب ما خرج من تقدير نصف الخط في مثله، فما خرج قسمناه على مقدار ما انفصل من العمود، فما حصل أضفنا إليه العمود، فما اجتمع فهو قطر الكرة؛ فإذا ضرب في مثله ونقص منه سبعه ونصف سبعه، كان الباقي هو أعظم دائرة تقع في الكرة. فإذا ضرب مساحة هذه الدائرة في ثلثي القطر، كان الذي يجتمع هو مساحة الكرة.

والبرهان على أن ذلك هو قطر الكرة: هو أن نجعل الخط المساوي لقطر الدائرة المرسومة في الكرة خط $\overline{\text{ا ب}}$، ونقسمه بنصفين على نقطة $\overline{\text{جـ}}$، ونخرج من نقطة $\overline{\text{جـ}}$ خط $\overline{\text{جـ د}}$ عمودًا على خط $\overline{\text{ا ب}}$، ولتكن نقطة $\overline{\text{د}}$ هي التي تفصلها رجل البركار الأول؛ ونصل $\overline{\text{ا د}}$، ونقيم على $\overline{\text{ا د}}$ خطًا على زاوية قائمة، وليكن $\overline{\text{ا هـ}}$؛ ونخرج $\overline{\text{د جـ}}$ على استقامة حتى يلقى $\overline{\text{ا هـ}}$، فلا بدّ أن يلقاه لأن زاوية $\overline{\text{جـ ا هـ}}$ حادة وزاوية $\overline{\text{ا جـ هـ}}$ قائمة، فيلتقيان على نقطة / $\overline{\text{هـ}}$. (ل-١٣٢-و)

فأقول: إن $\overline{\text{د هـ}}$ مساوٍ لقطر الكرة.



1 وهي: وهو [ط، ل] – 4 يتبين: تبين [ل] – 8 خط: خطا [ط، ل] – 9 ينفصل: يفصل [ل] – 11 ينفصل: يفصل [ل] – 12 قسمناه: قسماه [ل] – 17 ونقسمه: ونقسم [ل] / عمودًا: ناقصة [ط] – 17-18 ونقسمه ... $\overline{\text{ا ب}}$: أثبتها في الهامش [ط].

برهان ذلك: أنا نتوهم الدائرة المرسومة في الكرة دائرة ز ح ط، وليكن قطرها المقدر بالبركار خط ز ط، وليكن قطبها ل؛ ونقسم خط ز ط بنصفين على نقطة ك، فتكون نقطة ك مركز الدائرة. ونصل ل ك، فيكون ل ك عمودًا على سطح الدائرة، لأن كل خط يخرج من نقطة ل إلى محيط الدائرة فهو مساوٍ لخط ل ز. وكل خط يخرج من نقطة ك إلى محيط الدائرة فهو مساوٍ لخط ك ز، لأن نقطة ك مركز الدائرة. فكل خطين يخرجان من نقطتي ل ك إلى نقطة من محيط الدائرة فهما مساويان لخطي ل ز ز ك. وخط ل ك مشترك لجميع المثلثات، فجميع المثلثات التي تحدث تكون مساوية لمثلث ل ك ز، وتكون زواياها التي عند نقطة ك مساوية لزاوية ل ك ز القائمة، فخط ل ك يحيط مع كل خط يخرج من نقطة ك إلى محيط الدائرة بزاوية قائمة، فخط ل ك عمود على سطح الدائرة. وكل خط يخرج من مركز الدائرة ويكون عمودًا على سطحها فهو يمرّ بمركز الكرة، ‹و›قد تبين ذلك في كتاب ثاوذوسيوس في *الأكر*. فنتوهم خط ل ك خارجًا على استقامة إلى أن ينتهي/ (ل – ١٣٢ – ظ) إلى سطح الكرة، فيلقى سطح الكرة على نقطة م، فيكون خط ل م قطر الكرة. ونصل ز م، فيحدث مثلث ل ز م. فنتوهم سطح مثلث ل ز م قاطعًا للكرة، فهو يحدث في سطحها دائرة مركزها مركز الكرة؛ وقد تبين ذلك أيضًا في كتاب ثاوذوسيوس في *الأكر*. فلتكن الدائرة دائرة ز ل ط م، فهذه الدائرة هي في سطح الكرة، ومركزها مركز الكرة. وإذا كان مركزها مركز الكرة، فهي أعظم دائرة تقع في الكرة ومركزها على خط ل م. وإذا كان مركز دائرة ز ل ط م على خط ل م، فخط ل م قطر الدائرة، وقوس ل ز م نصف دائرة، فزاوية ل ز م قائمة. فمثلث ز ل م شبيه بمثلث ز ل ك،/ (ط – ٢٩ – ظ) فنسبة م ل إلى ل ز هي كنسبة ز ل إلى ل ك، فضرب م ل في ل ك مساوٍ لمربع ل ز.

وأيضًا، فإن زاوية هـ ا د قائمة، وزاوية ا جـ د قائمة، فمثلث ا د هـ شبيه بمثلث ا د جـ، فضرب هـ د في د جـ مساوٍ لمربع ا د؛ وا د مثل ز ل وا جـ مثل ز ك، ومربع ا د مثل مربعي ا جـ جـ د، ومربع ز ل مثل مربعي ز ك ك ل، فمربع جـ د مثل مربع ك ل،/ (ل – ١٣٣ – و) فـ جـ د مثل ك ل. ولأن ضرب هـ د في د جـ مساوٍ لمربع ا د، وا د مثل ز ل، يكون

2 ز ط: ز هـ [ل] / نقطة: ناقصة [ل] – 4 إلى محيط: التي يحيط [ل] – 5 إلى محيط: التي يحيط [ل] – 6 مساويان: متساويان [ط] – 8 مساوية: مساوي [ل] – 13 مثلث (الثانية): بمثلث [ل] – 14 للكرة: الكرة [ل] – 15 دائرة: ناقصة [ل] – 17 ز ل ط م: ز ل هـ م [ط، ل] / فخط ل م: ناقصة [ل] / قطر الدائرة: قطرًا لدائرة [ط] – 18 فزاوية: وزاوية [ل] – 19 هي ... إلى ل ك: مكررة [ل] – 20 هـ ا د: ا د [ط] – 21 ا د (الأولى): ا جـ [ط، ل] – 22 مربعي (الأولى والثانية): مربع [ل] – 23 مساوٍ: مساويان [ط].

ضرب هـ د في د جـ مساويًا لمربع ز ل، وضرب م ل في ل ك مساوٍ لمربع ز ل، فضرب هـ د في د جـ مساوٍ لضرب م ل في ل ك؛ ود جـ مثل ل ك، فخط د هـ مثل خط ل م؛ ول م قطر الكرة، فخط د هـ مساوٍ لقطر الكرة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ولأن زاوية د ا هـ قائمة وا جـ عمود على د هـ، يكون ضرب هـ جـ في جـ د مساويًا لمربع ا جـ. فإذا قسم مربع ا جـ على خط جـ د، كان الذي يخرج من القسمة هو خط جـ هـ. فإذا أضيف إليه خط جـ د، كان الجميع خط د هـ الذي هو مساوٍ لقطر الكرة.

فهذا الذي شرحناه هو الطريق إلى مساحة جميع الأجسام التي تستعمل في صناعة المساح.

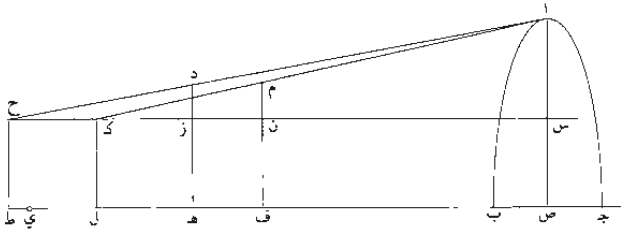
وقد بقي أن نبيّن كيف نستخرج ارتفاعات الأجسام، إذا كان ارتفاعها مجهولاً، كانت الأجسام أساطين مستديرة أو أجسامًا مستقيمة الأضلاع أو جدرانًا أو أبنية أو جبالاً لا يوصل إلى رؤوسها ولا إلى مساقط أعمدتها. والطريق إلى ذلك هو أن نتخذ عودًا مستقيمًا طوله ليس بأقلّ من خمسة أذرع،/ ثم يقدر من طرفه ذراع واحد بذراع التقدير، ل – ١٣٣ – ظ ثم يتعلم على نهاية الذراع علامة في العود بيّنة، دائرة حول العود، ثم يؤخذ خيط في طرفه شاقول ثقيل. فيلزم المعتبر موضعًا من الخيط، ويقف قائمًا، ويلصق الخيط بإحدى عينيه، ويرسل الشاقول، ويزيد في الخيط وينقص إلى أن يصير نهاية الشاقول على سطح الأرض. فحينئذٍ يتعلم على الموضع من الخيط الملاصق بعينه ‹علامة›. ثم يلصق هذا الخيط بالعود المستقيم، ويجعل العلامة التي في الخيط على العلامة التي في العود التي هي نهاية الذراع المقدر من العود؛ ثم يمدّ الخيط الذي يلي الشاقول، ويلصقه بالعود، ويلزم الشاقول باليد الأخرى ويمدّ الخيط في طول العود؛ ثم يتعلم على الموضع من العود الذي ينتهي إليه نهاية الشاقول علامة بينة باقية، دائرة حول العود، فتبقى من العود بقية لأن قامة الإنسان مع الذراع مجموعين أقل من خمسة أذرع. فإذا أراد المعتبر أن يستخرج ارتفاع جسم من الأجسام أو عمود ‹جبل› من الجبال، فليقف على وجه الأرض في قبالة الجسم

1-2 مساويًا ... ود جـ: مكررة [ل] – 3 مساوٍ: يكون ضرب مساو، ثم ضرب على «ضرب» بالقلم [ل] – 5 فإذا: وإذا [ل] – 6 جـ هـ: د هـ [ط، ل] – 10 أجسامًا: اجسام [ط، ل] / جدرانًا: جدران [ط، ل] / جبالاً: جبال [ط، ل] – 11 نتخذ: نجد [ل] – 12 طوله: طيويله [ل] / يقدر: يقدم [ل] / طرفه: طرف [ل] – 13 العود (الأولى): العمود [ل] / خيط: خط [ل] – 14 طرفه: طرف [ل] / موضعًا: موضع [ل] / الخيط: خيط [ل] / ويلصق: يلتصق [ل] – 15 ويزيد: نزيد [ل] / الخيط: الخط [ل] – 16 بعينه: لعينه [ط، ل] / هذا الخيط: هذه الخط [ل] – 17 المستقيم: المستقيمة [ل] / العلامة (الثانية): علامت [ل] – 18 الذراع: الذاراعة [ل] / يمدّ: عدد [ل] – 19 طول: ناقصة [ط] – 22 جسم: الجسم [ل].

الذي يريد استخراج ارتفاعه، ثم يغرز العود في الأرض، ويجعل الذراع المقدر مما يلي أعلى العود، ويغمس العود في الأرض إلى أن يغيب منه / ل-١٣٤-و البقية التي كانت بقيت منه بعد التقدير، ويُعَدِّل العود إلى أن يقوم على سطح الأرض قيامًا معتدلاً لا ميل فيه. فإذا انتصب العود واعتدل، تأخر المعتبر إلى ورائه، ونظر إلى الجسم الذي يريد ارتفاعه، ويعين على موضع مخصوص منه – إن كان مخروطًا فنقطة رأسه، وإن كان جدارًا أو أسطوانة أو جبلاً فعلى موضع مخصوص منه – ثم يتقدم ويتأخر، ويميل يمنة ويسرة، وينظر في تضاعيف هذه الحال إلى رأس العود وإلى الموضع الذي عين عليه إلى أن يراهما معًا؛ فإذا رآهما معًا، ستر إحدى عينيه ونظر بالعين الأخرى وحدق إلى رأس العود. فإذا حدق إلى رأس العود، فلا بدّ أن يرى الجسم الذي يريد ارتفاعه، لأنه من وراء العود وعلى سمت العود. فإذا رأى الجسم المرتفع، وهو محدق إلى رأس العود، مال يمنة ويسرة، وتقدم وتأخر، وعدل قامته نهاية التعديل إلى أن يرى الموضع الذي عين عليه من الجسم مع رأس العود الذي هو محدق إليه، ولا يرى مع رأس العود ومسامتًا / ط-٣٠-و لرأس العود غير ذلك الموضع. وتكون رؤيته لهما بإحدى عينيه؛ فحينئذٍ يثبت رجله التي تلي العين التي نظر بها، ثم يجلس ويضع إصبعه على الموضع من سطح الأرض الذي تحت وسط قدمه التي تلي العين التي نظر بها، ثم / ل-١٣٤-ظ يزيل رجله عن الموضع، ويتعلم على هذا الموضع علامة بينة باقية إما بعود صغير يغرسه في الموضع، وإما بحفر صغير يحفره فيه. فإذا فعل ذلك، خطّ حينئذٍ على سطح الأرض خطًا مستقيمًا من موضع العلامة إلى أصل العود القائم، ثم يقدر هذا الخط بذراع التقدير، ويكون الذراع مقسومًا بأجزاء وبأصغر ما يمكن من الأجزاء، ثم يحفظ مقدار الخط ويثبته، ثم يقتلع العود من موضعه، ويخرج الخط المستقيم الذي خط في الأرض على استقامة إلى جهة الجسم الذي يطلب ارتفاعه، ثم يتعلم على موضع من هذا الخط المستقيم علامة، ثم يقيم العود على هذه العلامة ويغرزه في الأرض إلى أن يغيب منه مقدار البقية التي في أسفله، ويعدل قيامه إلى أن ينتصب ويقوم قيامًا معتدلاً؛ ثم يتأخر ويجعل قدمه على الخط المستقيم المخطوط في سطح الأرض. وينظر إلى

3 معتدلا: معتدالا [ل] – 5 رأسه: راس [ل] / جدارا: جدار [ل] / أسطوانة: سطوان [ل] – 6 يمنة: ناقصة [ط] – 7 فإذا: فاذ [ط] فاذاا [ل] – 8 ستر: فاذا ستر [ط] / إحدى: احد [ل] / فإذا: واذ [ط] – 9 بدّ: بث [ل] – 9-10 وعلى ... رأس العود: ناقصة [ل] – 10 ويسرة: ويسراه [ل] – 13 نظر: بظهر [ط] – 14 ويضع: ويقع [ل] – 15 ويتعلم: وعلم [ل] / هذا: هذ [ل] – 16 بعود: مكررة [ل] / وإما: فاما [ل] / بحفر: لحفر [ل] / يحفره: يحفر [ل] / خطّ: الخط [ل] – 18 الخط: الخطه [ل] – 19 موضعه: الموضع [ل] – 20 خط: خطه [ط] / استقامة: استقامته [ط] / جهة: جهتي [ل] / يطلب: يطب [ل] – 21 هذا: هذه [ل] – 21-23 علامة ... المستقيم: ناقصة [ل].

الموضع الذي عين عليه من الجسم المرتفع، ويتقدم ويتأخر، ويتيامن ويتياسر، ويستر العين التي كان سترها في الدفعة الأولى، وينظر بالعين التي نظر بها أولاً، ويحدق إلى رأس العود إلى أن يرى رأس العود والموضع الذي عين عليه من الجسم المرتفع معًا. فإذا رآهما معًا، أثبت قدمه التي تلي العين التي نظر بها، وجلس وتعلم على موضع وسط قدمه من سطح الأرض علامة بينة باقية. ثم قدر الخط الذي بين هذه العلامة وبين موضع العود بذراع التقدير، وحفظ المقدار وأثبته. فإذا / تحصل له المقداران المذكوران، قدر أيضًا ما بين موضع قدمه في الاعتبار الأول وبين موضع قدمه في الاعتبار الثاني، وحفظ هذا المقدار أيضًا وأثبته، ثم ينقص المقدار الثاني من المقدار الأول. وليس يكون الثاني إلا أقلّ من الأول وسنبيّن ذلك من بعد. فإذا نقص الثاني من الأول، بقيت من الأول بقية، فيحفظ هذه البقية، ثم يقسم المقدار الذي بين موضعي قدمه على هذه البقية، فما خرج من القسمة أضاف إليه المقدار من العود المقدر بخيط الشاقول، فما يحصل فهو ارتفاع الجسم المطلوب ارتفاعه، جبلاً كان أو غيره. ل – ١٣٥ – و



والبرهان على هذا العمل هو أن نجعل الجبل أو الأسطوانة أو المخروط أو الجسم الذي نريد أن نعرف ارتفاعه ا ب جـ، وليكن العود الذي أقمناه على سطح الأرض في الدفعة الأولى خط د هـ، وليكن الذراع المقدر منه د ز، والمقدر من العود بخيط الشاقول ز هـ، وتكون بقية العود غائصة في الأرض. ولتكن قامة الإنسان المعتبر ح ط، ولتكن نقطة ح موضع عينه التي اعتبر بها ونقطة ط موضع وسط قدمه، وليكن الموضع الذي عين عليه

1 الموضع : موضع [ل] / ويتقدم : ويقدم [ل] / ويتيامن ويتياسر: ويتامن ويتاسر [ل] – 3 فإذا رآهما: وإذا اراهما [ل] – 4 تلي : ناقصة [ل] – 5 باقية: ثابتة [ط] باسه [ل] / قدر: يقدر [ل] – 7 قدمه : العلامات التي ابته عند القدمه [ل] / الاعتبار: العتبار [ل] – 11 بخيط : بخط [ل] – 12 جبلا: جبل [ط. ل] – 13 والبرهان: وبرهان ذلك [ل] – 14 أن: ناقصة [ل] – 15 د ز: د ه [ل] / والمقدر: والمقد [ل].

من الجسم المرتفع نقطة ا. ونخرج شعاع البصر / الخارج من نقطة ح المارّ بطرف العود ل - ١٣٥ - ظ
الذي هو نقطة د وبنقطة ا التي هي الموضع المعين من الجسم، وليكن شعاع ح د ا؛
فيكون ح د ا خطًّا مستقيمًا لأن شعاع البصر لا يخرج إلا على خط مستقيم، ‹و›قد تبيّن
ذلك في كتاب *المناظر*. وليكن ‹خط› ط هـ الخط المخطوط في سطح الأرض، وليكن
العود في الحال الثانية خط م ف، وليكن الذراع المقدر منه م ن، فيكون ن ف هو المقدر
منه بخيط الشاقول. وليكن الإنسان المعتبر في الحال الثانية كـ ل؛ ونخرج شعاع كـ م ا،
فيكون خطًّا مستقيمًا. فلأن ح ط كـ ل ز هـ ن ف أعمدة على سطح الأرض، يكون
جميعها متوازية، وأريد بهذه الأعمدة ‹الأعمدة على› الخطوط المستقيمة التي تصل بين
النقط المتوسطة للمواضع / المذكورة. ولأنها قائمة على خط واحد مستقيم، يكون جميعها ط - ٣٠ - ظ
في سطح واحد مستوٍ؛ ولأن جميعها مقدر بخيط الشاقول، يكون جميعها متساوية، فالخط
الذي يمرّ بنقط ح كـ ز ن هو خط واحد مستقيم موازٍ لخط ط ف. فلنخرج هذا الخط،
وليكن خط ح كـ ز ن. ونتوهم خطًّا خارجًا من نقطة ا موازيًا لخطوط ح ط كـ ل ز هـ
ن ف المتوازية، وليكن خط ا ص. فهذا الخط عمود على سطح الأرض، لأنه موازٍ
للخطوط المذكورة / التي هي أعمدة على سطح الأرض. وهذا الخط يلقى خطي ح ن ل - ١٣٦ - و
ط ف إذا أخرجا على استقامة، لأن خط ا ص موازٍ لخطي ح ط د هـ وخارج من نقطة
ا التي ‹هي› من خط ح ا الذي هو في سطح خطي ح ط د هـ، فخط ا ص هو في
سطح خطي ح ط د هـ، وهما ‹متوازيان و›خطا ح ن ط ف هما في سطح هذين الخطين
المتوازيين، فخط ا ص يلقى خطي ح ن ط ف إذا أخرجا على استقامة. ولنتوهم خطي
ح ن ط ف خارجين على استقامة، وليلقهما خط ا ص، وليكن لقاء خط ا ص لخط
ح ن على نقطة س، وليكن لقاؤه لخط ط ف على نقطة ص. فلأن خط ا س موازٍ لخط
د ز، تكون نسبة ح ز إلى ز د كنسبة ح س إلى س ا لتشابه مثلثي ح ز د ح س ا. ولأن
خط ا س موازٍ لخط م ن، تكون نسبة م ن إلى ن كـ كنسبة ا س إلى س كـ؛ وم ن مثل
د ز لأن كل واحد منهما هو ذراع واحد، فنسبة د ز إلى ن كـ كنسبة ا س إلى س كـ؛

1 شعاع: شاعاع [ل] – 2 د: ناقصة [ل] / الموضع: موضع [ل] – 4 كتاب: كتب [ط] / ط هـ: ط هـ ف [ط] – 5 المقدار (الثانية): مقدار [ل] – 9 المتوسطة: المتواسطة [ل] – 11 بنقط: بنقطة [ط، ل] / ز: د [ط] / خط: خطا [ل] / واحد: ناقصة [ط]، هذا: هذه [ل] – 13 فهذا: فهذ [ل] – 14 المذكورة: المذكورت [ل] / وهذا: وهذه [ل] – 15-17 وخارج ... ح ط د هـ: مكررة [ل] – 16 خط: نقطة في التكرار [ل] / هو (الأولى): هي، في التكرار [ل] – 17 خطي: ناقصة في التكرار [ل] / خطا: خط [ل] – 17-18 هما ... ط ف: ناقصة [ل] – 20 ح ن: ا ن، ونجد الصواب في الهامش [ط] – 22-23 وم ن ... س كـ: ناقصة [ل].

ففي نسبة المساواة تكون نسبة ح ز إلى ن ك كنسبة ح س إلى س ك. وح س أعظم من س ك، فخط ح ز أعظم من خط ن ك؛ وح ز مثل ط هـ لأن سطح ح ط هـ ز متوازي الأضلاع، وخط ك ن مثل خط ل ف، فخط ط هـ / أعظم من خط ل ف وهو الذي ل – ١٣٦ – ظ أدعينا من قبل أنه سيتبين.

فنجعل ي هـ مثل ل ف، فتكون نسبة ط هـ إلى هـ ي كنسبة ح ز إلى ن ك؛ ونسبة ح ز إلى ن ك هي نسبة ح س إلى س ك، فنسبة ط هـ إلى هـ ي هي كنسبة ح س إلى س ك. وإذا قلبنا ‹وركبنا›، كانت نسبة س ح إلى ح ك كنسبة هـ ط إلى ط ي. وإذا بدلنا كانت نسبة س ح إلى ط هـ كنسبة ح ك إلى ط ي. وح ك مثل ط ل لأن سطح ح ط ل ك متوازي الأضلاع، فنسبة س ح إلى ط هـ كنسبة ل ط إلى ط ي، فضرب هـ ط في ط ل مساوٍ لضرب س ح في ط ي.

وأيضاً، فإن نسبة ح ز إلى ز د هي كنسبة ح س إلى س ا، فضرب ح س في ز د مساوٍ لضرب ا س في ح ز؛ وضرب ح س في ز د هو ح س لأن ز د هو واحد، فضرب ا س في ح ز مساوٍ لمقدار ح س، وضرب ح س في ط ي مساوٍ لضرب هـ ط في ط ل، فضرب ا س في ح ز، ثم ما اجتمع في ط ي مساوٍ لضرب هـ ط في ط ل. وح ز مثل ط هـ، فضرب ا س في ط هـ، ثم ما اجتمع في ط ي مساوٍ لضرب هـ ط في ط ل. وضرب الأعداد بعضها في بعض بالتقديم والتأخير متساوٍ، فضرب ا س في ط ي ثم ما اجتمع في ط هـ مساوٍ / لضرب ل ط في ط هـ؛ فمقدار ط هـ ‹إذا› ارتفع مشتركًا، ل – ١٣٧ – و يكون ضرب ا س في ط ي مساويًا لمقدار ط ل. فإذا قسم ط ل على مقدار ط ي، كان الذي يخرج من القسمة هو ا س؛ وس ص مثل ز هـ المقدار لخيط الشاقول، وهـ ي مثل ل ف الذي هو المقدار الثاني، وهـ ط هو المقدار الأول، فخط ط ي هو البقية التي هي زيادة المقدار الأول على المقدار الثاني، وط ل هو المقدار الذي بين موضعي قدم المعتبر. فإذا قسم مقدار ط ل الذي هو مقدار ما بين موضعي قدم المعتبر على ط ي الذي هو زيادة المقدار الأول على المقدار / الثاني، وأضيف إلى ما خرج من القسمة مقدار ز هـ ط – ٣١ – و الذي هو مقدار خيط الشاقول، كان الذي يجتمع هو ا ص الذي هو ارتفاع جسم

3 خط (الثانية): ناقصة [ل] – 5 إلى هـ ي: التي هي هي [ل] – 6 كنسبة: نسبة [ط] – 7 س ك: س ك ه [ل] / قلبنا: اقبلنا [ل] – 8 ط ي (الأولى): ط ي ه [ل] – 9 سطح: سح [ل] / ل ط: لطه [ل] / ط ي: ط ي ه [ل] – 16 بالتقديم والتأخير: التقديم وتاخير [ل] – 17 لضرب: ليضرب [ل] / ل ط: ا ط [ط] / ارتفع مشتركًا: ارتفاع مشترك [ط] ارتفاع المشترك [ل] – 18 يكون: فيكون [ل، ط] – 19 لخيط: بخيط [ل] – 22 موضعي: موضوعي [ل] – 23 خرج: يخرج [ل].

ا ب جـ المطلوب ارتفاعه، لأن ا ص ‹عمود› على سطح الأرض؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

فقد أتينا على شرح كيفيات جميع مساحات المقادير المستعملة في صناعة المساح ببراهينها وعللها؛ وذلك ما قصدنا بالتنبيه في هذا القول. ولأن المستعمل من جميع ما ذكرناه في صناعة المساحة هو العمل فقط، / ولأن المساح ليس يستعملون في شيء من (ف-١٥٩-ظ) المساحات شيئًا من البراهين، وجب أن / يقتص من جملة ما شرحناه في هذا القول (ل-١٣٧-ظ) الأعمال التي ذكرناها لتكون متيسرة متسهلة على من أراد أن يقتبس صناعة المساحة وينتفع بأعمالها.

اقتصاص أعمال المساحة المذكورة في هذا القول (د-١٣-ظ)

جميع الأشكال المسطحة التي يستعمل المساح مساحتها هي الأشكال المستقيمة الخطوط والدوائر وقطعها. وجميع الأشكال المجسمة التي يستعمل المساح مساحتها هي الأجسام المستقيمة الخطوط / والأساطين المستديرة والمخروطات المستديرة والأكر. (ف-١٦٠-و)

ومساحة جميع الأشكال المسطحة المستقيمة الخطوط ترجع إلى مساحة المثلثات واستخراج أوتار الزوايا التي بها تنقسم السطوح بمثلثات. ومساحة جميع المثلثات تكون بأن تجمع أضلاع المثلث ويؤخذ نصف ما اجتمع، ثم يضرب النصف في زيادته على ضلع من أضلاع المثلث، ثم يضرب ما خرج في زيادة النصف على ضلع آخر من أضلاع المثلث، ثم يضرب ما خرج في زيادة النصف على الضلع الباقي من أضلاع المثلث، فما اجتمع أخذ جذره وهو مساحة المثلث.

واستخراج أوتار الزوايا يكون بأن يفصل من أحد الضلعين المحيطين بالزوايا ذراع / واحد، ثم يقسم مقدار الضلع الآخر على مقدار الضلع الأول، فما خرج من القسمة، (ل-١٣٨-و)

4 بالتنبيه: ليتنبه [ل] بالتبينة [ط] ، ولأن: فلان [ل] / من: في [ل] – 5 فقط: فقد [ل] / ولأن: بداية مخطوطة فاتح [ف]، ونجد قبلها «فصل من أصول المساحة لأبي علي الحسن بن الحسن بن الهيثم وذكرها بالبرهان قال» – 5-6 في شيء من المساحات: فيها [ف] – 6 المساحات: المساحة [ل] / يقتص: ينقص [ل] / هذا: هذه [ل] – 7 متسهلة: ناقصة [ف] – 8 وينتفع: وينفع [ل] ناقصة [ف] – 9 اقتصاص: «بسم الله الرحمن الرحيم اللهم أعن ووفي ... عافية ما أورده الشيخ أبو علي الحسن بن الحسن بن الهيثم المصري رحمه الله تعالى في آخر رسالة له في المساحة. قال اقتصاص»، وهي بداية مخطوطة [د] اقصاص [ل] / اقتصاص ... القول: ناقصة [ف] – 10 المساح: المساحة [ل] / الأشكال: الاجسام [ل] – 11-12 والدوائر ... الخطوط: ناقصة [ف] – 11 المساح: المساحة [ل] – 12 والأساطين: والاساطين المستقيمة [ف] / والأكر: والاكره [ل] – 13 المسطحة: ناقصة [د] – 17 ثم يضرب ... المثلث: ناقصة [ف] / الضلع: ضلع [ل] / أضلاع: اضلاعه [ل] – 17-18 فما اجتمع أخذ: فما خرج أخيرًا يؤخذ [د] – 19 بالزوايا: بالزاوية [د، ط، ل، ف] – 20 واحد: ناقصة [ف] / فما خرج: فخرج [ف].

فصل من الضلع الآخر مثله، ويوصل بين الفصلين بخط مستقيم، ويقدر هذا الخط، فما حصل من تقديره ضرب فيه مقدار الضلع الأول، فما خرج فهو الوتر.

ومساحة الدوائر تكون باستخراج قطر الدائرة، ثم يضرب القطر في مثله وينقص من مربعه سبع المربع ونصف سبعه، فما بقي فهو مساحة الدائرة.

واستخراج قطر الدائرة، إذا كان القطر مجهولاً، يكون بأن يخرج فيها وتر كيفما اتّفق، ويقسم بنصفين، ويخرج من وسطه عمود إلى القوس التي فصلها ذلك الوتر، ثم يقدر نصف الوتر ويقدر العمود، ثم يضرب مقدار نصف الوتر في مثله ويقسم ذلك على مقدار العمود، فما خرج من القسمة أضيف إليه العمود، وهو قطر الدائرة.

ومساحة قطاع الدائرة هو ضرب ضلعه في نصف قوسه. ومساحة قطعة الدائرة هو بأن يُتمم قطاعًا، ويمسح القطاع، ثم يمسح مثلث القطاع، وينقص من مساحة القطاع، فما بقي فهو مساحة القطعة. /

واستخراج نسبة القوس إلى محيط الدائرة يكون بأن يوتر القوس، ويقسم وترها د-١٤-و
بنصفين، ويخرج من وسطه عمود إلى القوس، ويوصل بين طرف / الوتر وطرف العمود ل-١٣٨-ظ
بخط مستقيم، ويخرج على استقامة. ثم يقام على طرف الوتر الذي أخرج منه الخط خط على زاوية قائمة، ويجعل هذا الطرف مركزًا، ويدار ببعد الطرف الآخر من الوتر أو ببعد جزء من الوتر قوس من دائرة إلى أن تقسم هذه القوس الخطين المستقيمين الخارجين من طرف الوتر. ثم تقدر القوس التي فصلها الخط الأوسط بمقدار يقدر جميع القوس التي هي ربع دائرة، فتحصل بذلك نسبة القوس الصغرى إلى ربع الدائرة، فتكون تلك هي نسبة القوس الأولى إلى محيط دائرتها.

ومساحة جميع الأجسام المستقيمة الخطوط ترجع إلى مساحة المخروطات، ومساحة المخروط تكون بأن تمسح قاعدته، ويُضرب ذلك في ثلث ارتفاعه، فما خرج فهو مساحته.

2 فيه: في [ط، ف، ل] غير واضحة [د] / مقدار: امقدار [ط] / فما خرج: أثبتها في الهامش [د] – 3 الدوائر: الدائرة [د، ل] / قطر الدائرة: قطرها [د] / القطر: ناقصة [د] – 4 مربعه: مربع [ل] / المربع: ناقصة [د] – 5 قطر: ناقصة [ف] / القطر: ناقصة [د] – 6 عمود: عمودا [ف] – 7 العمود: كتبها «العامود»، ولن نشير إليها فيما بعد [د] / ذلك: ناقصة [ط، ل، ف] – 8 إليه: إلى [د] – 9 ومساحة: واما مساحة [ط] / الدائرة: ناقصة [ف] / بأن: ان [ط، ف] – 10 يتمم: سهم [ل] / القطاع: مطموسة [د] – 13 وطرف: وران [ل] – 14 على (الثانية): ناقصة [ل] / خط: ناقصة [ط] – 14-15 الخط خط على: ناقصة [د] – 15 ببعد (الثانية): بعد [ل] – 16 دائرة: الدائرة [ل] / أن: ناقصة [ط] / تقسم: ينقسم [ل] / هذه: هذا [ف] – 17 فصلها: وصلها [ل] / الأوسط: اوسط [ل] – 18 فتحصل: فيتحصل [د، ل] / هي: ناقصة [د، ف] – 19 الأولى: الاول [ل] – 21 ذلك: ناقصة [ط، ل، ف] / ارتفاعه: ناقصة [ف] / مساحته: مساحة [ل].

ومساحة قاعدة المخروط، إن كانت القاعدة مثلثًا،/ هو كمساحة المثلثات؛ وإن كانت القاعدة كثيرة الأضلاع، فبأن تقسم بمثلثات، وقسمتها بمثلثات تكون باستخراج أوتار الزوايا. ط – ٣١ – ظ

واستخراج أوتار زوايا قاعدة الجسم، مخروطًا كان أو غيره، يكون باستخراج زاوية مساوية لزاوية القاعدة في سطح مستو، وذلك يكون بأن نعتمد مسطرتين، فيلصق إحداهما بأحد ضلعي القاعدة، ويخرج طرف هذه المسطرة عن الزاوية، ثم نلصق المسطرة الأخرى بالضلع / الآخر المحيط بالزاوية، ثم يخطّ مع نهاية هذه المسطرة خط في سطح المسطرة الأولى، ثم نجعل المسطرة الأولى في سطح مستو، ونركب المسطرة الثانية على الخط المخطوط في المسطرة الأولى، ثم نخط مع نهايتي المسطرتين، أعني النهايتين الداخلتين، خطين مستقيمين، فتحدث في السطح المستوي زاوية هي مساوية لزاوية قاعدة الجسم؛ فيستخرج وتر هذه الزاوية بالطريق الذي تقدم في استخراج أوتار الزوايا، فيكون هذا الوتر هو وتر زاوية قاعدة الجسم. وإن كانت قاعدة الجسم في سطح مستوٍ متصل، أخرج ضلعا القاعدة على استقامة، فإنه تحدث خارج الجسم زاوية مساوية لزاوية قاعدة الجسم. فيعمل فيها مثل ما عمل في الزاوية التي تقدم ذكرها، فإنه يتحصل بذلك الوتر المطلوب. ل – ١٣٩ – و

ومساحة الأسطوانة المستديرة تكون بأن تمسح قاعدتها، وتضرب في ارتفاعها؛ فإن كانت الأسطوانة قائمة على قاعدتها على زوايا قائمة، فارتفاعها هو طولها؛ وإن كانت مائلة، فاستخراج ارتفاعها / يتبين فيما بعد. د – ١٤ – ظ

واستخراج مساحة قاعدتها يكون بأن يقدر محيط قاعدتها، فما حصل من مقداره قسم على ثلاثة وسبع، فما خرج فهو قطرها. فإذا تحصل قطرها، استخرجت مساحتها / على ما ذكرناه من قبل. ل – ١٣٩ – ظ

1 مثلثًا: مثلث [ف] / هو: ناقصة [ف] / كمساحة: مساحة [ل] – 2 كثيرة: كثير [ل] / وقسمتها بمثلثات: ناقصة [ط، ف، ل] / باستخراج: استخراج [ط] – 3-4 الزوايا ... باستخراج: أثبتها في الهامش [د] – 4 زوايا: الزوايا [ط] / مخروطًا: مخروط [ل، ف] / أو غيره، يكون: مطموسة [د] – 6 بأحد ضلعي: احد ضلع [ل] / الزاوية: زاوية [ل] / ثم: ناقصة [ل] – 7 يخطّ: نحيط [ل] / خط: خطًا [د] – 8 ثم نجعل المسطرة الأولى: ناقصة [ف] – 9 المسطرتين [د] / نخط: نحيط [ل] / نهايتي: نهاية [ل] – 10 خطين: ناقصة [ف] / السطح: سطح [ل] الخط [د] – 11 فيستخرج: فيخرج [د] / الذي: التي [د] / أوتار الزوايا: الاوتار [د] / الزوايا: زوايا [ل] / هذا: قاعدة [ل] – 12 قاعدة (الأولى): ناقصة [د] / الجسم (الثانية): الجسم خط [ف] / ضلعا: ضلعي [د] – 13 الجسم (الأولى والثانية): الجسم [ل] – 14 فيها: بها [د] / الزاوية: زاوية [ل] / الوتر: ناقصة [د] – 15 في: ناقصة [د] / فإن: ان [ط، ل] – 16 هو طولها: مطموسة [د] – 17 فاستخراج: فاستخرج [ل] / ارتفاعها: مطموسة [د] / فيما: من [ط، ل، ف] – 18 بأن: ان [ل] / مقداره: مقدارين [ل] – 19 قسم: تقسم [د] / على: ناقصة [ل] / خرج: حصل [د] / فهو: فهي [ف] ناقصة [ل] / قطرها (الثانية): قطره [ل] / استخرجت: استخرج [د] – 20 ذكرناه من قبل: ذكرنا بين نصل ومساحة ومساحة الكرة يكون؛ نهاية مخطوطة [ل] / ذكرناه: ذكرنا [د].

ومساحة المخروط المستدير تكون بأن تمسح قاعدته، ثم تضرب مساحة القاعدة في ثلث ارتفاعه، / فما خرج فهو مساحته. ف-١٦٠-ظ

ومساحة الكرة تكون بأن تستخرج مساحة أعظم دائرة تقع فيها، ثم تضرب مساحة هذه الدائرة في ثلثي قطرها، فما اجتمع فهو مساحة الكرة.

واستخراج قطر الكرة يكون بأن نرسم في سطح الكرة دائرة كيفما اتّفق ببركار، نجعل إحدى رجليه على سطح الكرة ونخط بالرجل الأخرى دائرة على سطح الكرة، ثم نرسم على محيط هذه الدائرة نقطتين، فتنقسم الدائرة بقوسين، فنقسم كل واحدة من هاتين القوسين بنصفين ببركار آخر، يُقدر به محيط هذه الدائرة. فإذا انقسمت كل واحدة من القوسين بنصفين، فقد انقسم المحيط بنصفين، فنجعل إحدى رجلي البركار الثاني على إحدى النقطتين المتقابلتين، ونفتح الرجل الأخرى إلى أن تصير على النقطة المقابلة لها، ثم نثبت رجلي هذا البركار في سطح مستو، ونتعلم برجليه علامتين، ثم نوصل بين العلامتين بخط مستقيم، ويُخرج من وسط الخط عمود على الخط، ثم نجعل إحدى رجلي البركار الأول على طرف الخط المقسوم، ونحرك الرجل الأخرى إلى أن تلقى العمود، ثم نتعلم على موضع رجله من العمود نقطة، ونقدر نصف الخط المقسوم، ونقدر ما انفصل من العمود؛ ونضرب مقدار نصف الخط في مثله، ونقسم ذلك على مقدار العمود، فما خرج أضيف إليه العمود، فما اجتمع فهو قطر الكرة. فإذا حصل قطر الكرة ضرب في مثله، ونقص منه سبعه ونصف سبعه، فما بقي فهو مساحة أعظم دائرة تقع في الكرة. ثم نضرب هذا الذي هو مساحة الدائرة في ثلثي قطرها، فما خرج فهو مساحة الكرة.

فأما استخراج أعمدة المخروطات والأساطين والجبال والجدران وجميع الأجسام المرتفعة، فإنه يكون بأن يعتمد عود مستقيم طوله ليس بأقلّ من خمسة أذرع بذراع التقدير؛ ثم يقدر منه ذراع واحد بذراع التقدير، ويتعلم على نهاية الذراع علامة / بيّنة حول رأس د-١٥-و العمود، ثم يأخذ المعتبر خيطًا في طرفه شاقول، فيلزم الخيط بيده ويقف واقفًا، ويلصق/ موضعًا من الخيط بإحدى عينيه، ثم يرسل الخيط ويزيد فيه وينقص إلى أن يمسّ الشاقول ط-٣٢-و

2 مساحته: مساحة [ط] – 3 بأن تستخرج: باستخراج – 4 اجتمع: خرج [د] – 5 نجعل: حصل [ف] – 6 ثم نرسم: ونرسم [د] – 7 فتنقسم: لتقسم [د] / واحدة: واحد [د] / هاتين: ناقصة [ط، ف] – 8-9 ببركار ... بنصفين (الأولى): ناقصة [ف] – 8 انقسمت: انقسم [د] / واحدة: واحد [د] – 12 على الخط: ناقصة [د] – 14 ونقدر: ثم نقدر [د] – 15 ذلك: ناقصة [ط، ف] – 16 حصل: تحصل [ف] – 17 منه: من المربع [د] – 18 قطرها: القطر [د] – 19 فأما: واما [د] – 20 عود: عمود [ف] / عود مستقيم: عامودا مستقيما [د] – 20-21 أذرع ... التقدير: مطموسة [د] – 21-22 ويتعلم ... رأس العمود: ناقصة [ط، ف] – 21 حول رأس: واس حول [د] – 23 بإحدى عينيه: ناقصة [ف] / يرسل الخيط ويزيد فيه: يزيد في الخيط [ط، ف].

سطح الأرض، فحينئذٍ يتعلم على الموضع من الخيط الملتصق بعينه علامة؛ ثم يلصق هذا الخيط بالعود المستقيم، ويلصق العلامة بالعلامة التي في العود التي هي نهاية الذراع. ويمدّ الخيط باليد الأخرى إلى أن ينتهي طرف الشاقول إلى موضع من العود؛ فحينئذٍ يتعلم على الموضع من العود الذي عند نهاية الشاقول علامة، وتبقى من العود بقية، لأن خيط الشاقول والذراع مجموعين أقلّ من خمسة أذرع. فإذا أراد المعتبر أن يعرف ارتفاع جسم من الأجسام، فليقف في قبالة الجسم، ثم يغرز العود في موضع من الأرض متوسط بينه وبين الجسم المرتفع، ويجعل الذراع المقدر من العود يلي أعلى العود، ويغرز العود في الأرض إلى أن يغيب منه البقية التي كانت بقيت منه. ويعدل العود إلى أن يقوم على سطح الأرض قيامًا معتدلاً، ثم يتأخر عن العود وينظر إلى رأس العود وإلى رأس الشخص الذي يريد معرفة ارتفاعه، ويتعلم بعينيه موضعًا مخصوصًا من رأس الشخص إن لم يكن رأسه نقطة؛ ويستر إحدى عينيه وينظر بالعين الأخرى، ويحدق إلى رأس العود. ويتقدم ويتأخر، ويتيامن ويتياسر إلى أن يرى رأس العود والموضع الذي عين عليه من رأس الشخص معًا. فحينئذٍ يجلس ويجعل إصبعه على الموضع من الأرض الذي تحت وسط قدمه التي تلي العين التي ينظر بها، ويتعلم في الموضع علامة، ثم يخط خطًا مستقيمًا من هذه العلامة إلى أصل العود؛ ثم يقدر هذا الخط بذراع التقدير؛ وليكن الذراع مقسومًا بأجزاء وبأصغر ما يمكن من الأجزاء. ويثبت مقدار الخط ويحفظه. ثم يقتلع العود من موضعه؛ ويخرج الخط المستقيم المرسوم في سطح الأرض على استقامة إلى جهة الشخص، ثم يتعلم على هذا الخط علامة، ثم يجعل العود على هذه العلامة، ويجعل الذراع المقدر منه مما يلي أعلاه، ويغرز العود في الأرض إلى أن تغيب منه البقية التي كانت بقيت منه، ثم يتأخر المعتبر ويستر العين التي كان سترها وينظر بالعين الأخرى ويجعل قدمه التي تلي العين التي ينظر بها على الخط المستقيم المخطوط على سطح الأرض.

1 سطح الأرض: ناقصة [ف] – 2 بالعود: نجد في الهامش «بعود» [ط] هذا العود بخط مستقيم الخط المستقيم [ف] – 4 عند: عنده [د] – 6 في (الأولى): عن [د] – 7 ويغرز: ويغمس [ط، ف] – 8 يغيب منه: تغيب هذه [د] / البقية: البقيت [ط] / كانت: ناقصة [د] / منه: ناقصة [ف] – 9 سطح: ناقصة [د] – 10 معرفة: ناقصة [ط، ف] / ويتعلم: ناقصة [ف] / بعينيه: بعينه [ط] – 10-11 إن ... نقطة: ناقصة [د] – 11 نقطة: ناقصة [ف] / بالعين الأخرى: بالأخرى [ف] / ويحدق: وحدق [ط] – 12 يرى: برفى [ط] – 13 تحت: عند [د] – 14 قدمه: مكررة [ف] / التي: الذي [د، ف] / العين: عينيه [د] – 16 بأجزاء: ناقصة [ف] أجزاء [د] / وبأصغر: بأصغر [د] / ثم يقتلع: وتقلع [د] – 17 المرسوم: المستوي [د] – 18 ثم يجعل: ويجعل [د] – 19 مما يلي أعلاه: أعلى العود [د] / العود في ... منه: ناقصة [د] / البقية: البقيت [ط] – 20 ثم يتأخر المعتبر ويستر: في الأرض ثم يتقدم ويتأخر ويستر [د] / كان: كانت [ط، ف] – 21 التي (الأولى): الذي [ف] / المخطوط: المخفوط [ط، ف] مطموسة [د].

ويحدق/ إلى رأس العود إلى أن يرى رأس العود والموضع الذي عيّن عليه من رأس الشخص معًا، فحينئذٍ يجلس ويتعلم على الموضع الذي تحت وسط قدمه علامة، ثم يقدر الخط الذي بين هذه العلامة وبين أصل العود، وينقص هذا المقدار من المقدار الأول، فما بقي من الخط هو الجزء المقسوم عليه. ثم يقدر الخط الذي بين موضع قدمه في الحال الأولى وبين موضع قدمه في الحال الثانية، فما خرج قسم على البقية التي كانت حفظت، فما خرج من القسمة أضيف إليه المقدار من العود المقدر بخيط الشاقول، فما اجتمع فهو ارتفاع الشخص المطلوب ارتفاعه. د-١٥-ظ

فهذه الأعمال هي جميع ما يحتاج إليه المساح في صناعتهم. وهذا حين نختم هذا القول.

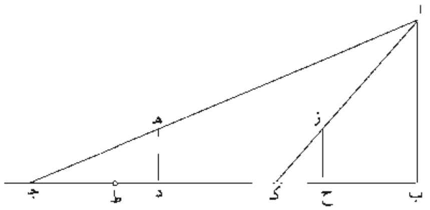
1 عين: ناقصة [ف] / من: ناقصة [ف] – 2 الموضع: الوضع [د] – 4 من الخط: بخط [ط، ف] بحفظه [د] / هو: وهو [ط، ف، د] – 5-4 في الحال الأولى: قد تقرأ «فما بقي في الحال الأولى»، ويكون تكرارًا لما قبلها [ف] – 5 الحال: الحر [ط] / الثانية: كتب بعدها «فما كان فيما بين قدمه في الحال ضربه (؟) الأولى وبين أصل العود في الحال الثانية»، وكتب «فيما ... الحال (الأولى)» في الهامش [د] / قسم: قسمه [د] / كانت: كان [د] – 6 حفظت: حفظها [د] / أضيف: اضاف [د] / المقدار من: أثبتها في الهامش [د] – 7 ارتفاعه: كتب بعدها «والله أعلم» [د] – 8-9 وهذا ... القول: والله أعلم بالصواب [د] – 9 القول: نجد بعدها «والله الموفق والمعين وهو حسبنا ونعم الوكيل وصلى الله على سيدنا محمد النبي المصطفى وعترته. تمت المقالة والحمد لله ربّ العالمين والصلاة على النبي محمد وآله أجمعين» [ط] «ختمت المقالات لابن الهيثم بلغ بصفر سنة سبع وثمانية ومائة بمدينة الموصل منها في الرباط المذكور والأخرى في دار الكتب المنسوب إلى أمير الدين الحارثي رحمه الله» [ف].

ا – ١ – ظ
ط – ١٩
ك – ٢٤٣ – ظ
ل – ٢٣٦

مقالة للشيخ أبي علي بن الهيثم

في معرفة ارتفاع الأشخاص القائمة وأعمدة الجبال وارتفاع الغيوم

نفرض أن ا ب ارتفاع جبل أو شخص، ونريد أن نعلمه.



فنقيم شخصًا على وجه الأرض مثل د هـ؛ وليتقدم / الناظر ويتأخّر حتى يرى رأس الشخص مع رأس الجبل، وليكن البصر في هذه الحال مثل نقطة جـ، والشخص مثل د هـ والشعاع مثل جـ ا، ونتوهم خط ب د جـ على وجه الأرض، فيكون نسبة جـ ب إلى ب ا كنسبة جـ د إلى د هـ. ثم نرفع شخص د هـ ونثبّته في موضع أقرب إلى الجبل مثل ح ز. وليتقدم الناظر ويتأخر حتى يرى رأس الشخص المنصوب مع رأس الجبل على مثال الأول، وليكن البصر في الثاني مثل ك والشعاع ك ز ا، فيكون نسبة ا ب إلى ب ك كنسبة ز ح إلى ح ك. / ولأن خط ب ك أصغر من خط ب جـ، يكون خط ح ك أصغر من خط جـ د. فنفصل من جـ د مثل ح ك، وليكن ط د. فيكون نسبة ط د إلى د هـ ك – ٢٤٤ – و ط – ٢٠

1 الرحيم: كتب بعدها «وبه نستعين» [ا] «ونستعين» [ط] – 2 للشيخ: الشيخ [ل] – 3 ارتفاع (الأولى): ناقصة [ط] – 4 نعلمه: غير واضحة، وأعاد كتابتها تحتها [ك] – 5 الناظر: النظر [ط] – 9 ح ز: ح [ط] مطموسة [ا] ح د [ل] – 10 ك ز ا: ك د ا [ط] – 11 ز ح: د ح [ل] / ح ك: حـ ك [ط] / خط (الثالثة): ناقصة [ك، ل] – 12 جـ د: د جـ [ا، ط] / ط د: د ط [ا، ط] / نسبة ط د: نسبته [ط].

هي كنسبة كـ ح إلى ح ز. ونسبة جـ ب إلى ب ا كنسبة جـ د إلى د هـ، ونسبة ا ب إلى ب كـ كنسبة / هـ د – المساوي لـ ز ح – إلى د ط المساوي لـ ح كـ. ففي نسبة المساواة، ل – ٢٣٧ تكون نسبة جـ د إلى د ط كنسبة جـ ب إلى ب كـ؛ وبالتفصيل نسبة جـ ط إلى ط د كنسبة جـ كـ / إلى كـ ب. ونسبة جـ ط إلى ط د كنسبة جـ كـ إلى كـ ب، ونسبة ط د ١-٢-و إلى د هـ كنسبة كـ ب إلى ب ا، ففي نسبة المساواة، يكون نسبة جـ ط إلى د هـ كنسبة جـ كـ إلى ا ب، فضرب كـ جـ في د هـ هو ضرب جـ ط في ا ب. فإذا ضُرب جـ كـ المعلوم في د هـ المعلوم – لأنه الشخص – وقُسم على جـ ط، كان الذي يخرج من القسمة هو ا ب؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

تمت المقالة والحمد لله ربّ العالمين والصلاة على نبيه محمد وآله الطاهرين.

1 ونسبة (الأولى): فنسبة [ا، كـ، ل، ط] – 2 هـ د: د هـ [ا، ط] – 4 ونسبة (الأولى): فنسبة [ا، كـ، ل، ط] – 6 فضرب: فنضرب [ا، ط] / ضُرب: ضربنا [ا، ط] – 9 تمت ... الطاهرين: ناقصة [ط] تمت المقالة بحمد الله ومنّه [ا] / الطاهرين: نجد بعدها (كـ–٢٤٤–ظ) «قال الحكيم الفاضل سعد الدين أسعد بن سعيد الهمذاني حرس الله ظله: نضرب ما بين الموقفين في المقياس ونقسم على ما بين الظلين من الموقفين، يحصل مقدار ارتفاع الشخص المطلوب ارتفاعه، والله (كتب بعدها «تعالى» [ل]) أعلم» [كـ، ل]؛ «لغيره. يضرب ما بين الوفقين (وكتب «الأفقين» في الهامش) في المقياس ويقسم على ما بين الظلين من الموقفين (وكتب «الأفقين» تحتها) تحصل مقدار الشخص المطلوب ارتفاعه» [ا]؛ «ارتفاع مقدار يضرب ما بين الأفقين (وكتب «الوفقين» في الهامش) في المقياس ويقسم على ما بين الظلين من الأفقين (وكتب «الوفقين» تحتها) تحصل مقدار الشخص المطلوب ارتفاعه» [ط].

١٨٧ – و

قول الحسن بن الحسن بن الهيثم
في استخراج أعمدة الجبال

إذا أراد مريدٌ أن يعرف ارتفاع جبل أو بنية عالية أو جسم من الأجسام المرتفعة، فليعمد إلى عود مستقيم الطول، وليكن طوله خمسة أذرع ونصف. وليقدّر من أحد طرفيه ذراعًا واحدًا، ويتعلم عند نهاية الذراع علامة بالسواد مستديرة حول العود بيّنة. ثم فليقدّر من العود ذراعًا أخرى تلي تلك الذراع، ويتعلم عند نهايتها علامة بالسواد مستديرة أيضًا بيّنة، وليكن التقدير بمسطرة مستقيمة طولها ذراع واحدة محدّدة، ولتكن هذه المسطرة مقسومة بستين جزءًا متساوية لتستعمل أجزاؤها فيما بعد. فإذا أراد أن يعرف ارتفاع جبل أو جسم مرتفع، فليعمد إلى موضع قريب من الجبل ولا يكون في غاية القرب، وليعتمد موضعًا مستويًا من الأرض أو قريبًا من المستوي، وليغرز العود في الأرض، وليجعله قائمًا على الأرض قيامًا معتدلاً، وليغمسه في الأرض إلى أن تصير العلامة الثانية المرسومة على العود مسامتة لبصره، ثم ليوثق أسفل العود حتى لا يميل ويبقى على اعتداله، ثم يتأخر ويستر إحدى عينيه، ولينظر إلى الجبل وإلى رأس العود، ويعلم على موضع متميّز من رأس الجبل، إما بجزء بارز منه أو صخرة أو بلون متغير بمقدار ما يعرف ‹به› الموضع إذا نظر إليه من بعد ذلك، ويتأخر ويتقدّم إلى أن يرى ذلك الموضع من الجبل ويرى رأس العود معًا، أعني أن يراهما على سمت واحد، وتكون الرؤية بإحدى العينين فقط. فإذا تحدد هذا الموضع، فليجلس ويتعلم على وسط موضع قدمه من الأرض علامة، أعني القدم التي تلي العين التي بها أدرك الجبل والعود معًا، وليغرز في الموضع عُويدًا / صغيرًا لئلا تندرس العلامة. ١٨٧ – ظ

2 بن (الأولى): ابن – 12 قيامًا: قيامًا قاما، ولعلها تكرير «قيامًا» مع التحريف – 17 سمت: صمت – 20 العلامة: كرر بعدها «المستديرة العليا التي هي العلامة»، وهي جزءًا من الجملة التالية.

ثم يأخذ شيئًا من الشمع بمقدار الجوزة، وليلصقه بإحدى جهتي العود القائم على موضع العلامة المستديرة العليا التي هي العلامة الأولى؛ ثم تتأخر وتستر إحدى عينيك وتنظر إلى الشخص الملصق بالعود وإلى الموضع المعين من رأس الجبل إلى أن ترى الموضع المعين من رأس الجبل وترى الشخص الذي من الشمع معًا، أعني على سمت واحد. فإذا تحدد هذا الموضع، يعلم أيضًا تحت وسط قدمه علامة، وليغرز فيها عويدًا صغيرًا أيضًا. فإذا فرغ من ذلك، فليقدّر المسافة التي بين العلامة الأولى من الأرض وبين العلامة الثانية، وليكن التقدير بالمسطرة المقسومة، وليحدّد هذا التقدير بأجزاء المسطرة، لأنه في أكثر الأحوال ليس يكون المسافة أذرعًا تامة فقط، بل تكون في الأكثر أذرعًا وأجزاءً من ذراع، وربما كانت أجزاء من ذراع فقط من غير أن يكون معها أذرع تامة. ثم تقدر المسافة الثانية التي بين العلامة الثانية من الأرض وبين العود القائم وتحدد هذه المسافة أيضًا نهاية التحديد. فإذا تحددت المسافتين، فإنك تجد أبدًا المسافة الأولى، أعني التي بين العلامتين اللتين في الأرض، أعظم من المسافة الثانية التي بين العلامة الثانية وبين العود.

فلتنقص المسافة الثانية من المسافة الأولى؛ فما بقي تحفظه، ثم تجمع المسافتين وتضرب ما اجتمع في المسافة الأولى؛ فما خرج من الضرب تقسمه على ما كان حفظ، فما خرج من القسمة اضعفه؛ فما حصل من / التضعيف، اقسمه على مجموع المسافتين؛ فما خرج ١٨٨-و زد عليه ثلاثة أذرع ونصف، فما حصل من ذلك، فهو ارتفاع الجبل أو الجسم المرتفع الذي التمس ارتفاعه، والذي يخرج من القسمة الأولى التي قبل الإضعاف فهي المسافة التي بين العلامة الأولى من الأرض وبين مسقط عموده؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

بلغ ‹مقابلته› على أصله.

تم بحمد الله ومنّه وصلاته
على خير خلقه محمد النبي وآله وسلم.

4 سمت: صمت – 5 قدمه: هده، ثم أثبت الصوب في الهامش – 7-12 ترك الناسخ فرغا للشكل لم يرسمه عند المقابلة التي قال أنه قام بها – 12-13 التي بين ... الثانية: أثبتها في الهامش.

الملحق الأوَّل

تقليد في البحث: المُسَبَّع المتساوي الأضلاع

تاريخ النصوص

لا يُمكن أن نفهم بعمق هذا الانتشار غير المسبوق للبحث في المسبَّع المتساوي الأضلاع، في الثلث الأخير من القرن العاشر، إذا قصرنا عملنا على رواية الأحداث وإعادة عرض طرائق العمل الهندسيّ؛ لقد أنـْجز ع. أنبوبا[١] جيِّداً هذا القسم من العمل. يتطلّب هذا الفهمُ المعمَّق إنجازَ مهمَّتين متلازمتين. يجب القيام في البداية بعمل توضيحيّ، لإعادة وضع هذا البحث ضمن آفاقه التاريخيَّة والتقنيّة. ولقد بيَّنّا، بعد إنهاء هذا العمل التوضيحيّ، أنَّ البحث في المسبَّع يظهر كجزء من فصلٍ كبير، قام بإعداده في ذلك العصر الهندسيّون والجبريّون، مكرَّس للأعمال الهندسيّة بواسطة القطوع المخروطيَّة على الأخصّ. ولقد وجب علينا، لكي نتابع كتابة هذا الفصل جزئيّاً على الأقلّ، ولكي نفهم المدلول الحقيقيّ لهذا البحث، أن نُحقّق كلَّ النصوص الموجودة لدينا، وأن ننتقد الشهادات ونقيِّم الوثائق؛ كلُّ هذه الترتيبات كانت ضروريّة، خصوصاً لأنَّ عمل المسبَّع كان موضوعَ جدل حادٍّ إلى درجة لفتت النظر إليه؛ ولقد أثار هذا الجدل بعض الاعتراضات عليه من قِبَل المعاصرين لهذا الحدث، مثل البيروني[٢]، وبطريقة غير مباشرة على الأقل من قِبَل ابن الهيثم[٣] لاحقاً. وهكذا توجَّب علينا

---

[١] انظر : "تسبيع الدائرة"، مقال ع. أنبوبا باللغة الفرنسية،
« Tasbī ‘ al-Dā’ira » (*La construction de l’heptagone régulier), Journal for the History of Arabic Sciences, vol. 1 n° 2*(1977)
ص. ٣٥٢-٣٨٤.

[٢] يقول البيروني "إلى أن طال الأمد، وانتهت المدَّة إلى زماننا هذا، ذي العجائب والبدائع والغرائب، الجامع بين الأضداد. أعني بذلك غزارة ينابيع العلوم فيه، وتهيُّؤ طبائع أهله لقبول ما يكاد أن يكون الكمال والنهاية في كلّ علم، وانتشار الفضل فيهم والقدرة على استنباط العجائب المعجزة جل القدماء، مع ظهور أخلاق منهم تضادُّ ما ذكرناه ومناقضة له من عموم المتنافسين، والتحاسد إيّاهم، واحتواذ التنازع والتعاند عليهم، حتى يغير بعضهم على بعض وافتخر بما ليس له. ويسلب بعضهم بعضاً علمه وينسبه إلى نفسه، متكسِّباً به، ويُكلّف الناس التعامي عن فعله، بل يصرف عنان قوّته الغضبيّة إلى من فطن بحاله وينطوي على عداوة وبغضاء له. كما وقع بين جماعة من أفاضل عصرنا في تسبيع الدائرة وفي تثـْليث الزاوية بالسواء وفي تضعيف المكعَّب وغير ذلك...".

وهذا النصّ المأخوذ من كتاب البيروني ("كتاب مقاليد علم الهيئة" تحقيق م. ت. ديبارنو *M. Th. Debarnot*، دمشق ١٨٨٥، ص. ٩٥)، يُمثـِّل شهادة ثمينة لأحد أعضاء الجماعة الريّاضيّة (يتعلّق الأمر بالفعل بهذه الجماعة)، على بعض التصرُّفات خلال المجادلات التي كانت تدور، كما نرى، حول المسائل الكلاسيكية للعمل الهندسي.

[٣] انظر: مقدّمة مؤلّفه في المسبَّع، ص. ٤٧٣.

أن نحقّق كلّ الكتابات التي وصلت إلينا من أسلاف ابن الهيثم ومن خلفائه القريبين منه. ولقد كرَّسنا هذا الملحق الكبير لهذه التحقيقات.

نحن نقدِّم، هنا، النشرةَ المحقّقةَ لأوّل مرة لمعظم هذه الكتابات، التي كان قد حقّق منها فقط نصٌّ واحد بطريقة غير مُرضِيَة، وهو مؤلّف السجزي (انظر لاحقاً). يتعلّق الأمر بتسعة عشر نصّاً، تنتمي إلى عدَّة مجموعات من المخطوطات. ولكنَّ الغالبيّة العظمى لهذه الكتابات تنتمي إلى ثلاث مجموعات: المجموعة رقم ٤١ في دار الكتب في القاهرة ، المجموعة رقم ٤٨٢١ في المكتبة الوطنيّة في باريس ، مجموعة ثرستون٣ (*Thurston 3*) في أكسفورد. توجَد بقيّة النصوص ضمن مجموعات أخرى؛ سنتوقّف أوّلاً عند هذه المجموعات.

١- تتضمَّن مجموعة دار الكتب، في القاهرة، ذات الرقم٤١، ٣٢ مخطوطة وكُتيِّباً. وهي إحدى أهم المجموعات العلميّة – في الريّاضيّات والفلك – المعروفة حاليّاً. وهي تحتوي على بعض النصوص النادرة، الفريدة أحياناً، مثل تحرير أبي جرادة لكتاب ثابت بن قرَّة "في قطوع الأسطوانة وبسيطها"، وكتاب "في تركيب المسائل التي حلّلها أبو سعد العلاء بن سهل"، وكتب لابن قرّة نفسه وللقوهي والبيروني وغيرهم. ونجد فيها أيضاً خمسة مؤلّفات في المسبَّع المتوازي الأضلاع كُتبت في العصر الذي يُهمُّنا هنا: كتاب أبي الجود وكتاب السجزي وكتاب الشَّنّي، كما نجد نصّاً مجهول المؤلّف بالإضافة إلى النصّ المنسوب إلى أرشميدس. وهذه المجموعة مكتوبة باليد نفسها، ما عدا الأوراق ٨٧ظ–٩٤ظ. لقد نُسخَت هذه المجموعة، بالفعل، في زمن متأخِّـر نسبيّاً، في القرن الثامن عشر الميلاديّ، بيد مصطفى صدقي المشهور، بخطّ نسخيّ مُتقـَن. ولقد التقينا مرات عديدة بهذا النسّاخ المثقّف المطّلِع على العلوم الريّاضيّة[٤]. والنّسخة هي، إجمالاً بدون تعليقات أو إضافات. ولكن قد يحدث أن يتدخّـل مصطفى صدقي ليقدّم تحريراً بدلاً من نسخة حقيقيَّة. وهذا ما فعله بخصوص مؤلّف القوهي، في حجم القطع المكافئ[٥]، الذي يوجَد في هذه المجموعة نفسها. ولقد تدخّـل أيضاً في نصّ المسبَّع المتساوي الأضلاع المنسوب إلى أرشميدس.

ولقد نُسخت كلّ هذه المؤلّفات المختلفة الموجودة ضمن هذه المجموعة بين سنة ١١٤٦ وسنة ١١٥٣ للهجرة، أيْ بين سنة ١٧٣٣ وسنة ١٧٤٠ للميلاد. ولكنَّ أغلب هذه النسَخ،

---

[٤] انظر مثلاً: Géométrie et Dioptriques، ص.CXXXI ؛ المجلّد الأوّل من هذه الموسوعة، ص. ١٣٨–١٤٣؛ ٤٧٨–٤٧٩ و٥٩٤–٥٩٥.

[٥] انظر: المجلّد الأوّل من هذه الموسوعة، ص ٥٩٤–٥٩٥.

قد تمَّ إنجازها سنة ١٧٤٠. لا تطرح هذه المجموعة، المنسوخة بيد واحدة، أيّة مشكلة خاصّة. ولكنَّ مسألة المصادر التي نُقِلت عنها هذه المجموعة تبقى بكاملها دون حلّ. ليست هذه حال المجموعة الباريسيّة.

٢- ليست مجموعة المكتبة الوطنيّة، في باريس، ذات الرقم ٤٨٢١ أقلَّ أهمِّيَّة من المجموعة السابقة. وهي، بالإضافة إلى ذلك، أقدم منها. وهي تحتوي، أيضاً، على نصوص نادرة، وفريدة في بعض الأحيان. نجد ضمنها خمسة مؤلّفات في المسبَّع: أحد مؤلّفات أبي الجود، مؤلّف السجزي، ومؤلّف الصاغاني ومؤلّفين للقوهي. ويجب علينا، بما أنَّ عدَّة أيدٍ قد شاركت في نسخ هذه المجموعة، أن نتناول ثانية وصفها بشكل نهائيّ، لكي لا يتوجَّب علينا وصفها مرّة أخرى[٦].

تتضمَّن هذه المجموعة، في وضعها الحالي، ٨٦ ورقة (١٥٠×٢٣٠مم). نُسخت في إيران، وكانت موجودة في إسطنبول، في القرن الخامس عشر للميلاد (إذا أخذنا بعين الاعتبار الأختام والإشارات الموجودة على وجه الورقة الأولى)[٧]. وكانت هذه المجموعة تتضمَّن، في الأصل، ثمانية عشر مؤلّفاً، فُقد منها ثلاثة منذ زمن طويل. تشهد على ذلك قائمة المحتويات المكتوبة على وجه الصفحة الأولى، بالحبر الأسود؛ وهي تؤكّد أنَّ المخطوطة كانت تتضمَّن:

المقالة الثانية من كتاب أقليدس، بزيادات أبي رستم ويجن بن رستم القوهي؛ كريّة الأرض لأبي جعفر الخازن؛ كتاب لأبي سعد العلاء بن سهل في تصفـــّح كتاب بطلميوس في المناظر، وهو غير تامّ[٨].

---

[٦] إنَّ الوصف المختصَر الذي قدَّمه ج. فجدا (G. Vajda) في "الفهرس العام للمخطوطات العربيّة الإسلاميّة للمكتبة الوطنيّة في باريس"
[Index général des manuscrits arabes musulmans de la Bibliothèque Nationale de Paris, Publications de l'Institut de recherche et d'histoire des textes(Paris, 1953)] ,
وكذلك وصفه غير المنشور للمخطوطة المحفوظة في قسم المخطوطات الشرقيّة للمكتبة الوطنية الفرنسيّة
[*Département des manuscrits orientaux de la Bibliothèque Nationanle de France*],
لا يكفيان لتوضيح الشبكة التاريخيّة المعقدة، النصيّة والمفهوميُّة، التي تندرج فيها هذه المخطوطة الأساسيّة.

[٧] نقرأ على وجه الورقة الأولى أنَّ هذه المجموعة كانت ملك عبد الرحمن بن علي [...] في استانبول سنة ١٤٨٦/٨٩١، ثمَّ أصبحت ملك علي بن عمر الله بن محمَّد بن في رجب سنة ١٦٧٧/١٠٧٧، ثمَّ أصبحت بين يديْ حنين حلبي(أو ثلبي) سنة ١٦٧٨/١٠٨٩-١٦٧٩. ثمَّ وصلت أخيراً إلى المكتبة الوطنيّة في باريس.

[٨] ربما كان هذا هو الجزء المحفوظ تحت عنوان "البرهان على أنَّ الفلك ليس في غاية الصفاء". انظر:
Geometry and Dioptrics in Classical Islam (London 2005) ، ص. ١٤٥-١٤٩

ولقد أشارت يدٌ أخرى، بالحبر الأحمر فوق عنوان المحتوى، إلى رقم الورقة حيث يوجد المؤلّف، كما أشارت إلى غياب المؤلّفات الثلاثة المفقودة.

لنستعرض الآن المؤلّفات المحفوظة حسب الترتيب:

١- رسالة في عمل ضلع المسبَّع المتساوي الأضلاع في الدائرة لأبي سهل القوهي، على الأوراق ١ظ-٨و. تحتوي كلُّ ورقة على ١٦ سطراً بشكل عام، أو أحياناً على ١٧سطراً، ويتضمَّن كلّ سطر ثماني كلمات تقريباً. يُذكّر النسّاخ (اليد ا) في الجملة الختاميّة بأنّه قابل نسخته بالنسخة الأصليّة؛ ولقد كتب، بالفعل، بيده ملاحظةً على هامش الورقة ٣ظ يشرح فيها ما فعله خلال هذه المقابلة. أمّا اليد ب، فقد كتبت ملاحظتين على هامش الورقتين ١ظ وَ ٦ظ.

لم يترك النسّاخ (ا) اسمه على الجملة الختاميّة. إنَّ لخطّه النسخيّ بعض الشبه بخطّ الحسين بن محمَّد بن عليّ الذي نسخ أوراق المجموعة ٢٩ظ-٣٦ظ. يبقى علينا أن نشير إلى أنّنا نقرأ على الصفحة ٨و في أسفل الجملة الختاميّة، بيت شعر باللغة الفارسيّة كُتب بيد أبي إسحاق بن عبد الله الكونباني:

خوشى اندر شبى روشن چراغى

كتابى واز(كذا) همه عالَم فراغى

ولقد كتبت يدٌ ثالثة إلى جانب بيت الشعر ما يؤكّد هويّة هذا الأخير:

"خطّ أستاذ أكابر الريّاضيّين محيي مراسم علوم الحكماء الماضيين المولى أبو إسحاق الكوبناني مدَّ الله أظلاله وحقّق آماله".

يتعلّق الأمر، على أرجح الاحتمالات، بصاحب المجموعة. ونقرأ، أيضاً، ما كُتب بيد أخرى تحت اسم الكونباني: "شارح فوائد بهائيّة تأليف خوام البغدادي" ؛ ويتبع ذلك توقيع سيِّد جلال الدين طهراني[٩] مع المكان- باريس - والتاريخ ١٩٣٦.

[٩] جلال الدين طهراني عالم ومجمِّع للمخطوطات؛ ولقد توفّي منذ عهد قريب.

٢- الغربة الغربيّة للسهروردي. يتعلّق الأمر بمؤلّف قصير في الفلسفة نُقل في وقت متأخـــر، في يوم الثلاثاء السابع عشر من جمادى الأولى سنة ٧٤٤(٧ تشرين الأوّل/أكتوبر ١٣٤٣) على ورقتين بيضاوين.

٣- في عمل ضلع المسبّع لأحمد بن عبد الجليل السجزي، الأوراق ١٠ظ-١٦ظ. تحتوي كلُّ ورقة على ١٦ إلى ١٨ سطراً، وفي كلّ سطر ١٠ أو ١١ كلمة تقريباً. وهذا المؤلّف مكتوب بالخطّ النسخيّ باليد نفسها التي كتبت النصّ الرياضيّ رقم ١. ونقرأ في نهاية النسخة "نُقِل من نسخة سقيمة وقوبل بها ولله الحمد. والنسخة المنقولة تتضمَّن ثلاث إضافات مُهِمَّة بالنسبة إلى تاريخ النصّ. فقد أضيفت كلمة "الذي" إلى الورقة ١١و، وأضيف "كخطّ اد " إلى الورقة ١٣ظ، كما أضيفت الجملة "قطره المجانب "د ب" إلى الورقة ١٥ظ، وكُتب فوقها الحرف "ظ" الذي هو اختصار لكلمة "الظاهر"؛ وهذا يعني أنَّ هذه الجملة كانت صعبة القراءة جدّاً في النسخة الأصليّة. ولكن هذه الإضافات كُتِبَت باليد ب نفسها التي نقلت معظم مؤلّفات هذه المجموعة وخاصَّة الكتابات حول المسبَّع المتساوي الأضلاع. وهكذا يكون الناسخ (ب) قد اطّلع على النسخة الأصليّة التي استخدمها الناسخ (ا)، كما حصل في حالة النصّ رقم ١. وهكذا لا يبدو أنّنا نجازف إذا افترضنا بعض التعاون بين هذين النسّاخين. وهذه الفرضيّة مؤكّدة، من ناحية أخرى، إذ إنَّ النسّاخ (ب)، بشكل أكيد هذه المرّة، قد تعاون مع النسّاخ الثالث لهذه المجموعة حسين مُحمَّد بن علي.

٤- في عمل المسبّع المتساوي الأضلاع، استخراج ويجن بن رستم المعروف بأبي سهل القوهي، الأوراق ١٧ظ-٢٣ظ. تتضمَّن كلُّ ورقة من ١٧ إلى ١٩ سطراً ؛ وكلُّ سطر يتضمَّن ١١ كلمة تقريباً. كُتِب هذا النصّ بالخطّ النسخيّ بيد الناسخ (ب). وكلُّ الذين تكلّموا على هذه المخطوطة خلطوا بين يدي النساخيْن.

تُخبرنا الجملة النهائيّة أنَّ النسّاخ (ب) نقل هذا النصَّ في "كشك همذان"، أي في قلعة همذان، يوم الخميس ١٣ رجب سنة ٥٤٤ للهجرة، أي في ١٦ تشرين الثاني/نوفمبر سنة ١١٤٩، استناداً إلى نصٍّ أصليّ كُتِب بيد السجزي نفسه. والجدير بالملاحظة هو أنَّ عدَّة نصوص منسوخة بيد (ب) قد استندت إلى نصوصٍ أصليّة كُتبت بخطّ السجزي.

تتضمَّن هذه النسخة شطبتين مهمَّتين على الورقتين ١٨ظ وَ ٢٢و، بسبب تكرارين شطبهما النسّاخ بنفسه؛ كما تتضمَّن إضافة إلى الورقة ٢١ظ أشار النسّاخ إلى موضعها في النصّ.

٥- رسالة أحمد بن محمّد بن الحسين الصاغاني إلى الملك الجليل عضد الدولة، على الأوراق ٢٣ظ-٢٩و. وهذه الصفحات التي نُقلت باليد نفسها التي نقلت النصّ رقم ٤، لها الخصائص نفسها. أنهـيَتْ هذه النسخة بعد يومين من إنهاء النسخة الأولى، في المكان نفسه، واستناداً إلى نصّ مكتوب بخطّ السجزي. وهي لا تتضمَّن أيَّة إضافة أو تعليق؛ وقام النسّاخ أيضاً بشطبتين (على الورقة ٢٣ظ) لحذف تكرارين خلال نسخه.

٦- رسالة أبي سهل ويجن بن رستم القوهي في عمل مُخمَّس متساوي الأضلاع في مُربَّع معلوم، على الأوراق ٢٩ظ-٣٣ظ. تتضمَّن كلُّ ورقة ١٨ أو ١٩ سطراً، ويتضمَّن كلُّ سطر حوالي عشر كلمات. كُتِبَ النصُّ بالخطّ النسخي بيد الحسين محمَّد بن علي، وفقاً للجملة الختاميّة. ولقد أضاف النسّاخ كلمتين على الورقتين ٣٠ظ وَ ٣٢ظ. ولقد أنهى نسخته يوم الثلاثاء في ١٥ رمضان سنة ٥٤٤ هجريَّة، أي في ١٦ كانون الثاني/يناير ١١٥٠.

ونحن متأكّدون من تعاون الحسين محمَّد بن علي والنسّاخ (ب)، في نسخ هذا النصّ، إذ إنَّ النسّاخ (ب) قام برسم الأشكال الهندسية لهذا النصّ وللنصّ الذي يليه الذي نسخ أيضاً بيد الحسين مُحمَّد بن علي. ولقد بدأ الحسين مُحمَّد بن علي عمله بالنسخ على ظهر الورقة ٢٩ التي كان النسّاخ (ب) قد نسخ على وجهها؛ وهذا ما يجعلنا نستنتج أنَّ الرجُلين عملا معاً خلال الفترة نفسها (بداية فصل الشتاء في سنة ١١٤٩-١١٥٠).

٧- رسالة أبي سهل ويجن بن رستم القوهي في معرفة مقدار البعد بين مركز الأرض والكواكب التي تنقضُّ ليلاً. تتضمَّن كلُّ ورقة ١٨ سطراً، ويتضمَّن كلُّ سطر حوالى إحدى عشرة كلمةً. كُتِبَ النصُّ بالخطّ النسخي بيد الحسين محمَّد بن علي. ولقد أنهيت النسخة، مثل النسخة السابقة، يوم الثلاثاء في ١٥ رمضان سنة ٥٤٤ هجريَّة. لا يوجَد في النسخة أيّة إضافة أو تعليق. ونقرأ، بعد الجملة الختاميّة، بيدٍ أخرى وبالفارسيّة، أنَّ النسخة قد أنجزت في ١٥ رمضان سنة ٥٤٤ "في أسد واللـــه أعلم".

٨- رسالة أبي الجود محمّد بن الليث إلى الأستاذ الفاضل أبي محمَّد عبد الله بن علي الحاسب في الدلالة على طريقي الأستاذ أبي سهل القوهي المهندس وشيخه أبي أحمد الصاغاني في طريقه التي سلكها في عمل المسبَّع المتساوي الأضلاع في الدائرة. وهي موجودة على الأوراق ٣٧ظ-٤٦و. تتضمَّن كلُّ ورقة ١٨ سطراً، ويتضمَّن كلُّ سطر حوالى إحدى عشرة كلمةً. كُتِبَ النصُّ، مثل كلّ النصوص التي تليه بيد النسّاخ (ب) استناداً إلى نصٍّ أصليٍّ مكتوب بخطّ السجزي وفي نفس المكان، كشك همذان. وكان ذلك في يوم الأربعاء ١٢ رجب سنة ٥٤٤ للهجرة، أي قبل يوم من الانتهاء من كتابة نسخة المؤلّف الرابع، أي في ١٥ تشرين الثاني/نوفمبر ١١٤٩. وليس هناك سوى كلمتين مضافتين في الهامش سقطتا سهواً خلال النسخ (٣٧ظ-٣٩ظ).

٩- "نقلناه من شرح أبي جعفر محمّد بن الحسن الخازن للمقالة الأولى من المجسطي". هذا النصُّ موجود على الأوراق ٤٧ظ-٦٧ظ. ولقد كُتِب باليد نفسها التي كتبت النصَّ السابق ويظهر بالشكل نفسه. والإضافات والشطبات هي من عمل النسّاخ وترجِع، كما هي الحال في النصوص السابقة، إلى النقل نفسه وليس إلى المقابلة مع النصّ الأصلي المنقول عنه. ولقد حقّقنا وشرحنا هذا النصَّ[١٠].

١٠- "في أنَّ سطح كلّ دائرة أوسع من كلّ سطح مستقيم الأضلاع متساويها، متساوي الزوايا مساوية إحاطته لإحاطتها". هذا النصُّ موجودٌ على الورقة ٦٨ وهو مُقدَّمٌ كنصّ مجهول المؤلّف، ولكنّه من تأليف السميساطي. وهو مكتوب باليد نفسها التي نسخت النصَّ السابق؛ وهو، مثل النصّ السابق، بدون جملة ختاميّة. ولقد حقّقنا هذا النصَّ وشرحناه[١١].

١١- تعاليق لمسلمة بن أحمد الأندلسي على كتاب بطلميوس "في تسطيح بسيط الكرة". وهذا النصّ مكتوب على الأوراق ٦٩ظ-٧٥ظ، وله صفات النصّ السابق نفسها. وتُخبرنا الجملة الختاميّة بأنَّ النسخة قد أنجزت في أسداباد، وهي مدينة قريبة من همذان، يوم الأربعاء ١١ شعبان سنة ٥٤٤، أيْ في ١٤ كانون الأوّل/ديسمبر ١١٤٩.

[١٠] انظر: المجلد الأوّل من هذا الكتاب، ص. ٥١٩-٥٨٦. ولقد خلطنا، مثل كلّ الناس، بين هذا النسّاخ والحسين محمّد بن علي، في هذا المجلّد الأوّل، ص. ٥٢٢-٥٢٣ إذ خُدِعنا بثقتنا بجدول المخطوطات. فنلتمس العُذر.
[١١] انظر المرجع السابق، ص. ٥٨٦-٥٨٧.

١٢- فصل ليس من كتاب "تسطيح بسيط الكرة"، من كلام مسلمة بن أحمد. وهذا النصُّ مكتوب على الأوراق ٧٦و-٨١ظ، وله صفات النصّ السابق نفسها.

١٣- نصٌّ نقلناه من خطّ عبد الله بن الحسين القومسي، تلميذ يحيى بن عدي. وهذا النصُّ مكتوب على الورقة ٨٢، وهو مترجَمٌ عن السريانيّة ومنسوبٌ في المخطوطة إلى ابن عدي، وهو منسوخ بيد (ب).

١٤- مقالة لأبي عبّاس النيريزي "في إحداث الجوّ". وهذا النصُّ مكتوب على الأوراق ٨٢ظ-٨٦و، بيد النسّاخ (ب). ولقد أنجِزت النسخة، وفقاً للجملة الختاميّة، في همذان، في ١٣ شعبان سنة٥٤٤، أي بعد يومين من إنجاز النصّ ١١ الذي نُسخ في أسدأباد.

وهكذا نرى أنَّ ثلاثة نسّاخين ساهموا في نقل هذه المجموعة: النسّاخ (أ) الذي كان نموذجه بين يدَي النسّاخ المجهول الهويّة (ب) الذي نقل معظم النصوص، وأخيراً الحسيْن محمَّد بن علي. ولقد نُسخت هذه النصوص في ١١٤٩-١١٥٠للميلاد بشكل أكيد بيد النسّاخ (ب) والحسين محمَّد بن علي، وبشكل محتمّل بيد النسّاخ (أ)، في جوار همذان وأسداباد. كلُّ شيء يوحي بأنَّ هؤلاء النسّاخين الثلاثة كانوا يتعاونون في نقل هذه النصوص الرياضيّة ذات المستوى الرفيع؛ وربَّما وجب علينا أن نعتبر النسّاخَ (ب) مديراً للمشروع. ولقد نسخ (ب) النصوص الخاصّة بالمسبَّع، وهي ذات الأرقام ٤، ٥، و ٨، عن نموذج مكتوب بخطّ السجزي.

سنستعرض الآن المؤلّفات المحقّقة هنا:

١- "كتاب عمل الدائرة المقسومة بسبعة أقسام متساوية لأرشميدس"

لا يوجد من هذا النصّ سوى نسخة واحدة، وهي تلك التي نقلها مصطفى صدقي؛ وهي موجودة ضمن المخطوطة رقم ٤١ في دار الكتب في القاهرة، على الأوراق ١٠٥و-١١٠و. أنجِزت هذه المخطوطة يوم الأحد، في السابع من جمادى الأولى سنة ١٠٥٣ للهجرة، أيْ في ٣١ تمّوز/يوليو ١٧٤٠. لا شيء يدلُّ، من ناحية أخرى، على أنَّ مصطفى صدقي قد قابل النسخة بالنموذج. وكنّا قد ذكّرنا بأنَّ مصطفى صدقي كان يُحرِّر،

غالباً، بدلاً من أن ينسخ؛ ولم يكن من النادر أن يُدخِل في تحريره براهين لريّاضيّين من نهاية القرن العاشر، مثل الحُبوبي (نُقل هذا الاسم في النصّ على شكل "الجيوبي") والشنّي. وهذا ما سمح لنا بإظهار صورة أكثر دقّة لهذا الفقيه والرياضي، الحبوبي[١٢]، الذي لا نعرف عنه حتّى الآن سوى القليل جدّاً.

لم يقم أحدٌ بتحقيق هذا الكتاب من قبلُ. ولكنّه منشور ومعروف جيِّداً منذ أن ترجمه ث. شوي (*C. Schoy*) إلى الألمانية سنة ١٩٢٧[١٣]، وبعد أن ترجمه إلى الروسيّة منذ عهد قريب ب. روزنفلد[١٤] (*B. Rosenfeld*).

كتب أبو الجود ثلاثة مؤلّفات؛ فــقِد منها المؤلّف الأوّل، وفقاً لما شرحنا سابقاً[١٥]. تبقى لدينا المؤلّفات التالية:

٢-١"كتاب عمل المسبَّع في الدائرة لأبي الجود"

يوجَد هذا الكتاب ضمن المجموعة السابقة على الأوراق ١١٧ظ-١٢٠و؛ وهو منسوخ بيد مصطفى صدقي الذي أنهى نسخه في يوم الأربعاء العاشر من جمادى الأولى سنة ١١٥٣ للهجرة، أي في ٣ آب/أغسطس ١٧٤٠. هذا النصُّ، مثل النصّ السابق، لا يتضمَّن أيَّة

---

[١٢] كان أبو علي الحسن بن الحارث الحبوبي مراسلاً لأبي الوفاء البوزجاني. وهو، كما يُشير معاصروه فقيه ورياضيّ. وهكذا تخبرنا مخطوطة بودليان، ثرستون ٣ أنَّ أبا الوفاء البوزجاني كتب مؤلّفاً عنوانه "جواب أبي الوفاء محمّد بن محمّد البوزجاني عمّا سأله الفقيه أبو علي الحسن بن حارث الحبوبي، وهو البرهان على مساحة المثلّثات من غير استخراج العمود ومسقط الحجر(الورقة ٣).

ونلقاه أيضاً في مراسلة متبادلة بين ابن عراق والبيروني. يكتب هذا الأخير "... إلى أن ورد كتاب شيخنا محمّد بن محمّد البوزجاني على الفقيه أبي علي الحبوبي يذكر فيه أنّه تأمّل أكثر كتابي في السموت..."(رسالة في معرفة القسيّ الفلكيّة، ضمن كتاب رسائل أبي نصر منصور بن عراق إلى البيروني [حيدراباد ١٩٤٨]، المؤلف ٨، ص. ٢). انظر فؤاد سزجين F. Sezgin, Geschichte des arabischen Schrifttums (Leiden, 1974) ، المجلّد الخامس، ص. ٣٣٦.

انظر، أيضاً، المؤلّف المعَنْوَن "في تشريح الكرة" للحبوبي على أرجح الاحتمالات، مخطوطة القاهرة، دار الكتب، رقم ١٢٠٢.

[١٣] بدأ ث. شوي بترجمة القضيتين ١٧ وَ ١٨ ضمن:

"Graeco-Arabische Studien nach mathematischen Handschriftender Viceköniglichen Bibliothek zu Cairo, Isis", 8(1926)

ص. ٢١-٤٠؛ ثمَّ ترجم كلَّ المؤلّف ضمن

Die trigonomtrischen Lehren des perischen Astronomen Abū'l Raihān Muhammad ibn Ahmad al-Bīrūnī, (Hanovre 1927)

[١٤] ظهرت هذه الترجمة في *I.N. Weselowskii, Archimed-socinenja* (موسكو، ١٩٦٢).

[١٥] يبدو أنَّ نصَّ أبي الجود كان ما يزال متداولاً في بداية القرن الثالث عشر الميلادي. وذلك أنَّ نسّاخ مخطوطة ثرستون ٣، في مكتبة بودليان، قد كتب على الورقة ١٢٩و في الهامش بجانب المقدّمة التي قدّمها السجزي والتي تعالج قسمة أبي الجود D_2 التي قدّمها هذا الأخير في رسالته الأولى: "وجدت هذه في رسالة أبي الجود محمّد بن الليث إلى الشيخ عبد الله بن أحمد بن الحسين، وذكر فيها: " وما أعلم أنَّ أحداً سبقني إلى هذا العمل على ما اعترف به المهندسون ونطقت كتبهم إلى هذه الغاية، وهي أواخر سنة ثمانٍ وخمسين وثلاثمائة هجريّة"، وذكر فيها أبا جعفر الخازن".

هذه الشهادة، مع أنّها قصيرة جدّاً، هي ذات أهميّة، إذ إنّها الوحيدة التي وصلت إلينا من شخص قرأ رسالة أبي الجود بدون أن يــُشارك في الجدال. وهي تؤكّد بعض الأقوال، المشتركة لأبي الجود ولمخاصميه، الخاصّة بالقسمة D_2، كما تُظهر اهتمامات أبي الجود، إذ إنّها تُذكّر بأنَّ هذا الأخير يُشير إلى اسم الخازن– وهو أحد أوائل الريّاضيين الذين حاولوا حلَّ معادلة من الدرجة الثالثة بواسطة تقاطع قطعين مخروطيّين. وهذا هو، بالتحديد، أحد اهتمامات أبي الجود الرئيسية، وفقاً لشهادة خــلَفه الخيّام.

تعليقات أو إضافات؛ ولا شيء يدلُّ على أنَّ مصطفى صدقي قد قابل النسخة بالنموذج الذي نسخ عنه. لم يقم أحدٌ بتحقيق هذا الكتاب من قبلُ.

٢-٢ "رسالة أبي الجود في الدلالة على طريقَـــي القوهي والصاغاني"

لقد وصل إلينا هذا المؤلَّف في نسخة واحدة؛ وهي ذات الرقم ٨ في المجموعة ٤٨٢١ التي وصفناها سابقاً؛ كُتبت بيد النسّاخ (ب) ولم تُكتب بيد الحسين محمّد بن علي، كما كتب البعض.

٢-٣ كتابة مُختَصَرة للمؤلّف السابق موجودة ضمن مخطوطة ثرستون ٣ في مكتبة بودليان في أكسفورد (*Bodleian Thurston 3*)، على الأوراق ١٣٣و-١٣٤و. ولقد مُحِيَ جزءٌ من تاريخ نقل هذا النصّ، ولم يبقَ سوى "الجمعة في الثاني من شعبان سنة ستمائة..." (الورقة ١٣٤و). ولقد مُحيَ التاريخ المكتوب على الورقة ١٣٦و بالطريقة نفسها. ولكنّنا نقرأ على الورقتين ٦٩و وَ ٩٢ظ التاريخين: "في أواخر رجب سنة خمس وسبعين وستمائة" وَ "سابع رجب سنة خمس وسبعين وستمائة ". وهكذا نستطيع بدون مخاطرة أن نكمل الجزءَ الممحوَّ من التاريخ لنقرأ " ٢ شعبان سنة ٦٧٥"، أيْ ٨ كانون الثاني/يناير ١٢٧٧.

وتوجَد نسخة، من ثرستون ٣، حديثة نسبيّاً، في مكتبة بودليان في أكسفورد تحت الرمز مارش ٧٢٠ (*Marsh 720*)، على الأوراق ٢٦١و-٢٦٤و.

نُقدِّم هنا التحقيق الأوّل للنصَّين ٢-٢ و ٢-٣.

٣-١ "كتاب السجزي في عمل المسبَّع في الدائرة"

يوجَد هذا الكتاب في ثلاث مخطوطات. نجده مكتوباً بيد مصطفى صدقي، في المخطوطة ذات الرقم ٤١، على الأوراق ١١٣ظ-١١٥ظ، ضمن مجموعة دار الكتب، المشار إليها أعلاه. ولقد أنجزت هذه النسخة، التي نرمز إليها بـِ [ق]، يوم الثلاثاء التاسع من جمادى الأولى سنة ١١٥٣للهجرة، أي في ٢ آب/أغسطس سنة ١٧٤٠ للميلاد.

والمخطوطة الثانية هي مخطوطة المكتبة الوطنيّة في باريس، ذات الرقم ٤٨٢١؛ وهي مكتوبة بيد الحسين محمَّد بن علي على الأوراق ١٠ظ-١٦ظ. ولقد كُتبت في همذان أو أسداباد على الأرجح، حوالى ١١٤٩-١١٥٠للميلاد. نرمز إليها بـ [ب].

توجَد المخطوطة الثالثة ضمن مجموعة رشيد ١١٩١(Reshit 1191) في المكتبة السليمانيّة في إسطنبول، على الأوراق ٨٠ظ-٨٣و؛ ونرمز إليها بـ [ت]. يتعلّق الأمر بمجموعة من مؤلّفات السجزي مكتوبة باليد نفسها بخطّ نستعليق.

ولكنَّ تفحُّصَّ الإسقاطات وحوادث النسخ الأخرى يُبيِّن أنَّ للمخطوطتين [ق] وَ [ت] النّسَب نفسه. ولقد كانت المخطوطة الأصليّة المشترَكة، على أرجح الاحتمالات، موجودةً في إسطنبول حيث نقل مصطفى صدقي عن نسخة منها. ترجم ث. شوي (C. Schoy) إلى الألمانيّة نصَّ [ق]، ولكن بدون أن يُقدِّم التحقيق النقدي لها[16]. ونُشر أيضاً، منذ عهد قريب، تحقيقٌ وترجمة إلى الإنكليزية لهذا النصّ[17].

٣-٢"مقالة السجزي في عمل المسبّع في الدائرة" (النسخة المختصرة)

تتضمَّن مجموعة ثرستون ٣ في مكتبة بودليان، على الورقة ١٢٩، نسخة مُختصَرة للكتاب السابق، كما كانت هي الحال بالنسبة إلى رسالة أبي الجود. وتتضمَّن مجموعة مارش ٧٢٠ (*Marsh* 720)، أيضاً، نسخة متأخِّرة، عن هذه النسخة المختصَرة.

تُهمل هذه النسخة المختصَرة، عن قصد، كلَّ بداية الكتاب وأكثر من ثلاث صفحات من نشرتنا، كما تُهمل كلَّ المراجع التاريخيّة والمجادلات الموجودة في قلب النصّ.

وقد تكون هذه النسخة المختصَرة مُستَخرَجةً، استناداً إلى نسخة تابعة لتقليد المخطوطة [ب]. وذلك لأنّنا إذا تناولنا مَثَــلَ إسقاط العبارة "قطره المجانب "د ب" على الصفحة ٦،

---

[16] انظر: ث. شويْ (C. Schoy): *Graeco-Arabische Studien nach mathematischen Handschriftender...*

[17] انظر ج. ب. هوجنديجك:

J. P. Hogendijk, Greek and Arabic Constructions of Regular Heptagon », Archive for History of Exact Sciences, n° 30 (1984), p. 292-316, aux p. 292-316.

هذا التحقيق (انظر لاحقاً التعليقات والحواشي) والترجمة إلى الإنكليزيّة يبقيان غير مرضيين، بالرغم من جهد لافت للنظر.

السطر ١٨ في كلِّ المخطوطات الأخرى، نجد أنَّ هذه العبارة مضافة في [ب] وهي موجودة في النسخة المختَصَرة.

نقدِّم هنا التحقيق الأوّل لهذه النسخة المُختصَرة.

٤-١"استخراج ويجن بن رستم المعروف بأبي سهل القوهي في عمل المسبَّع المتساوي الأضلاع في دائرة معلومة"

وصل إلينا هذا المؤلّف في خمس مخطوطات معروفة:

- فهو موجود على الأوراق ٢٢٢ظ-٢٢٥و ضمن المخطوطة رقم ٤٠ في دار الكتب بالقاهرة؛ وهي أيضاً مكتوبة بيد مصطفى صدقي الذي أنجزها يوم الاثنين ٢٩ ذي القعدة سنة ١١٥٩، أي في ١٣ كانون الأوّل/ديسمبر ١٧٤٦؛ نرمز إليها بـِ [ق]. ولقد برهنّا أنَّ هذه المخطوطة قد نُسخت عن النموذج نفسه الذي نُسخت عنه المخطوطة المهمّة ٤٨٣٢ أيا صوفيا بإسطنبول[١٨].

- وهو موجود على الأوراق ١٧ظ-٢٣ظ ضمن المجموعة ٤٨٢١ في المكتبة الوطنيّة في باريس، بيد نسّاخ مجهول الهويّة، وهذه اليد ليست يد الحسين محمَّد بن علي؛ والنموذج الذي نُسخ عنه مكتوب بخطّ السجزي؛ نرمز إلى هذه المخطوطة بـِ [ب].

- وهو موجود على الأوراق ١٤٥ظ-١٤٧ظ ضمن المجموعة ٤٨٣٢ أيا صوفيا في المكتبة السليمانيّة باسطنبول. لقد درسنا هذه المجموعة وبيَّنّا أنّها قد أنـْجِزَت في القرن السادس الهجري على أبعد تقدير(القرن الثاني عشر الميلادي)[١٩]. ونموذج هذه المخطوطة هو نموذج أبي علي الصوفي. ونرمز إليها بـِ [ا].

- وهو موجود على الأوراق ٦٥ظ-٦٧و ضمن المجموعة ١٧٥١ في جامعة طهران؛ نرمز إليها بـِ [د].

---

[١٨] انظر: الريّاضيّات التحليليّة، المجلّد الأوّل، ص. ١٤٠-١٤١ و٤٧٨-٤٧٩.

[١٩] انظر: الريّاضيّات التحليليّة، المجلّد الأوّل، ص. ١٣٧-١٣٨.

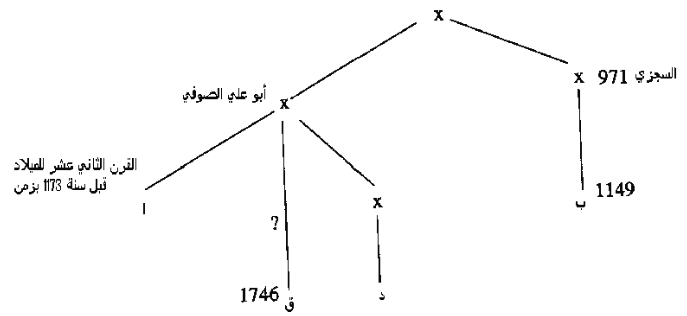
– وهو موجود على الأوراق ٢١٥ظ–٢١٩ظ ضمن المجموعة ٥٦٤٨ في المكتبة الظاهريّة في دمشق.

يتعلّق الأمر بنسخة أنجِزت منذ عهد قريب عن المخطوطة ٤٠ في دار الكتب، وفقاً لما بَيَّنّاه أكثر من مرّة[٢٠]. لن نأخذ، إذاً، بعين الاعتبار هذه المخطوطة الموجودة في دمشق، خلال إثباتنا للنصّ.

نلاحظ، مباشرة، وجودَ اختلاف مُهمٍّ يقسم هذه المخطوطات إلى فصيلتين: المخطوطة [ب]

من جهة والمخطوطات [ا]، [د] وَ [ق]، من جهة أخرى. ويوجد، ضمن هذه المخطوطات، تركيبٌ يـَمَثُلُ في شكل مختلف في كلٍّ من هذين التقليدين. هذا الفرق بين التقليدين جَعَلَنا نُثبت كلاً من هاتين الروايتين على حِدة، ونضع إحداهما مقابل الأخرى.

ولقد سمح لنا التفحُّص الدقيق للحوادث النسخيّة بالتعمُّق في التحليل وبإثبات التسلسل التاريخيّ التالي للمخطوطات:



لم يقم أحدٌ بتحقيق هذا الكتاب من قبلُ. وتوجَد ترجمة إلى الألمانيّة لنسخة مصطفى صدقي[٢١].

تتضمَّن المجموعة ثرستون ٣، على الورقة ١٣٠، **نسخة مُختصَرَة**، من هذا النصّ، أثبتناها هنا.

---

[٢٠] انظر: الرياضيّات التحليليّة، المجلّد الأوّل، ص. ١٣٨–١٣٩.

[٢١] انظر:

Y. Samplonius, « Die konstruktion des regelmässigen Sibeneckes nach Abū Sahl al-Qūhī ibn Rustam, Janus, 50(1963),

ص. ٢٢٧-٢٤٩.

٤-٢ "رسالة أبي سهل ويجن بن رستم القوهي في استخراج ضلع المسبَّع المتساوي الأضلاع في الدائرة" (نسخة مختصرة)

توجَد لدينا مخطوطتان من هذا المؤلّف. توجَد المخطوطة الأولى ضمن المجموعة ٤٨٢١ في المكتبة الوطنيّة في باريس، على الأوراق ١ظ-٨و؛ نرمز إليها بـِ [ب]. وهي مكتوبة، كما قلنا سابقاً، بيد النسّاخ (ا)؛ ويرجع تاريخها، بدون شكٍّ، إلى فترة ١١٤٩-١١٥٠ للميلاد. توجد فيها إضافتان في الهامش، مُهِمَّتان بالنسبة إلى تاريخ التقليد المخطوطيّ (انظر أعلاه، ص. ٦٠٠-٦٠١). فنحن نقرأ على الورقة ١ظ، في الهامش، كلمة "ولذلك" مع الحرف ظ فوقها ومع الإشارة التي تدلُّ على مكان الإضافة في النصّ. ولكنَّ هذه الكلمة قد كُتبت، بلا شكٍّ، بيد النسّاخ (ب) الذي كان لديه، من ناحية أخرى، لبعض المؤلّفات التي نسخها، النّسَخَ الأصليّة المكتوبة بيد السجزي. ولقد بدل النسّاخ (ب)، خلال مراجعته، الكلمةَ "كذلك" التي كتبها النسّاخ (ا)، بالكلمة "ولذلك" التي هي أكثر ملاءمة. ولقد وضع، إلى جانب هذه الكلمة الحرف ظ ، أي الظاهر، ليُشير إلى القراءة الصحيحة وفقاً لرأيه. وأصلح، أيضاً، على الورقة ٦ظ، جـ هـ فجعلها جـ ط. ولنلاحظ، أخيراً، أنَّ النسّاخ (ا) أصلح، على هامش الورقة ٣ظ، قفزةً سبَّبها التشابه، وزاد الحرف ظ فوق الجملة المضافة. وكذلك كتب النسّاخ (أ) الجملة الختاميّة (قوبل به وصحّ من النسخة المنقول عنها ولله الحمد). وهذا يعني أنَّ هذا الأخير قد قابل النسخة التي أنجزها النسَّاخ (أ) مع النسخة التي نقل عنها.

توجَد المخطوطة الثانية ضمن المجموعة اللندنيّة في المكتب الهندي ذات الرقم ٤٦١، لوث ٧٦٧ (*Loth 767*)، على الأوراق ١٨٢ظ-١٨٩و؛ ونرمز إليها بـِ [ط]. لقد عرضنا كلَّ ما نعرفه عن هذه المجموعة التي نُسخت في الهند حوالى ١٧٨٤[٢٢]. لقد بيَّنّا أنَّ قسماً مُهمّاً من هذه المجموعة (مؤلّف شرف الدين الطوسي في المعادلات) قد نُسخ عن مخطوطة وحيدة موجودة اليوم في الهند، خودا بخش رقم ٢٩٢٨ (*Khuda Bakhsh n° 2928*) التي نُسخت هي الأخرى سنة ٦٩٦، أي سنة ١٢٩٧ للميلاد.

---

[٢٢] انظر ر. راشد، شرف الدين الطوسي، الجبر والهندسة في القرن الثاني عشر (بيروت ١٩٩٨) المجلّد الأوّل، ص. ٤٢-٤٧.

وهكذا استندنا إلى هذين التقليدين المخطوطيَّين المختلفين لإثبات هذا النصّ الذي أثبت للمرَّة الأولى.

٥- "رسالة الصاغاني إلى عضد الدولة في عمل المسبَّع"

وصل إلينا هذا المؤلّف في نسخة واحدة موجودة ضمن المجموعة ٤٨٢١ في المكتبة الوطنيّة في باريس، على الأوراق ٢٣ظ-٢٩و؛ وهي مكتوبة بيد النسّاخ المجهول الهويَّة (ب)، ولم تُكتب بيد الحسين محمَّد بن علي؛ وهي منقولة عن نسخة مكتوبة بيد السجزي. ونسخة السجزي مؤرَّخة هي نفسها في ١٢ شوّال سنة ٣٦٠ هجريّة، أي في ٧ آب/أغسطس سنة ٩٧١ للميلاد، بينما أنجِز النسّاخ المجهول الهويّة نقله للمخطوطة في ١٥ رجب سنة ٥٤٤ في همذان، أي في ١٨ تشرين الثاني/نوفمبر ١١٤٩. نجد فيها كلمات أو جملاً مشطوبة (الورقة ٢٣ظ) بسبب الإعادة؛ ولكن ليس فيها تعاليق أو إضافات. لم يُثبَت هذا النصّ ولم يُترجم من قبْلُ.

٦- "كتاب في كشف تمويه أبي الجود للشَّنّي"

لم يصل إلينا هذا الكتاب كاملاً إلا في مخطوطة وحيدة، موجودة ضمن مجموعة دار الكتب بالقاهرة، مكتوبة بيد مصطفى صدقي، على الأوراق ١٢٩ظ - ١٣٤ظ؛ أنجزت المخطوطة في يوم الأحد ٢١ من جمادى الأولى سنة ١١٥٣ للهجرة، أي في ١٤ آب/أغسطس سنة ١٧٤٠؛ ونرمز إليه بـِ [ق]. نُضيف إلى هذا بعض المقاطع في مخطوطتين أخريين.

يوجَد المقطع الأوّل في جامعة القدّيس يوسف في بيروت تحت الرقم ٢٢٣، على الأوراق ١٦-١٩؛ نرمز إليه بـِ [ل]. تنقص في هذا المقطع ثلاث كلمات هي "في"، و"وجود" وَ "لعمل" وجملتان موجودتان في [ق].

المقطع الثاني موجود ضمن المجموعة *TS-AR 4164* في مكتبة جامعة كمبريدج. يتألّف هذا المقطع، الذي نرمز إليه بـِ [جـ]، من صفحتين. تنقص من هذا المقطع كلمة "حتّى"

وجملة موجودة في [ق]. لم يُثبَت هذا النصّ، الصعبُ القراءة في بعض مواضعه، ولم يُترجَم من قَبْلُ.

٧- "رسالة نصر بن عبد الله في استخراج وتر المسبَّع"

يوجَد هذا النصُّ ضمن مجموعة ثرستون ٣، على الورقة ١٣١، كما نسِخ في مارش (*Marsh*) على الأوراق ٢٦٦و-٢٦٧و. ليس هناك أدنى شكٍّ أنَّ لدينا هنا، كما هي حال النصوص السابقة، نسخة مُختَصرَة من كتاب أصليّ لم يزل مفقوداً حتّى اليوم، إن لم يكن قد فُقد نهائيّاً. ولقد نُسخت مجموعة ثرستون ٣، كما قلنا عدة مرّات، سنة ٦٧٥ للهجرة، أي سنة ١٢٧٧ للميلاد. لم يُثبَت هذا النصّ ولم يُترجَم من قَبْلُ.

٨- "تركيب لتحليل مقدِّمة المسبَّع المتساوي الأضلاع في الدائرة"

يوجَد هذا النصّ ضمن مجموعة دار الكتب، ذات الرقم ٤١، على الأوراق ١٠٠ظ-١٠١ظ. وهو مكتوب بيد مصطفى صدقي الذي أنجزه في يوم الاثنين ٢٢ جمادى الأولى سنة ١١٥٣ هجريّة، أي في ١٥ آب/أغسطس ١٧٤٠.

هذا النصّ، مثل النصوص السابقة، لم يُثبَت ولم يُترجَم من قَبْلُ.

٩- "رسالة كمال الدين بن يونس في البرهان على إيجاد المقدِّمة التي أهملها أرشميدس في كتابه في تسبيع الدائرة"

وصلت إلينا هذه الرسالة في نسختين لم يزل الخلط بينهما جارياً، إحداهما كاملة والأخرى مختصَرة. لنبدأ بالنسخة الأولى.

توجَد هذه النسخة ضمن مجموعتين من المخطوطات، إحداهما في الكويت، والثانية في إسطنبول. فهي توجَد ضمن مجموعة دار الآثار الإسلاميّة، تحت الرمز *LNS 67* ، على الأوراق ١٣٨ظ-١٤٨و؛ وهي منسوخة بيد الرياضيّ عبد العزيز الخلاطي[٢٣]. لم يترك هذا

[٢٣] انظر : رشدي راشد، شرف الدين الطوسي، الأعمال الريّاضيّة، المجلد الأوّل، ص. ٦٣-٦٤.

الأخير اسمه في الجملة الختاميّة، ولكنَّ اسمه موجود في الجملة الختاميّة للمؤلّف، الوارد قبل مؤلّف ابن يونس، إذ إنَّ نهايته تسبق مباشرة بداية مؤلّف ابن يونس، على الصفحة نفسها ؛ ولقد أنهي نقله في ١١ من ذي القعدة سنة ٦٣٠ هجريَّة، فيكون مؤلّف كمال الدين بن يونس قد أنجز بعد هذا التاريخ بوقت قليل، أي بعد ١٩ آب سنة ١٢٣٣. وهو مكتوب بالخطّ النسخي وأشكاله مرسومة بالحبر الأحمر. نرمز إلى هذه المخطوطة بـِ [كـ].

أمّا المخطوطة الثانية من النسخة الكاملة، فهي موجودة ضمن مجموعة أحمد، رقم ٣٣٤٢، على ثلاث أوراق غير مرقّمة،في مُتحف توبكابي سراي في إسطنبول. وهي مكتوبة بالخطّ النسخي، ونرمز لها بـِ [ط].

يبقى علينا أن نلاحظ أنَّ [كـ] وَ [ط] غير مستقلّتين. ينقص في [كـ]، بالنسبة إلى [ط] اسم الشخص الذي وجِّهت إليه الرسالة والمدخل (ثلاثة خطوط) وأربع كلمات: "له"، و"ما"، و"هو" و "قطع" موجودة في النسخة المختصّرَة؛ وهذا ما يسمح لنا، في النهاية، بالاستنتاج أنَّ هذه الكلمات لم تُضَف في [كـ]. يوجَد في [كـ] وَ [ط] سبعة أخطاء مشتركة، بينما تتضمَّن [ط] ستة أخطاء خاصَّة بها وتتضمَّن [كـ] خطأين. هل نُقلت المخطوطة [ط] عن [كـ]، أم أنَّ لهما نفس المخطوطة الأمّ؟ إنّه من الصعب أن نتّخِذ موقفاً، استناداً إلى هذه الصفحات الثلاث، ولكن، يمكننا القول إنَّ لهاتين المخطوطتين النّسَب نفسَه.

وصلت إلينا النسخة المختصَرة، هي أيضاً، في مخطوطتين، إذا لم نحسب المخطوطة مارش ٧٢٠ (*Marsh 720*).

المخطوطة الأولى موجودة ضمن مجموعة ثرستون ٣، على الأوراق ١٢٨ظ-١٢٩و، ومؤرَّخة في سنة ٦٧٥ للهجرة (انظر الورقتين ٦٩ظ، ٩٢ظ)؛ نرمز إليها بـِ [ع]. يُضاف إليها النسخة الموجودة في هذه المجموعة في القرن السابع عشر: مارش٧٢٠، على الأوراق ٢٥٧و-٢٥٨ظ؛ لن نأخذ هذه المخطوطة بعين الاعتبار عند إثبات النصّ.

توجَد المخطوطة الثانية ضمن المجموعة جَنَل ٨/١٧٠٦(*Genel 1706/8*)، على الأوراق ١٨٤ظ-١٨٦و، في منيسا (*Manisa*) في تركيا[٢٤].

ينقص في هذه النسخة المختصَرة المدخلُ (ثلاثة أسطر) واسمُ الشخص الذي وجِّهت إليه هذه الرسالة. وحُذفت منها أيضاً مجموعة من الكلمات مثل خطّ، سطح، نسبة،...

وتحتوي هذه النسخة، مع أنّها مختصَرة، على ثلاث جُمل إضافيّة؛ إحداها ناتجة من قفزة بسبب تشابه الكلمات (على ذلك... على ذلك). والمقطع الأخير فيها مُختلف عن المقطع الأخير الموجود في النسخة الكاملة؛ وهو يتضمَّن، بالإضافة إلى ذلك، عدداً من التناقضات. ولنلاحظ أخيراً أنَّ [جـ] ليست منسوخة عن [ع] وأنَّ [ع] ليست منسوخة عن[جـ]؛ وذلك أنَّ الجملة "لأنَّ كــ ف لا يلقى ع م كــ " ناقصة في [ع]، ولكنّها غير موجودة في [جـ] وغير موجودة في النسخة الكاملة؛ كما أنَّ هناك أربع كلمات في [ع] غير موجودة في [جـ].

وهكذا نقدِّم، والحالة هذه، التحقيق الأوّل لكلّ من هاتين النسختين ولنصّ النسخة الكاملة.

[٢٤] نُسخت هذه المجموعة في تبريز سنة ٦٩٩ للهجرة؛ انظر، أيضاً، أعلاه، ص. ٦٠ وما يليها.

النصوص الخاصة بعمل المسبّع

[أرشميدس]

كتاب عمل الدائرة المقسومة بسبعة أقسام متساوية لأرشميدس

ترجمة أبي الحسن ثابت بن قرّة الحرّاني

وهو مقالة واحدة وثمانية عشر شكلاً

١٠٥ – ط

كتاب عمل الدائرة المقسومة بسبعة أقسام متساوية لأرشميدس
ترجمة أبي الحسن ثابت بن قرة الحراني
وهو مقالة واحدة وثمانية عشر شكلاً

أقول بعد حمد الله والصلاة على نبيه ومجتباه وعلى آله وأصحابه وأحبّاه: إني لمّا أردت أن أستنسخ هذا الكتاب، فما ظفرت إلاّ بنسخة سقيمة مختلّة لجهل ناسخها وقصور فهمه. فبذلت جهدي بقدر استطاعتي في تحقيق مسائلها وتركيب تحليلاتها وترتيب أشكالها بعبارة سهلة قريبة المأخذ. وأوردت فيها بعض براهين المتأخّرين. والله الموفق والمعين.

الأشكال

– آ – نخط ا ب. ونعلّم عليه نقطتي جـ د بحيث يكون مربع جـ د مساويًا لمربعي ا جـ د ب.

فأقول: إن مربع ا ب مساوٍ لضعف سطح ا د في جـ ب.



وذلك لأن مربعي ا جـ د ب مساوٍ لمربع جـ د؛ فإذا زدنا على كلا الموضعين مربع جـ د وضعف سطح ا جـ في جـ د، يكون مربعات ا جـ جـ د د ب الثلاثة وضعف سطح ا جـ في جـ د مساويًا لضعف مربع جـ د وضعف سطح ا جـ في جـ د؛ لكن ضعف مربع جـ د وضعف سطح ا جـ في جـ د مساوٍ لضعف سطح ا د في د جـ. فمربعات ا جـ جـ د

10 أ: ا ط، في الهامش – 13 مساو: تصحيح «مساويان»، ولعلّه يقصد «مجموع مربعي»، ولهذا سنتركها كما هي، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد.

د ب الثلاثة وضعف سطح ا جـ في جـ د مساوٍ لضعف سطح ا د في د جـ. ولأن مربع ا د مساو لمربعي ا جـ جـ د وضعف سطح ا جـ في جـ د، يكون مربعا ا د د ب مساويا لضعف سطح ا د في د جـ. ونزيد على كلا الموضعين ضعف سطح د ب في ا د، فيكون مربعا ا د د ب وضعف سطح ا د في د ب، أعني مربع ا ب، مساويا لضعف سطحي ا د في د جـ وا د في د ب، أعني ضعف سطح ا د في جـ ب؛ وذلك ما أردناه.



– ب – وبوجه آخر: فلأن مربع ا ب مساو لمربعات ا جـ جـ د د ب الثلاثة، وضعف سطوح ا جـ في جـ د وا جـ في د ب وجـ د في د ب الثلاثة. ومربع جـ د مساو لمربعي ا جـ د ب، يكون مربع ا ب مساويا لضعف مربع جـ د وضعف سطوح ا جـ في جـ د وا جـ في د ب وجـ د في د ب الثلاثة. ولأن ضعف سطح ا ب في جـ د / مساوٍ لضعف ١٠٦-و
مربع جـ د وضعف سطحي ا جـ في جـ د ود ب في جـ د، يكون مربع ا ب مساوياً لضعف سطحي ا ب في جـ د وا جـ في د ب. لكن ضعف سطح ا ب في جـ د مساوٍ لضعف سطحي جـ ب في جـ د وا جـ في جـ د، وضعف سطحي ا جـ في جـ د وا جـ في د ب مثل ضعف سطح ا جـ في جـ ب. فمربع ا ب مساوٍ لضعف سطحي جـ ب في جـ د وا جـ في جـ ب، أعني ضعف سطح ا د في جـ ب؛ وذلك ما أردناه.

– جـ – كل مثلث قائم الزاوية، فإن ضعف سطح أحد ‹الضلعين› المحيطين ‹بزاوية قائمة› مع الوتر، كخط واحد، في ‹الضلع› المحيط الآخر مع الوتر كخط واحد، يساوي مربع مجموع محيطه، كخط واحد.



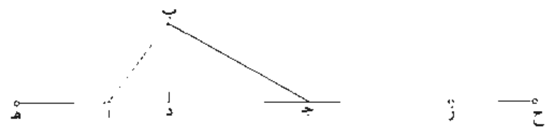
2 مربعا: مربعي، وهو أيضا صحيح على تقدير «مجموع مربعي»، وسنثبتها مع الإشارة إليها – 4 مربعا: مربعي – 6 ب ب: ب جـ، في الهامش – 15 جـ: جـ ي، في الهامش.

فليكن المثلث ا ب جـ والزاوية القائمة ب، ولنخرج ا جـ على استقامته في الجهتين. ونجعل ا د مثل ا ب وجـ هـ مثل جـ ب. فمن البيّن أن د جـ مثل ا ب ا جـ وا هـ مثل ا جـ جـ ب ود هـ مثل محيط المثلث، وأن مربع ا جـ مساوٍ لمربعي ا ب ب جـ، أعني ا د جـ هـ. فضعف سطح د جـ في ا هـ مساوٍ لمربع هـ د؛ وذلك ما أردناه.

أقول وبوجه آخر لأبي علي الحبوبي: فلأن سطح د جـ في ا هـ مساوٍ لمربع ا جـ ولسطوح ا جـ في جـ هـ وا جـ في ا د وا د في جـ هـ الثلاثة – لكن مربع ا جـ مساوٍ لمربعي د ا جـ هـ – فضعف سطح د جـ في ا هـ مساوٍ لمربعات د ا ا جـ جـ هـ الثلاثة ولضعف سطوح ا جـ في جـ هـ وا جـ في ا د وا د في جـ هـ الثلاثة جميعاً؛ وذلك الجميع مساوٍ لمربع د هـ. فإذن ضعف سطح د جـ في ا هـ مساوٍ لمربع د هـ؛ وذلك ما أردناه.

– د – كل مثلث قائم الزاوية يخرج من زاويته القائمة عمود على وترها، فإن مربع المحيط، كخطٍ واحد، مساوٍ لضعف سطح الوتر في المحيط مع العمود المخرج، كخط واحد.

فليكن المثلث ا ب جـ والزاوية القائمة ب والعمود المخرج ب د. فلنخرج ا جـ في الجهتين على الاستقامة، ونفصل هـ ا مثل ا ب وجـ ز مثل ب جـ وز ح مثل ب د.



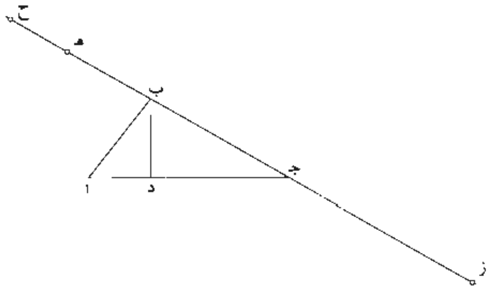
فأقول: إن مربع هـ ز مساوٍ لضعف سطح ا جـ في هـ ح.

وذلك لأن نسبة ز ح، أعني ب د، إلى جـ ز، أعني ب جـ، كنسبة هـ ا، أعني ا ب، إلى ا جـ. فبالتركيب نسبة ح جـ إلى جـ ز كنسبة هـ جـ إلى ا جـ. وبالتبديل نسبة جـ ح إلى هـ جـ كنسبة جـ ز إلى ا جـ. وبالتركيب نسبة هـ ح إلى هـ جـ كنسبة ا ز إلى ا جـ. فسطح هـ ح في ا جـ يساوي سطح هـ جـ في ا ز، فيكون ضعف سطح هـ ح في ا جـ مساوياً / لضعف سطح هـ جـ في ا ز؛ وضعف سطح هـ جـ في ا ز مساوٍ لمربع هـ ز. ١٠٦-ظ فإذن مربع هـ ز مساوٍ لضعف سطح ا جـ في هـ ح؛ وذلك ما أردناه.

5 الحبوبي: الخبوبي، وهو أبو علي الحسن بن حارث الخبوبي، معاصر أبي الوفاء البوزجاني وابن عراق،... انظر ص. 653 – 11 دا: د ا، في الهامش.

– هـ – وبوجه آخر: فلنعد المثلث وعموده، ونخرج ب جـ في الجهتين على الاستقامة، ونفصل جـ ز مثل ا جـ وب هـ مثل ا ب وهـ ح مثل ب د.

فأقول: إن مربع هـ ز مساوٍ لضعف سطح ز جـ في ز ح.



وذلك لأن سطح ب هـ، أعني ا ب، في ب جـ مساوٍ لسطح هـ ح، أعني ب د، في ز جـ، أعني ا جـ؛ يكون ضعف سطح هـ ب في ب جـ مساويًا لضعف سطح هـ ح في جـ ز. ومربعا هـ ب ب جـ مساوٍ لمربع جـ ز. ومربع هـ جـ مساوٍ لضعف سطح هـ ب في ب جـ ولمربعي هـ ب ب جـ، فيكون مربع هـ جـ مساويًا لضعف سطح هـ ح في جـ ز ولمربع جـ ز. ونزيد على كلا الموضعين مربع جـ ز، فيكون مربعا هـ جـ جـ ز مساويًا لضعف سطح هـ ح في جـ ز وضعف مربع جـ ز. ولأن مربع هـ ز مساوٍ لضعف سطح ز جـ في جـ هـ ولمربعي ز جـ جـ هـ، أعني: مساوٍ لضعف مربع ز جـ وضعف سطحي ز جـ في هـ ح وز جـ في جـ هـ، وهو مساوٍ لضعف سطح ز جـ في جـ هـ ولضعف مربع جـ ز، أعني لضعف سطح ز جـ في ز ح، فمربع هـ ز مساوٍ لضعف سطح ز جـ في ز ح؛ وذلك ما أردناه.

أقول وبوجه آخر لأبي علي الحبوبي: فلأن مربع ز هـ مساوٍ لمربعات هـ ب ب جـ ز جـ الثلاثة مع ضعف سطحي ز جـ في جـ هـ وب جـ في ب هـ؛ وضعف سطح ز جـ في ز ح مساوٍ لضعف مربع ز جـ وضعف سطح ز جـ في جـ ح؛ لكن مربع ز جـ مساوٍ لمربعي ب هـ ب جـ؛ وضعف سطح ز جـ في جـ ح هو ضعف سطحي ز جـ في هـ ح وز جـ

1 هـ: هـ جـ، في الهامش – 6 ومربعا: ومربعي – 14 الحبوبي: الجيوبي 17 هو: فهو.

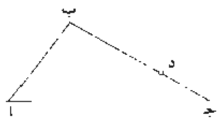
في جـ هـ؛ لكن ضعف سطح ز جـ في هـ ح مساوٍ لضعف سطح هـ ب في ب جـ. فضعف سطح ز جـ في ز ح مساوٍ لمربعات هـ ب ب جـ ز جـ الثلاثة وضعف سطحي ز جـ في جـ هـ وب جـ في ب هـ. فإذن مربع ز هـ مساوٍ لضعف سطح ز جـ في ز ح؛ وذلك ما أردناه.

وبوجه آخر لأبي عبد الله الشنّي: فلأن مربع ز هـ مساوٍ لمربعي ز جـ جـ هـ وضعف سطح ز جـ في جـ هـ؛ لكن مربع جـ هـ مساوٍ لمربعي جـ ب ب هـ، أعني مربع ز جـ وضعف سطح جـ ب في ب هـ؛ فمربع ز هـ مساوٍ لضعف مربع ز جـ وضعف سطحي ز جـ في جـ هـ وجـ ب في ب هـ. لكن ضعف مربع ز جـ وضعف سطح ز جـ في جـ هـ مساوٍ لضعف سطح ز جـ في ز هـ؛ وضعف سطح جـ ب في ب هـ مساوٍ لضعف سطح ز جـ في هـ ح؛ فمجموع ضعف / سطحي ز جـ في ز هـ وز جـ في هـ ح هو ضعف ١٠٧-و سطح ز جـ في ز ح. فإذن مربع ز هـ مساوٍ لضعف سطح ز جـ في ز ح؛ وذلك ما أردناه.

– و – كل مثلث قائم الزاوية مختلف الأضلاع، فإن مربع المحيط، كخط واحد، مع مربع الفضل بين ‹الضلعين› المحيطين بالقائمة، مساويان لمربع الوتر وأحد ‹الضلعين› المحيطين، كخط واحد، مع مربع الوتر و‹الضلع› المحيط الآخر، كخط واحد.

فليكن المثلث ا ب جـ والزاوية القائمة ب، ونفصل من ب جـ خط ب د مثل ا ب.

فأقول: إن مربع المحيط، كخط واحد، مع مربع د جـ مساوٍ لمربع ا ب ا جـ، كخط واحد، مع مربع ا جـ ب جـ، كخط واحد.



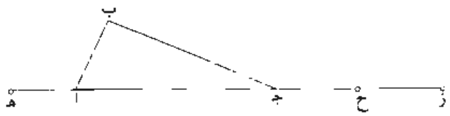
وذلك لأن مربعي ب جـ ب د مساوٍ لمربع جـ د وضعف سطح ب جـ في ب د. لكن ب د مساوٍ لـ ا ب. فمربع ا جـ مساوٍ لمربع جـ د وضعف سطح ا ب في ب جـ. ونزيد على كلا الموضعين مربع ا ب وضعف سطح ا ب في ا جـ. يكون مربعا ا ب ا جـ

10 فمجموع: ومجموع – 12 و: وب، في الهامش – 13 مساويان: أثبت هنا المثنى على غير عادته – 17 مربع: كرر مثل هذا التعبير مرات عديدة، ويعني المؤلف به مجموع مربعي الخطين، ولن نشير إلى مثلها مرة أخرى – 20 مربعا: مربعي.

وضعف سطح اب في اجـ، أعني مربع اب اجـ، كخط واحد، مساويا لمربعي اب جـ د ولضعف سطح اب في اجـ جـ ب، كخط واحد. ونزيد أيضًا على كلا الموضعين مربع اجـ ب جـ، كخط واحد، فيكون مربع اجـ ب جـ، كخط واحد، مع مربع اب اجـ، كخط واحد، مساويًا لمربعي اب جـ د ومربع اجـ ب جـ، كخط واحد، وضعف سطح اب في اجـ ب جـ، كخط واحد. لكن مربع اب ومربع اجـ ب جـ، كخط واحد، وضعف سطح اب في اجـ ب جـ، كخط واحد، مساوٍ لمربع محيط المثلث. فإذن مربع اجـ ب جـ، كخط واحد، مع مربع اب اجـ، كخط واحد، مساوٍ لمربع محيط المثلث، كخط واحد، مع مربع جـ د؛ وذلك ما أردناه.

– زَ – وبوجه آخر: فليكن المثلث اب جـ والزاوية القائمة بَ، ونخرج اجـ في الجهتين على الاستقامة. ونصيِّر اهـ مثل اب وجـ ز مثل جـ ب وز ح مثل فضل ب جـ على اب. فيكون هـ جـ مثل اب اجـ وا ز مثل اجـ ب جـ ومجموع هـ ز مثل محيط المثلث.

وأقول: إن مربعي هـ ز ز ح مساوٍ لمربعي هـ جـ ا ز.



وذلك لأن مربع اجـ مساوٍ لمربعي اب ب جـ، أعني جـ ح جـ ز؛ ومربعا جـ ح جـ ز مساوٍ لمربع ز ح وضعف سطح جـ ح في جـ ز. فمربع اجـ مساوٍ لمربع ز ح وضعف سطح جـ ح في جـ ز. لكن جـ ح مثل اهـ. فمربع اجـ مساوٍ لمربع ز ح وضعف سطح اهـ في جـ ز. فنزيد على كلا الموضعين ضعف سطح هـ ا في اجـ؛ يكون مربع اجـ وضعف سطح هـ ا في اجـ مساويًا لمربع ز ح وضعف سطح هـ ا / في ا ز. ونزيد أيضًا مربع هـ ا ١٠٧-ظ
على كلا الموضعين. يكون مربع هـ جـ مساويا لمربعي هـ ا ز ح وضعف سطح هـ ا في ا ز. ثم نزيد أيضًا مربع ا ز على كلا الموضعين. يكون مربعا هـ جـ ا ز مساويًا لمربعات هـ ا ا ز ز ح الثلاثة وضعف سطح هـ ا في ا ز. لكن مربع هـ ز مساوٍ لمربعي هـ ا ا ز وضعف سطح هـ ا في ا ز. فمربعا هـ ز ز ح مساوٍ لمربعي هـ جـ ا ز؛ وذلك ما أردناه.

9 زَ: زكـ، في الهامش – 14 ومربعا: ومربعي – 20 مربعا: مربعي – 22 فمربعا: فمربعي.

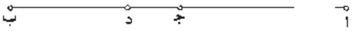
أقول وبوجه آخر لأبي علي الحبوبي: فلأن مربعي هـ جـ ا ز مساوٍ لمربعي هـ ا زجـ وضعف مربع ا جـ وضعف سطحي هـ ا في ا جـ وجـ ز في ا جـ. ومربعي هـ ز زح مساوٍ لمربعات هـ ا ا جـ جـ ز زح الأربعة وضعف سطوح هـ ا في جـ ز وهـ ا في ا جـ وا جـ في جـ ز الثلاثة – لكن ضعف سطح هـ ا في جـ ز، أعني جـ ح في جـ ز، مساوٍ لضعف مربع جـ ح وضعف سطح زح في جـ ح – فإذا زدنا على كلا الموضعين مربع زح، يكون مربع زح وضعف سطح هـ ا في جـ ز مساويا لمربعي جـ ح جـ ز، أعني مربعي هـ ا جـ ز؛ ومربعا هـ ا جـ ز مساوٍ لمربع ا جـ. فمربعا هـ ز زح مساوٍ لمربعي هـ ا جـ ز وضعف مربع ا جـ وضعف سطحي هـ ا في ا جـ وا جـ في جـ ز. فإذن مربعا هـ ز زح مساوٍ لمربعي هـ جـ ا ز؛ وذلك ما أردناه.

وبوجه آخر لأبي عبد الله الشنّي: فلأن مربع هـ جـ مساوٍ لمربعي هـ ا ا جـ وضعف سطح هـ ا في ا جـ، ومربع ا ز مساوٍ لمربعي ا جـ جـ ز وضعف سطح ا جـ في جـ ز – لكن مربعي هـ ا جـ ز مساوٍ لمربع ا جـ – فمربعا هـ جـ ا ز مساوٍ لثلاثة أمثال مربع ا جـ وضعف سطحي هـ ا في ا جـ وجـ ز في ا جـ. ولأن ضعف مربع ا جـ وضعف سطحي هـ ا في ا جـ وجـ ز في ا جـ وضعف سطح هـ ا في جـ ز مساوٍ لمربع هـ ز. فإذا جمعنا وألقينا المشترك، يبقى مربعا هـ جـ ا ز وضعف سطح هـ ا في جـ ز مساويا لمربعي هـ ز ا جـ. فنزيد في كلا الموضعين مربع زح، ونفرض أن خطي هـ ا جـ ح كخط واحد قسم بنصفين وزيد فيه زيادة ح ز، فمربع مجموع هـ ا جـ ز مع مربع ح ز مساوٍ لضعف مربعي هـ ا جـ ز. لكن ضعف سطح هـ ا في جـ ز مع مربع زح مثل مربعي هـ ا جـ ز، أعني مربع ا جـ. فإذا ألقينا ذلك، يبقى مربعا هـ ز زح مساويا لمربعي هـ جـ ا ز؛ وذلك ما أردناه.

– ح – نخط ا ب. ونعلم عليه نقطتي جـ د بحيث يكون سطح جـ د في ا ب مساويا لسطح ا جـ في د ب.

فأقول: إن ضعف سطح ا ب في جـ د مساوٍ لسطح ا د في جـ ب.

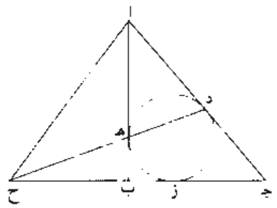
1 الحبوبي: الجيوبي – 7 مربعا: مربعي / فمربعا: فمربعي – 8 مربعا: مربعي 12 فمربعا: فمربعي – 15 مربعا: مربعي – 16 فنزيد في: في مثل هذا الموضع يعبر بحرف «على». وكلاهما صحيح والمعنى واضح – 19 مربعا: مربعي – 21 ح: ح هـ، في الهامش



وذلك لأن سطح ا جـ في د ب مساوٍ لسطح جـ د في ا ب؛ وسطح جـ د في ا ب مساوٍ لسطحي ا جـ في جـ د وجـ ب في جـ د. فسطح ا جـ في د ب مساوٍ لسطحي ا جـ في جـ د وجـ ب في جـ د. فضعف / سطح ا جـ في د ب مساوٍ لسطوح ا جـ في جـ د [١٠٨-و] وب جـ في جـ د وا جـ في د ب الثلاثة، فضعف سطح ا ب في جـ د مساوٍ للسطوح المذكورة. لكن سطحي ا جـ في جـ د وا جـ في د ب مساوٍ لسطح ا جـ في جـ ب، فضعف سطح ا ب في جـ د مساوٍ لسطحي ا جـ في جـ ب وب جـ في جـ د، وسطحا ا جـ في جـ ب وب جـ في جـ د مساوٍ لسطح ا د في جـ ب. فضعف سطح ا ب في جـ د مساوٍ لسطح ا د في جـ ب؛ وذلك ما أردناه.

– طَ – ليكن مثلث ا ب جـ قائم الزاوية، وزاويته القائمة ب. وفي داخله دائرة د هـ ز. ونصل د هـ ونخرجه ونخرج جـ ب على استقامتهما إلى أن يلتقيا على نقطة ح.

فأقول: إن ب ح مساوٍ لـ ا د.

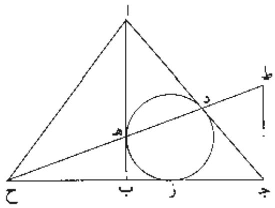


برهانه: نصل ا ح، فلأن د ا مساوٍ لـ ا هـ، وأخرج د هـ ولاقاه ا ح، فسطح ح د في ح هـ مع مربع ا هـ مساوٍ لمربع ا ح. لكن مربع ا ح مساوٍ لمربعي ا ب ب ح، فسطح ح د في ح هـ مع مربع ا هـ مساوٍ لمربعي ا ب ب ح. لكن ‹سطح› ح د في ح هـ مساوٍ لمربع ح ز، فمربعا ا ب ب ح مساوٍ لمربعي ا هـ ح ز. ونقص مربع ب ح من كلا الموضعين. فيبقى مربع ا ب مساوياً لضعف سطح ح ب في ب ز ولمربعي ب ز ا هـ. ولننقص مربع ا هـ من كلا الموضعين. فيبقى ضعف سطح ا هـ في هـ ب مع مربع هـ ب مساويا لضعف

3 فضعف: وضعف – 6 وسطحا: وسطحي – 9 طَ: طَ و، في الهامش – 15 الموضعين: المربّعين.

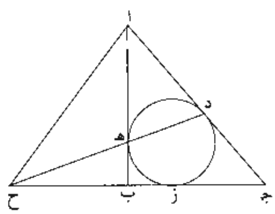
سطح ح ب في ب ز ولمربع ب ز. ولكن مربع هـ ب مثل مربع ب ز، فيبقى ضعف سطح ا هـ في هـ ب مساوياً لضعف سطح ح ب في ب ز؛ وهـ ب مثل ب ز، فـ ا هـ، أعني ا د، مثل ب ح؛ وذلك ما أردناه.

– ي – ولنعد الصورة على حالها ونقول: إن نسبة جـ ح إلى ح ب كنسبة د جـ إلى هـ ب.



برهانه: نخرج من نقطة جـ عمود جـ ط، ونخرج ح د على استقامته، ونمدّهما حتى يلتقيا على ط. فلتوازي جـ ط ا هـ، يُشبه مثلث ط جـ د مثلثَ ا د هـ، ونسبة ا هـ إلى جـ ط كنسبة ا د إلى جـ د. وبالإبدال نسبة ا هـ إلى ا د كنسبة جـ ط إلى جـ د. وا هـ مثل ا د، فـ جـ ط مثل جـ د. ولأن نسبة جـ ح إلى ح ب كنسبة جـ ط إلى هـ ب، يكون نسبة جـ ح إلى ح ب كنسبة جـ ط، أعني جـ د، إلى هـ ب؛ وذلك ما أدرناه.

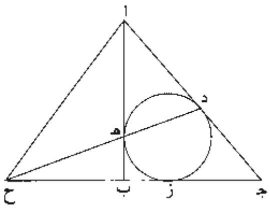
– يا – ولنعد الصورة على حالها ونقول: إن سطح ا د في د جـ مساوٍ لتكسير المثلث.



4 يَ: ي ر، في الهامش – 7 مثلثَ: بمثلث – 12 يا: يا ح، في الهامش.

برهانه: فلأن نسبة ح جـ إلى ح ب كنسبة جـ ز إلى ز ب، فسطح ح جـ في ب ز كسطح ح ب في / جـ ز. ولأن سطح ح ز في ب جـ مساوٍ لضعف سطح ا د في ١٠٨-ظ د جـ - لكن ح ب مثل ا هـ وب ز مثل ب هـ وكل خط ا ب مساوٍ لخط ح ز - فسطح ا ب في ب جـ مساوٍ لضعف سطح ا د في د جـ؛ و‹سطح› ا ب في ب جـ مساوٍ لضعف تكسير المثلث، فسطح ا د في د جـ مساوٍ لتكسير المثلث؛ وذلك ما أردناه.

- يب - وبوجه آخر، فلنفرض مثلث ا ب جـ قائم الزاوية وزاويته القائمة ب وفي داخله دائرة د هـ ز.



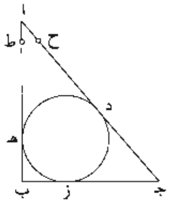
فأقول: إن سطح ا د في د جـ مساوٍ لتكسير المثلث.

وذلك لأن خط ا د مثل ا هـ وجـ د مثل جـ ز، فمربع ا جـ مساوٍ لمربعي ا هـ جـ ز وضعف سطح ا د في د جـ. لكن مربع ا جـ مساوٍ لمربعي ا ب ب جـ، فمربعا ا ب ب جـ مساوٍ لمربعي ا هـ جـ ز وضعف سطح ا د في د جـ. وإذا ألقينا مربعي ا هـ ز جـ من كلا الموضعين، يبقى مربعا هـ ب ب ز وضعف سطحي هـ ب في ا هـ وجـ ز في ز ب مساوياً لضعف سطح ا د في د جـ. لكن مربع هـ ب مثل مربع ب ز، ومربع ب ز مع سطح جـ ز في ز ب مثل سطح جـ ب في ب ز، فضعف سطحي هـ ب في ا هـ وجـ ب في ب ز مساوٍ لضعف سطح ا د في د جـ. لكن هـ ب مثل ب ز، فضعف سطحي ز ب في ا هـ وهـ ب في جـ ب مساوٍ لضعف سطح ا د في د جـ. ولأن ضعف سطح ا هـ في

6 يب: يب يجـ، في الهامش - 10 فمربعا: فمربعي - 12 مربعا: مربعي.

ب جـ مساوٍ لضعف سطحي ز ب في ا هـ وجـ ز في ا هـ، أعني ضعف سطح ا د في د جـ، فإذا جمعنا كل واحد من الموضعين إلى نظيره من الآخرين وألقينا ضعف سطح ز ب في ا هـ المشترك، يبقى ضعف سطحي ا هـ في جـ ب وهـ ب في جـ ب مساوياً لأربعة أمثال سطح ا د في د جـ؛ فيكون ضعف سطح ا د في د جـ مساوياً لسطحي ا هـ في ب جـ وهـ ب في ب جـ، أعني ا ب في ب جـ؛ وسطحُ ا ب في ب جـ مثلا تكسير المثلث؛ فإذن سطح ا د في د جـ مساوٍ لتكسير المثلث؛ وذلك ما أردناه.

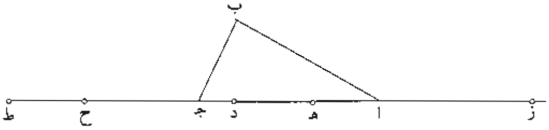
– **يجـ** – وبوجه آخر: فلنجعل كل واحد من خطي د ح هـ ط مثل جـ د، فيكون ب ط مثل جـ ب. ولأن مربع ا جـ مساوٍ لمربعي ا د د ح وضعف سطح ا د في د ح، ومساوٍ أيضاً لمربعي ا ب ب ط، فمربعا ا د د ح وضعف سطح ا د في د ح، مساوٍ لمربعي ا ب ب ط. لكن مربعي ا د د ح وضعف سطح ا د في د ح مساوٍ لمربع ا ح وأربعة أمثال سطح ا د في د ح؛ فمربعا ا ب ب ط مساوٍ لمربع ا ح وأربعة أمثال ‹سطح› ا د في د ح. لكن مربع / ا ح وأربعة أمثال ا د في د ح مساوٍ لمربع ا ط وضعف سطح ا ب في ب ط. ١٠٩-و
فإذا ألقينا مربعي ا ح ا ط المتساويين، يبقى أربعة أمثال ‹سطح› ا د في د ح مساوياً لضعف سطح ا ب في ب ط. وإذا أخذنا أنصاف ذلك، وجدناه كذلك؛ وذلك ما أردناه.



– **يد** – ليكن مثلث ا ب جـ قائم الزاوية، وزاويته القائمة ب، وليكن ا د مثل ا ب وهـ جـ مثل ب جـ.

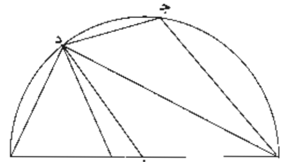
فأقول: إن سطح هـ د في محيط المثلث مساوٍ لأربعة أمثال تكسير المثلث.

5 مثلا: مثلي – 7 يجـ: يجـ يب، في الهامش – 9 فمربعا: فمربعي – 11 فمربعا: فمربعي.



فلنخرج ا جـ في الجهتين على الاستقامة، ونجعل ز ا مثل ا ب وجـ ح مثل جـ ب وح ط مثل هـ د، ومجموع ز ح مثل محيط المثلث. فلأن خطي جـ ا ح ط مثل ا ب ب جـ، فضعف سطح ا جـ في ز ح و‹سطح› ح ط في ز ح مساوٍ لمربع ز ح. ومربع ز ح مساوٍ لمربعات ز ا ا جـ جـ ح الثلاثة ولضعف سطوح ز ا في ا جـ وز ا في جـ ح وا جـ في جـ ح الثلاثة، فيكون ضعف سطح ا جـ في ز ح و‹سطح› ح ط في ز ح مساويًا لمربعات ز ا ا جـ جـ ح الثلاثة ولضعف سطوح ز ا في ا جـ وز ا في جـ ح وا جـ في جـ ح الثلاثة. لكن سطح ا جـ في ز ح هو مجموع مربع ا جـ وسطحي ز ا في ا جـ وجـ ح في ا جـ، ومربع ا جـ مثل مربعي ز ا جـ ح، فضعف سطح ا جـ في ز ح مساوٍ لمجموع مربعات ز ا ا جـ جـ ح الثلاثة وضعف سطحي ز ا في ا جـ وجـ ح في ا جـ. وإذا ألقينا ضعف سطح ا جـ في ز ح المشترك من كلا الموضعين، يبقى سطح ح ط في ز ح مساويًا لضعف سطح ز ا في جـ ح، أعني ضعف سطح ا ب في ب جـ. لكن سطح ا ب في ب جـ مثلا تكسير المثلث، فإذن سطح ح ط في ز ح، أعني هـ د في محيط المثلث، أربعة أمثال تكسير المثلث؛ وذلك ما أردناه.

– **يه** – ليكن نصف دائرة عليها ا جـ د ب على مركز ز وفيها وتر ا جـ؛ وننصف قوس ب جـ على د ونصل د ب ونجعل ا هـ مثل ا جـ.

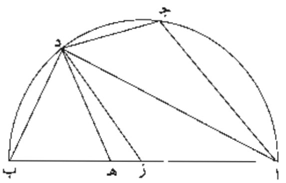


2 جـ ا ح ط: ز ا حـ ط – 2-3 ا ب ب جـ: ا جـ – 3 سطح: سطحي – 5 سطح: سطحي – 12 مثلا: مثلي.

فأقول: إن سطح ز ب في ب هـ مساوٍ لمربع د ب.

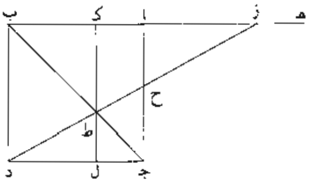
فلنصل د جـ د ا د ز د هـ، فلتساوي قوسي جـ د د ب يكون زاويتا جـ ا د د ا ب متساويتين. وا جـ مساوٍ لـ ا هـ وا د مشترك، يكون د هـ مساويًا لـ جـ د، أعني د ب، وزاوية د هـ ب مساوية لزاوية د ب هـ، أعني ب د ز، فنسبة هـ ب إلى ب د كنسبة د ب إلى ب ز، فسطح ز ب في ب هـ مساوٍ لمربع د ب؛ وذلك ما أردناه.

– **يو** – ولنعد الشكل المتقدم، ونقول: إن سطح نصف القطر في ا جـ مع مربع د ب مساوٍ لضعف مربع نصف القطر.



لأن ضعف مربع ز ب، أعني سطح ا ب في ز ب، مساوٍ لسطح / ز ب في ا هـ، ١٠٩-ظ
أعني ز ب في ا جـ، أعني نصف القطر في ا جـ، مع سطح ز ب في هـ ب. ولمّا تقدّم قبله: سطح ز ب في هـ ب مساوٍ لمربع د ب، فضعف مربع ز ب مساوٍ لسطح نصف القطر في ا جـ مع مربع د ب؛ وذلك ما أردناه.

– **يز** – لنفرض مربعًا عليه ا ب جـ د، ونخرج ضلع ا ب على استقامته من جهة ا إلى هـ، ونصل قطر ب جـ، ونضع طرف المسطرة على نقطة د وطرفها الآخر على خط هـ ا بحيث تقطع هـ ا على نقطة ز، ويكون مثلث ز ا ح مساويًا لمثلث جـ ط د؛ ونخرج من نقطة ط خط كـ ط ل موازيًا لـ ا جـ.

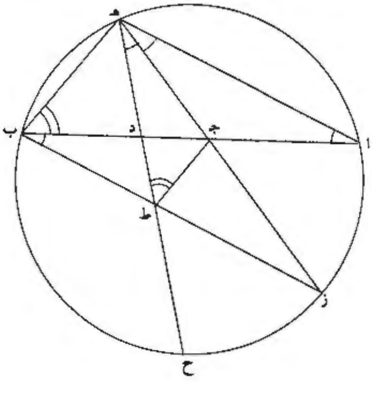


6 ولنعد: ولنعيد – 13 طرفها: طرفه.

فأقول: إن سطح ا ب في كـ ب مساوٍ لمربع ز ا، وسطحَ ز كـ في ا كـ مساوٍ لمربع كـ ب، وكلٌّ واحد من خطي ب كـ ز ا أطول من خط ا كـ.

وذلك لأن سطح جـ د في ط ل مساوٍ لسطح ز ا في ا ح، فنسبة خط جـ د، أعني ا ب، إلى ز ا كنسبة ا ح إلى ط ل. ولأن كل واحد من مثلثي ز ا ح ز كـ ط يشبه مثلث ط ل د، فنسبة ا ح إلى ط ل كنسبة ز ا إلى ل د، أعني كـ ب، فنسبة ا ب إلى ز ا كنسبة ز ا إلى كـ ب؛ وأيضاً، نسبة ط ل، أعني ا كـ، إلى كـ ط، أعني كـ ب، كنسبة ل د، أعني كـ ب، إلى ز كـ؛ فسطح ا ب في كـ ب مساوٍ لمربع ز ا، وسطح ز كـ في ا كـ مساوٍ لمربع كـ ب، وكل واحد من خطي ز ا كـ ب أطول من خط ا كـ؛ وذلك ما أردناه.

– يح – نريد أن نعمل دائرة مقسومة بسبعة أقسام متساوية.



فلنخط ا ب معلوم النهايتين، ونعلّم عليه نقطتي جـ د بحيث يكون سطح ا د في جـ د مساوياً لمربع د ب، وسطحُ جـ ب في د ب مساوياً لمربع ا جـ، وكلٌّ واحد من خطي ا جـ د ب أطول من جـ د بالعمل المتقدم. ونعمل من خطوط ا جـ جـ د د ب مثلث جـ هـ د، يكون ضلع جـ هـ مساوياً لخط ا جـ، وضلعُ د هـ مساوياً لخط د ب. ونصل ا هـ هـ ب، وندير على مثلث ا هـ ب دائرة ا هـ ب ح ز، ونخرج خطي هـ جـ هـ د على

2 ب كـ: ز كـ – 4 يشبه: يشبهان / مثلث: بمثلث.

١١٠ و استقامتهما إلى المحيط. فليقعا على نقطتي ز ح، / ونصل ب ز، ونخرج من جـ خط جـ ط إلى التقاطع. فلتساوي ضلعي ا جـ جـ هـ من مثلث ا جـ هـ. تساوي زاوية هـ ا جـ زاوية ا هـ جـ. وقوس ا ز قوس هـ ب. ولأن سطح ا د في جـ د مساو لمربع د ب. أعني د هـ، يشبه مثلث ا هـ د مثلث جـ هـ د. وتساوي زاوية د ا هـ زاوية جـ هـ د. وقوس ز ح قوس هـ ب. فقسي هـ ب ا ز ز ح الثلاث مساوية بعضها لبعض. وز ب موازٍ لـ ا هـ. وزاوية جـ ا هـ، أعني جـ هـ د، مساوية لزاوية د ب ط. ولكون زاوية جـ هـ د كزاوية د ب ط وزاوية جـ د هـ كزاوية ط د ب وخط هـ د كخط د ب، يكون جـ د مثل د ط وجـ هـ مثل ط ب، ونقط ب هـ جـ ط الأربع تحيط بها دائرة واحدة. فلأن سطح جـ ب في د ب مساو لمربع ا جـ، أعني هـ جـ، وخطاً جـ ب مساوٍ لـ ط هـ. وكان د ب كخط د هـ، فسطح ط هـ في هـ د مساو لمربع هـ جـ، ومثلث ط هـ جـ يشبه مثلث جـ هـ د. فزاوية د جـ هـ كزاوية هـ ط جـ. لكن زاوية د جـ هـ مثلا زاوية جـ ا هـ. فزاوية جـ ط هـ مثلا زاوية جـ ا هـ. وزاوية جـ ط د كزاوية د ب هـ، فزاوية د ب هـ مثلا زاوية جـ ا هـ. وقوس ا هـ ضعف قوس هـ ب. ولأن زاوية د هـ ب مثل زاوية د ب هـ، يكون قوس ح ب أيضا ضعف قوس هـ ب. فكل واحد من قوسي ا هـ ب ح ينصّف بنصفين متساويين ومساويين لقوس هـ ب، فإذن دائرة ا هـ ب ح ز مقسومة بسبعة أقسام متساوية؛ وذلك ما أردناه.

والحمد لله وحده، والصلاة على من لا نبي بعده. وقد كان الفراغ من إصلاح وتحرير هذه النسخة الشريفة بقلم مصحّحها الفقير إليه، سبحانه وتعالى، الحاج مصطفى صدقي ابن صالح، عفي الله عنه وعن جميع المسلمين.

في يوم الأحد السابع من جمادى الأولى لسنة ثلاث وخمسين ومائة وألف.

3 زاوية: لزاوية قوس: لقوس – 4 مثلث (مثبتة) مثلث زاوية: لزاوية – 5 قوس: لقوس

نصوص ثلاثة كتب لأبي الجود:

١ـ كتاب عمل المسبّع في الدائرة لأبي الجود محمد بن الليث أرسله إلى أبي الحسن أحمد بن محمد بن إسحاق الغادي؛ وهو على الوجهين اللذين تفرّد بهما.

٢ـ رسالة أبي الجود محمد بن الليث إلى أبي محمد عبد الله بن علي الحاسب في الدلالة على طريقي أبي سهل القوهي وشيخه أبي حامد الصاغاني وطريقه التي سلكها في عمل المسبّع المتساوي الأضلاع في الدائرة.

٣ـ رسالة أبي الجود محمد بن الليث إلى أبي محمد عبد الله بن علي الحاسب في طريقي أبي سهل القوهي وشيخه أبي حامد الصاغاني في عمل المسبّع المتساوي الأضلاع في الدائرة.

١١٧ - ظ

كتاب عمل المسبّع في الدائرة لأبي الجود محمّد بن اللّيث أرسله إلى أبي الحسن أحمد بن محمد بن إسحاق الغادي؛ وهو على الوجهين اللذين تفرّد بهما

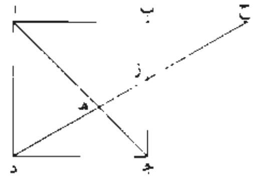
قال: إني لعلمي بحرصك على الاستفادة، وصدق براعتك في الهندسيات خاصّة ‹وميلك› إلى الاستزادة، أفيدك ما يتضح لي مما قد أشكِلَ على غيري إلى هذه الغاية، اللهم إلا أن يكون اتّفق لغيري فلم يأتنا خبره ولا ظهر لنا أثره.

وكنت حلّلت هذا الشكل، أعني المسبع، إلى مثلث متساوي الساقين، كل زاوية من الزاويتين اللتين تقعان على قاعدته ثلاثة أمثال الزاوية الثالثة، لتكون زوايا هذا المثلث سبعة أمثال الزاوية الصغرى، وتلك الصغرى سبع جميع زوايا المثلث التي هي معادلة لزاويتين قائمتين، حتى إذا رُكِّبَتْ على قوس أية دائرة كانت، فصل ضلعاها من الدور سُبْعه. ثم حلّلت المثلث إلى خط مستقيم معلوم النهايتين، يُقسَمُ بقسمين: ضرب جميع الخط في أحد القسمين مثل مربع خط نسبته إلى القسم الآخر كنسبة جميع الخط إلى مجموعه مع هذا القسم الأخير. ثم عملت جميع المثلث المذكور على قياس عمل المخمّس من مثلث متساوي الساقين، كل زاوية من الزاويتين اللتين تقعان على قاعدته مثلا الزاوية الثالثة، فيكون جميع زوايا المثلث خمسة أمثال الزاوية الصغرى وتكون هي خُمس زاويتين قائمتين.

وعَلمتُ أن بعض المهندسين نسب هذا العمل جزافًا إلى أبي سهل الكوهي، ثم غيّر بعضه وانتحله لنفسه، كما بلغني، من غير أن نازعته قط همته إلى استنباط مثله أو غادرته شهواته البهيمية للتفكر في شكل. ثم عمل بعد ذلك أبو سهل الكوهي رسالة في هذا الشكل، بعد ما عملته بسنين غير قليلة، واعتمد فيه مقدمات أرشميدس، في رسالة

9 تقعان: يقعان – 17 جزافًا: حزانًا.

له رام فيها استخراج وتر السُّبع وقلّد شكلاً لم يبرهن عليه ولا أشار في بعض الكتب إليه وهو: ‹نفرض لذلك› مربع ا ب جـ د مخرجًا قطره ا جـ، وخرج من نقطة د خط قطع قطر ا جـ على هـ وضلع ب جـ على ز، ويلقى ا ب المخرج على ح. فيصير مثلث جـ هـ د مثل مثلث ب ز ح.



١١٨-و فأضرب أبو سهل الكوهي عن ذكر المربع. وقسم بقطعين من قطوع المخروطات خطًا على قسم خط د هـ ز ح ونسبتها، وأخرج وتر السبع.

ودلّت رسالته هذه على أني أبدعت فيما عملتُ، وتفردتُ بالطريق التي سلكتُ، والجميع إليه سبقت.

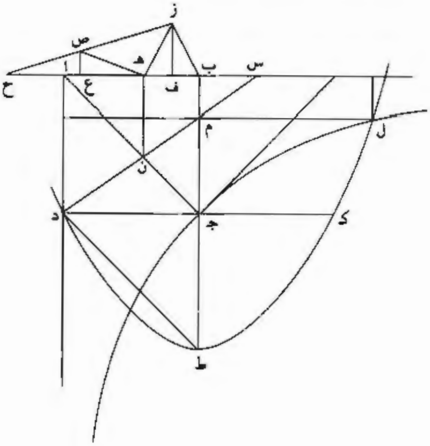
ثم عمل بعد ذلك أبو حامد الصاغاني رسالة في هذا الشكل، فقصد فيها هذا المربع وأخرج خط د هـ ز ح على الشريطة المذكورة بعينها، واستعان في ذلك بثلاثة قطوع زائدة، متقابلان وثالث، وبعمل طويل وأشكال وخطوط كثيرة. وقد حللت أنا الآن هذا المربع بالخط المذكور، فتحلّل إلى ما هو أقرب من ذلك وأظهر وأصح وأنور، واستخرجت به المطلوب في شكل واحد.

فلنفرض لذلك مربع ا ب جـ د متساوي الأضلاع والزوايا مخرجًا قطره ا جـ، ونخرج ب جـ إلى ط حتى يصير جـ ط مثل ب جـ، ونعمل قطعًا مكافئًا رأسه نقطة ط وسهمه ط ب وضلعه القائم جـ د، كما بيّن في الشكل السادس والخمسين من القول الأول من كتاب *المخروطات*، وليكن قطع ط ك ل، وقطعًا زائدًا رأسه نقطة جـ وقطره المجانب مثلا ا جـ وضلعه المنتصب مثل قطره المجانب، كما بيّن في الشكل الثامن والخمسين من القول المذكور، وليكن قطع جـ ل. فهو لا محالة يقطع قطع ط ك ل المكافئ. فليقطعه على ل. ونخرج من نقطة ل عمود ل م على جـ ب ومن نقطة م خط م د يقطع ا جـ على ن.

٩ الصاغاني: الصغاني

ونفذه حتى يلقى ا ب المخرَج على س. ونرسل من نقطة ن عمود ن هـ على ا ب، ونعمل على قاعدة ب هـ مثلث ب ز هـ متساوي ساقي ب ز هـ ز، كل منهما مثل س ب.

فأقول: إن زاوية ب ز هـ سبع زاويتين قائمتين؛ وهي إذا ركبتْ على قوس أية دائرةٍ كانت، فصل ضلعاها من ‹دور› الدائرة سبعه.



برهان ذلك: أن نخرج د جـ، فليلق القطع المكافئ على نقطة ك، ونتمم سطح ا ل ونزيد في ا ب ا ح مثل ب س. ونخرج خط ز ح ومن نقطة ز عمود ف ز على منتصف ب هـ ومن خط هـ ح عمود ص ع على منتصف هـ ح، ونصل ص هـ. فخطا ا د ا ب لا يلقيان قطع جـ ل الزائد، لأن الخط الذي يماسّه على رأسه بينه وبين الخط الذي لا يلقاه يساوي ا جـ، ومربّعه ربع السطح المضاف إلى القطر المجانب والضلع المنتصب للذي تبين في الشكل الأول من القول الثاني من كتاب *المخروطات*، ويكون مربع ا جـ مثل سطح ا ل، كما بين في الشكل الثامن من القول المذكور. ونلقي سطح ا م المشترك، فيبقى سطح م د مساويًا لسطح ب ل، فنسبة جـ م إلى ب م كنسبة ل م إلى جـ د. ولكن جـ ك مثل جـ د، لأن مربع العمود الواقع من القطع المكافئ على سهمه مثل سطح ما يفصله من السهم، وهو جـ ط، في ضلعه القائم، وهو جـ د، وهما متساويان للذي بين

8 هـ ح (الأولى): ز ح – 10 والضلع: وضلع – 11 تبين: يتبين.

في الشكل الرابع عشر من القول الأوّل / من كتاب *المخروطات*. فنسبة جـ م إلى ب م ظ-١١٨ كنسبة ل م إلى جـ ك. ونسبة مربع جـ م إلى مربع ب م كنسبة مربع ل م إلى مربع جـ ك. لكن نسبة مربع ل م إلى مربع جـ ك كنسبة ط م إلى ط جـ المفروزين بهما من السهم، كما تبين في الشكل التاسع عشر من القول المذكور. فنسبة مربع جـ م إلى مربع ب م كنسبة ط م إلى ط جـ. ونصل ط د بخط مستقيم. فتبين أن نسبة ط م إلى ط جـ كنسبة د م إلى د ن، لتوازي خطي ط د جـ ن. فنسبة مربع جـ م إلى مربع ب م كنسبة د م إلى د ن. فأمّا نسبة مربع جـ م إلى مربع ب م، فكنسبة جـ م إلى ب م مثناة، أعني نسبة د م إلى س م مثناة، فنسبة د م إلى س م – وهذه النسبة المثنّاة – هي كنسبة سطح د م في جـ م إلى سطح س م في ب م. وأما نسبة د م إلى د ن فكنسبة سطح د م في جـ م إلى سطح د ن في جـ م، فنسبة سطح د م في جـ م إلى سطح س م في ب م كنسبة سطح د م في جـ م إلى سطح د ن في جـ م، فسطح د ن في جـ م مثل سطح س م في ب م، فنسبة د ن إلى س م كنسبة ب م إلى جـ م على التكافئ. لكن نسبة ب م إلى جـ م كنسبة س ب إلى جـ د. فنسبة د ن إلى س م كنسبة س ب إلى جـ د. فأما جـ د فمثل ا ب، وأما نسبة د ن إلى س م، فكنسبة ا هـ إلى س ب، فنسبة س ب إلى ا ب كنسبة ا هـ إلى س ب. فسطح ا ب في ا هـ مثل مربع س ب. لكن ا ح مثل س ب. فسطح ا ب في ا هـ مثل مربع ا ح. وأيضًا نسبة ا س إلى ا د كنسبة هـ س إلى هـ ن. فأمّا ا د فمثل ا ب، وأما هـ ن فمثل ا هـ، فنسبة ا س إلى ا ب كنسبة هـ س إلى ا هـ. وبالتبديل نسبة ا س إلى هـ س كنسبة ا ب إلى ا هـ؛ وبالقلب نسبة ا س إلى ا هـ كنسبة ا ب إلى ب هـ. فسطح ا س في ب هـ مثل سطح ا هـ في ا ب. فأما ا س فمثل ب ح، وأما ا ب في ا هـ، فقد تبين في الحكم الأول أنه مثل مربع ا ح، فسطح ب ح في ب هـ مثل مربع ا ح، أعني مربع ب ز. فنسبة ب ح إلى ب ز كنسبة ب ز إلى ب هـ؛ وزاوية ز ب هـ مشتركة لمثلثي ب ز هـ ب ز ح، فمثلثا ب ز هـ ب ز ح متشابهان وضلع ز هـ مثل ضلع ب ز، فضلع ز ح مثل ضلع ب ح. وأيضًا نسبة ا ب إلى ا ح كنسبة ا ح إلى ا هـ. وبالتركيب نسبة ب ح إلى ا ح / كنسبة هـ ح إلى ا هـ، وبالتبديل نسبة ب ح إلى هـ ح كنسبة ا ح إلى و-١١٩ ا هـ؛ وبالتركيب أيضًا نسبة ب ح إلى ‹نصف› مجموع ب ح هـ ح كنسبة ا ح إلى

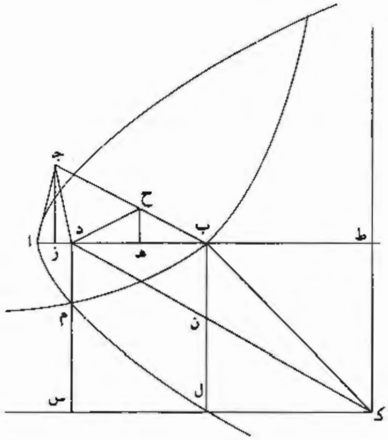
8 د م إلى س م: جـ م إلى ب م د م: ن م – 9 د م (ثانية): ن م.

نصف هـ ح. فأما نصف مجموع ب ح هـ ح، فمثل ف ح، وأما نصف هـ ح ف ع ح، وأمّا ب ح فمثل ز ح. فنسبة ز ح إلى ف ح كنسبة ا ح إلى ع ح. لكن نسبة ز ح إلى ف ح كنسبة ص ح إلى ع ح؛ وكان كنسبة ا ح إلى ع ح. ف ص ح مثل ا ح و ا ح مثل ز هـ وص هـ مثل ص ح. فخطوط ص ح ص هـ هـ ز متساوية؛ ولذلك زاوية هـ ص ز مثلا زاوية ح وزاوية ز هـ ب مثل زاويتي هـ ز ح ا ح ز. فزاوية ز هـ ب ثلاثة أمثال زاوية ح وهي مثل زاوية هـ ب ز. فزاوية هـ ب ز ثلاثة أمثال زاوية ح. وكذلك زاوية ب ز ح ثلاثة أمثال زاوية ح. فجميع زاويتي ز ب ح ب ز ح ستة أمثال زاوية ح، وجميع زوايا مثلث ب ز ح سبعة أمثال زاوية ح، وجميع زوايا مثلث ب ز ح الثلاث، أعني سبعة ‹أمثال زاوية ح مثل› زاويتين قائمتين؛ وزاوية ب ز هـ مثل زاوية ح لتشابه مثلثي ب ز هـ ب ز ح، فزاوية ب ز هـ أيضًا سُبع زاويتين قائمتين. وإذا ركبت إحدى هاتين الزاويتين على قوس أية دائرة كانت، فصل ضلعاها من الدور سبعه؛ وذلك ما أردنا عمله.

فأما رسالتي القديمة في عمل المسبع الذي سبقت الجميع إليه، وتفرّدت الطريق الذي سلكته إليه، فإني أعيد لك جملته هاهنا في شكل واحد مبرهن عليه – بعون اللّه وتوفيقه.

فلنفرض لذلك خط ا ب مستقيما معلوم النهايتين ونزيد فيه ب ط مثل ا ب. ونعمل عليه مربع ب ط كـ ل، ونعمل قطعا مكافئا، مبدأه نقطة ا وسهمه ا ط وضلعه القائم ا ب، كما بيّن في الشكل السادس والخمسين من القول الأول من كتاب *المخروطات*. وليكن قطع ا م؛ وقطعًا زائدا، مبدأه نقطة ب، وقطره المجانب مثلا قطر مربع ب ط كـ ل، وضلعه المنتصب مثل قطره المجانب، كما بين في الشكل الثامن والخمسين من القول المذكور؛ فهو لا محالة يقطع قطع ا م المكافئ. فليقطعه على م، وليكن قطع ب م. ونرسل من نقطة م عمود م د على ا ب ونعمل على قاعدة ا د مثلث ا جـ د متساوي ساقي ا جـ جـ د، وكل منهما مثل عمود م د.

19 مثلا: مثني 20 ب ط كـ ل: ب ط – 23 منهما: منها.



فأقول: إن زاوية ‹ا جـ د سبع قائمتين وزاوية› ا ب جـ أيضًا سبع قائمتين.

وإذا كانتا كذلك، فبين أنه إذا ركبت إحداهما على قوس أية دائرة كانت، فصل ضلعاها من الدور سُبعه.

برهان ذلك: أن نصل ك د بخط مستقيم؛ وليقطع ضلع ل ب على ن. ونخرج د م وك ل على استقامتهما؛ وليلتقيا على نقطة س. ونخرج من منتصفي ا د ب د عمودي ز جـ هـ ح على ا ب ونصل د ح. فخطا ك ط ك س لا يلقيان قطع م ب الزائد، لما بيّن في الشكل الأول / من القول الثاني من كتاب *المخروطات*، ويكون نسبة ب ط إلى س م – اللذين يلقيان القطع موازيين للخطين اللذين لا يلقيانه – كنسبة ك س إلى ك ط المفروزين بالخطين المذكورين من الخطين اللذين لا يلقيان القطع، كما بين في الشكل الثامن من القول المذكور وغيره من أشكال كتاب *المخروطات*. فأما ب ط فمثل ك ل؛ وأما ك ط فمثل س د، فنسبة ك ل إلى س م كنسبة ك س إلى س د. لكن نسبة ك س إلى س د كنسبة ك ل إلى ل ن، فنسبة ك ل إلى ل ن كنسبة ك ل إلى س م، فـ ل ن مثل س م، ويبقى ب ن مثل م د، ونسبة ب ن إلى ب د كنسبة ط ك إلى ط د. فأما ب ن فمثل م د، وأما ط ك فمثل ا ب، فنسبة م د إلى ب د كنسبة ا ب إلى ط د. وكنا جعلنا ا جـ مثل م د، فنسبة ا جـ إلى ب د كنسبة ا ب إلى ط د. وأيضًا مربع م د – العمود ١١٩-ظ

2 إحداهما: احدهما – 8 اللذين (الثانية): الذين – 9 اللذين: الذين.

الواقع من قطع ا م المكافئ على سهمه ا ط – مثل ضرب ا ب – الضلع القائم له – في ا د الذي أفرزه عمود م د من السهم، لما تبين في الشكل الرابع عشر من القول الأول من كتاب *المخروطات*. وا جـ مثل م د، فضرب ا ب في ا د مثل مربع ا جـ، فنسبة ا ب إلى ا جـ كنسبة ا جـ إلى ا د؛ وزاوية جـ ا د مشتركة لمثلثي ا ب جـ ا جـ د، فهما متشابهان؛ وجـ د مثل ا جـ، فـ ب جـ مثل ا ب. وكان تبين في الحكم الأول أن نسبة ا جـ إلى ب د كنسبة ا ب إلى ط د، فنسبة ا جـ إلى ب د كنسبة ب جـ إلى ط د؛ وب هـ نصف ب د وب ز نصف ط د، فنسبة ا جـ إلى ب هـ كنسبة ب جـ إلى ب ز. لكن نسبة ب جـ إلى ب ز كنسبة ب ح إلى ب هـ، فنسبة ب ح إلى ب هـ كنسبة ا جـ إلى ب هـ، فـ ب ح مثل ا جـ ود ح مثل ب ح، فـ د ح مثل ا جـ. فخطوط ب ح د ح جـ د متساوية؛ ولذلك زاوية د ح جـ مثلا زاوية ا ب جـ؛ وزاوية د جـ ح مثل زاوية د ح جـ، فزاوية د جـ ح أيضًا مثلا زاوية ا ب جـ؛ وزاوية ا د جـ مثل زاويتي د جـ ب ا ب جـ، فزاوية ا د جـ ثلاثة أمثال زاوية ا ب جـ ./ ١٢٠-و وكذلك زاوية ا جـ ب ثلاثة أمثال زاوية ا ب جـ، فزاويتا ا جـ ب جـ ا ب ستة أمثال زاوية ا ب جـ، وجميع زوايا مثلث ا ب جـ سبعة أمثال زاوية ا ب جـ، فزاوية ا ب جـ سبع زوايا مثلث ا ب جـ، أعني سبع زاويتين قائمتين. وزاوية ا جـ د مثل زاوية ا ب جـ لتشابه مثلثي ا جـ د ا ب جـ، فزاوية ا جـ د سبع زاويتين قائمتين.

وإذا ركبت إحدى زاويتي ا ب جـ ا جـ د على قوس أية دائرة كانت، فصل ضلعاها من الدور سبعه؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وقد يسر الله، وله الحمد، إخراج وتر سبع الدائرة لنا قبل الجميع وبعدهم على طريقين تفرّدت بهما، وهو أظهر وأبين وأنور مما عمله غيرنا بعد عمله الأوّل. وله جلّ جلاله الحمد على توفيقه وتأييده كثيرًا، وصلواته على محمد وآله وسلامه.

تم في يوم الأربعاء العاشر من جمادى الأولى لسنة ثلاث وخمسين ومائة وألف.

٣٧ – ظ

رسالة أبي الجود محمد بن الليث
إلى الأستاذ الفاضل أبي محمد عبد الله بن علي الحاسب
في الدلالة على طريقي الأستاذ أبي سهل القوهي المهندس
وشيخه أبي حامد الصاغاني
وطريقه التي سلكها في عمل المسبع المتساوي الأضلاع في الدائرة

وصل كتاب الأستاذ مولاي – أدام الله توفيقه – مطويًا على الرسالتين اللتين عملهما الأستاذ المبرّز أبو سهل القوهي وشيخنا المهندس أبو حامد الصاغاني – أيدهما الله – في استخراج وترسيع الدائرة؛ فحملتا إليه من بغداد. فشكرت فضله في إنفاذهما إلي. والله يحسن عن أداءه ‹ويؤديه› جزاءه. وأنا مبيّن طريق كل منهما في عمله، وطريقي التي سلكتها فيه، وتفرّدت بها في استنباطه. وحالَ الشك العارض فيما عمله شيخنا أبو حامد – أيده الله – لغلطٍ لعله وقع من نقل الوراق، ليقف الأستاذ – أدام الله عزه – من رسالتي هذه على الطرق الثلاث فيه، ومقدار معرفة صاحب كل منها.

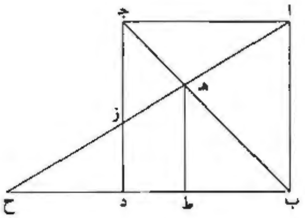
فأقول: إن كلا المهندسين المذكورين قصد الشكل الذي قدمه أرشميدس، في رسالته في عمل المسبّع، تقليدًا من غير أن عمله أو برهن عليه في تلك الرسالة، اللهم إلا أن يكون قد / صححه في موضع آخر. فاعتمده ووقع إلى بعض الناس أو لم يقع. والله ٣٨ – و
أعلم، فرام كل من هذين الأستاذين المبرزين تصحيحه والبرهان عليه وهو:

مربع ا ب جـ د، إذا أخرج قطره ب جـ وضلعه ب د غير متناهٍ، وخطٌّ من زاوية ا يقطع القطر على هـ وضلعَ جـ د على ز ويلقى خط ب د المخرج على ح، فيحدث مثلثي ا جـ هـ د ز ح متساويين داخل المربع وخارجه.

5 الصاغاني: الصغاني، ولن نشير إليها فيما بعد – 9 فحملتا: هكذا في المخطوطة، والعبارة لا تستقيم، وربما كان الأصل تتان حملتا إليه من بعد د – 10 عن أداءه ‹ويؤديه›: عن اودائه، ولا تعني شيئا. ربما كانت في الأصل مشتقة من فعل أدى – 14 كلا: كلي – 18 متناه: متناهي، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد – 19 فيحدث: ويحدث.

فأما الأستاذ أبو سهل، فإنه بحذاقته بالصناعة، ومهارته بالهندسة، أضرب عن ذكر هذا المربع والمثلثين المتساويين فيه وخارجه جملةً وتخطاها كلها إلى ما له شُكلت وبسببه عملت، وهو قسمة خط مستقيم مفروض بثلاثة أقسام، يكون ضرب مجموع القسمين الأول والثاني منها في الأول مثلَ مربع القسم الثالث، وضرب مجموع القسمين الثاني والثالث منها في الثاني مثل مربع القسم الأول؛ وعمل من هذه الثلاثة الأقسام مثلثًا، فبيّن أن إحدى زواياه مثلا الزاوية الثانية وأربعة أمثال الزاوية الثالثة، أعني أن تتوالى زواياه الثلاث على نسبة الضعف ليكون جميع زواياه مثل ومثلي وأربعة أمثال، أعني سبعة أمثال الزاوية الصغرى، فتكون الزاوية الصغرى سُبع زاويتين قائمتين، حتى إذا ركّبها على محيط دائرة ما، فصلت منه بضلعيها سُبعه.

وهذا / مثلث معروف لأرشميدس؛ وسائرُ من عمل المسبع بالحركة والآلة يعمل المسبّع ٣٨-ظ بهذا المثلث.



والخط المنقسم بهذه الأقسام هو خط ا ح على نقطتي هـ ز، لأن مثلث ا جـ هـ، إذا كان مثل مثلث د ز ح، وزاويتا جـ ا هـ د ح ا لتبادلهما متساويتان، فإن أضلاعهما متكافئة: نسبة ا هـ إلى ز ح كنسبة د ح إلى ا جـ. لكن نسبة د ح إلى ا جـ، لتشابه مثلثي ا جـ ز د ح ز، كنسبة ز ح إلى ا ز، فنسبة ا هـ إلى ز ح كنسبة ز ح إلى ا ز، فضرب ا ز في ا هـ مثل مربع ز ح، فضرب مجموع قسمي الأول والثاني في الأول مثل مربع القسم الثالث. وأيضًا إذا أخرج عمود هـ ط على ب د، فإن نسبة ط ح إلى ط هـ، أعني ط ب، كنسبة ب ح إلى ا ب، أعني ب د. وإذا بدلنا، فنسبة ط ح إلى ب ح كنسبة ط ب إلى ب د، وإذا فصلنا، فنسبة ط ح إلى ط ب كنسبة ط ب إلى ط د، فضرب ط ح في ط د مثل مربع ط ب. ولأن أقسام ا ح على نسبة أقسام ب ح،

8 فتكون: وتكون – 15 ز ح (الأولى): د ح.

فضرب مجموع قسمي الثاني والثالث من أقسام ا ح، وهو هـ ح، في هـ ز، القسم الثاني، مثل مربع ا هـ القسم الأول. وعلى هذه النسبة أقسام ب ح، وهي ب ط ط د د ح.

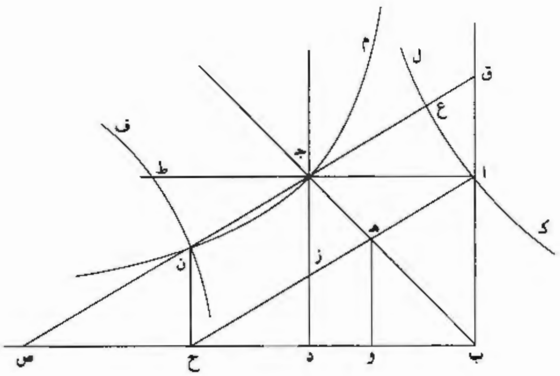
فقسم الأستاذ أبو سهل الخط بثلاثة أقسام على هذه النسب، من غير أن ذكر المربع والمثلثين المتساويين، لبراعة معرفته وذكاء فطنته، بقطعين متقاطعين، زائد ومكافئ، وعمل منهما المثلث المذكور / وبيّن أن زواياه تتوالى على نسبة الضعف. فحصلت له إحداها سُبع قائمتين، فعمل المسبع بالهندسة الثابتة في رسالته المنسوبة إليه. ٣٩-و

وأما شيخنا أبو حامد، أيده الله، فقد قصد هذا الشكل الذي قدّمه أرشميدس بعينه، أعني هذا المربع بقطر ب جـ وخط ا ح.

وأقول: إن مثلث ا جـ هـ مثل مثلث د ز ح، وحلله بثلاثة قطوع زوائد: قطعان متقابلان وثالث قاطع لأحدهما؛ ثم ركّبه وبنى عليه وعلى الخط المنقسم به بالأقسام الثلاثة على النسب المذكورة، وتمم رسالته من بعد كما تمم غيره رسالته. ولعل الشك العارض فيها لغلط وقع من الورّاق في نقلها من الأصل. وأنا أحله وأصحح ما سقم منه.

فأضع لذلك مربع ا ب جـ د بقطر ب جـ وضلع ب د غير متناهٍ من جهة د. وقد أراد أن يخرج من نقطة ا خطًا يقطع خط ب جـ على نقطة هـ وجـ د على نقطة ز ويلقى ب د على ح. ويكون مثلث ا جـ هـ الحادث داخل المربع مثل مثلث د ز ح الحادث خارجه. فزاد في ا جـ جـ ط مثله، وعمل قطعين متقابلين يجوزان على نقطتي ا ط ولا يلقاهما / خطا ب جـ د جـ – أعني إذا أخرج خطا ب جـ د جـ من جهة جـ على استقامتهما مثلاً حتى تكون زاويتاهما ‹زاويتي› جـ المتقابلتين المنفرجتين، بإخراج الخطين المذكورين – وهما قطعا كـ ل ف ن؛ وعمل قطعًا زائدًا ثالثًا يمر على نقطة جـ ولا يلقاه خطا ا ب ب د، وهو قطع م ن. فهذا القطع يقطع قطع ف ن، لأن قطع ف ن إذا أخرج، لقي خط ب د، وقطع م ن إذا أخرج لم يلقه؛ فليتقاطع قطعا ف ن م ن على نقطة ن. وأرسل من ن عمود ن ح على ب د، ووصل ا ح فقطع ب جـ على هـ وجـ د على ز. وقال إنه عمل المطلوب، وقسم ا ح بثلاثة أقسام على هـ ز على النسب المذكورة. ٣٩-ظ

1 هـ ز: هو – 2 وعلى: وهي – ب ح: ب د – 5 مكافئ: مكافٍ، ولن نشير إليها فيما بعد – 6 زواياه: زواياها – 7 ثابتة: الثابة – 10 زوائد: أثبتها فوق السطر – 11 به: هكذا ولعلها كانت في الأصل «فيه» – 13 الأصل: متآكلة – 15 نقطة (الأولى): أثبتها في الهامش مع بيان موضعها – 22 ب د: ا د.



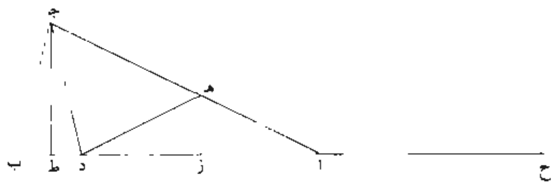
برهان ذلك: أن أخرج خط جـ ن مستقيماً، وأنفذه في جهتيه إلى خطي ا ب ب د
المخرجين، فلقيهما على نقطتي ص ق، فقطع قطع كـ ل على نقطة ع. فخطا جـ ق
ص ن انفرزا بين قطع م ن وبين الخطين اللذين لا يلقيانه، فهما متساويان، كما بيّنه
أبلونيوس في الشكل السادس من القول الثاني في *المخروطات*. وزاويتا ا ح قائمتان،
وص ح موازٍ لـ ا جـ ومساوٍ له، فـ جـ ص يوازي ا ح. ومربع جـ ع – الخارج من زاوية
قطع كـ ل إليه – مساوٍ لضرب ا ز الموازي له الموتر للزاوية التي تلي زاوية القطع، في ا هـ
الفضل منه بين القطع وبين الخط الذي لا يلقاه، لما بيّنه أبلونيوس في الشكل السابع من
القول / المذكور. ولكن جـ ع مثل جـ ن لأنهما بين القطعين المتقابلين وبين زاويتيهما للذي ٤٠-و
بيّنه أبلونيوس في الشكل الحادي والثلاثين من القول الأول من كتاب *المخروطات*. وجـ ن
مثل ز ح للتوازي؛ فإذن ضرب ا ز في ا هـ مثل مربع ز ح. وأخرج عمود هـ و على
ب د. فتبين لما تقدم بيانه أن ضرب و ح في و د مثل مربع ب و. وكذلك ضرب هـ ح
في هـ ز مثل مربع ا هـ. وكذلك انقسم ب ح، لأن نسبة أقسامه كنسبة أقسام ا ح،
فضرب ب د في ب و مثل مربع د ح، وضرب و ح في و د مثل مربع ب و.

ثم عمل مثلثاً أحد أضلاعه مثل ب و، والثاني مثل و د والثالث مثل د ح، وأخرج
الضلع المساوي لـ و د في جهتيه حتى صارت الزيادتان، كل منهما، مثل الضلع الآخر من
الذي يليه من الضلعين الباقيين. وحصل المثلث المعلوم الذي عمله أرشميدس وغيره / ممن ٤٠-ظ

7 السابع: أثبتها في الهامش مع بيان موضعها – 12 ا ح: ب د.

رام عمل المسبع بالآلة والحركة بمقدمته التي قلدها. لأن زوايا هذا المثلث متوالية على نسبة الضعف، أعني كنسبة الواحد إلى اثنين واثنين إلى أربعة، وجميع ذلك سَبْعة، والواحد سُبع سَبعة. وحصلت إحدى زواياه سبع قائمتين، فركّبها على محيط الدائرة حتى فصلت منه بضلعيها سُبعه. وذلك بيّن.

وأما أنا، أيد الله الأستاذ مولاي، فإني لقلة بضاعتي، وقرب غوري في صناعتي، استقربت البعيد، واستذللت الصعب، فسلكت الطريق التي سلكها أقليدس في أوائل كتابه في *الأصول* لعمل المخمس في الدائرة، حيث قدم له مثلثًا متساوي الساقين تكون كل واحدة من زاويتيه اللتين على قاعدته مثلي الزاوية الباقية، لتكون جميع زواياه الثلاث خمسة أمثال زاويته الصغرى، وتكون هي خُمس زواياه الثلاث المعادلة لقائمتين. فركّب هذه الزاوية الصغرى على محيط الدائرة وأخرج ضلعيها، ففصلا منه خُمسه. فعلمتُ أني إذا عملتُ مثلثًا متساوي الساقين، تكون كل من زاويتيه اللتين على قاعدته ثلاثة أمثال الزاوية الباقية، كان جميع زواياه الثلاث سبعة أمثال زاويته الصغرى، وتكون هي سُبع زواياه الثلاث المعادلة لقائمتين، حتى إذا ركبتها على محيط دائرة ما فصلت منه بضلعيها سُبعه.



فأنزلت مثلث ا ب جـ كذلك للتحليل: ساقا ا ب ا جـ منه متساويان، وكل من ٤١-و
زاويتي ا ب جـ ا جـ ب ثلاثة أمثال زاوية ب ا جـ، وحلّلت، ففصلتُ من زاوية ا جـ ب زاوية ب جـ د مثل زاوية ب ا جـ، وفصلتُ من زاوية ا د جـ زاوية ا د هـ مثل زاوية ب ا جـ، فكان ضلع ا هـ مثل ضلع هـ د لتساوي زاويتي د ا هـ هـ د ا. وزاوية د هـ جـ لذلك مثلي زاوية د ا هـ. ولأن زاوية ا جـ ب كانت مثل ثلاثة أمثال زاوية ب ا جـ، وقد فصل منها زاوية ‹ب جـ د مثل زاوية› هـ د ا مثل زاوية ب ا جـ، فقد بقيت زاوية هـ جـ د مثلي زاوية د ا هـ، أعني مثل زاوية د هـ جـ، فضلع د جـ مثل ضلع د هـ. ولأن

5 غوري: عوزي، انظر 14 .855 – 10 ضلعيها: ضلعاها – 19 مثل: أثبتها فوق السطر – 21 مثلي زاوية: مثل زوايتي.

زاوية ب مشتركة لمثلثي ا ب جـ د ب جـ وزاوية ب جـ د مثل زاوية ب ا جـ، فإن مثلث
ا ب جـ المتساوي الساقين شبيه بمثلث ب جـ د، فهو أيضًا متساوي الساقين، فضلع ب جـ
مثل ضلع جـ د. وخطوط ب جـ جـ د د هـ هـ ا متساوية؛ ولتشابه مثلثي ا ب جـ
ب جـ د، فإن نسبة ا ب إلى ب جـ كنسبة ب جـ إلى ب د. فضرب ا ب في ب د
مثل مربع ب جـ؛ وا هـ مثل ب جـ. فضرب ا ب في ب د مثل مربع ا هـ. فأرسلت من
نقطتي جـ هـ عمودي جـ ط هـ ز على خط ا ب فتوازيا، وصارت نسبة ا هـ إلى ا ز
كنسبة ا جـ، أعني ا ب، إلى ا ط. وزدت في ا ب ا ح مثل ا د، فصار جميع ب ح
مثلي ا ط؛ وا د مثلا ا ز، فتكون لذلك نسبة ا هـ إلى ا د / كنسبة ا ب إلى ب ح. فقد ٤١-ظ
انقسم ا ب مثلاً على نقطة د بقسمين، يكون ضرب ا ب في أحدهما، وهو ب د، مثل
مربع ا هـ، ونسبة ا هـ إلى القسم الآخر من ا ب، وهو ا د، كنسبة جميع ا ب إلى
ب ح. ووجدتُ ب ح مثل مجموع خطي ا ب ا د. فعلمتُ أني إذا قسمتُ خطًا
مستقيما مفروضًا بقسمين، ضرب جميعه في أحد القسمين مثل مربع خط نسبته إلى
القسم الآخر كنسبة جميع الخط إلى مجموعه والقسم الآخر. كنت قد حصلت مثلثًا
متساوي الساقين يكون جميع زواياه سَبعة أمثال الزاوية الصغرى منها، وحصل لي بذلك لما
بينتُه من قبل عمل المسبع المتساوي الأضلاع في الدائرة؛ لأني ركبتُ زاويته الصغرى على
محيطها، ففصلت بضلعيها منه سُبعه.

فتركتُ ذكر التحليل تنكبًا للتطويل وتجنبًا للتثقيل. وفرضت خط ا ب ورمتُ قسمته
بقسمين على النسبة المذكورة، أعني ضرب ا ب في أحد قسميه مثل مربع خط نسبته إلى
القسم الآخر كنسبة ا ب إلى مجموعه والقسم الآخر. فلم يمكنني ذلك إلا / بقطعين من ٤٢ و
قطوع المخروطات متقاطعين: زائد ومكافئ. فقسمتُه بهما، وعملت المثلث الذي حللته إلى
ذلك، وفصلت به من محيط الدائرة سُبعه. وعملت الرسالة المنسوبة إليّ فيه في سنة ثمانٍ
وخمسين وثلاثمائة للهجرة باسم الشيخ الجليل أبي الحسين عبيد الله بن أحمد، أطال الله
بقاءه، وكنت عرضت في تلك السنة على الأستاذ سيدي، أدام الله عزه، سواد هذه
الرسالة.

ومن تأمل عملي وعمل غيري في المسبع، علِم أني تفردت بالطريق التي سلكتها،
وقرّبت ما أمكن التقريب في ذلك الوقت؛ وأن الأستاذ المبرّز أبا سهل القوهي وشيخنا

1 مثلث: مثلثي – 2 مثلث: مثلث – 3 ولتشابه: أثبت الواو فوق السطر – 4 ا ب (الثانية): كتبها «ا ب جـ»، ثم ضرب عليها بالقلم – 6 هـ ز: هو – ا ز: ا د.

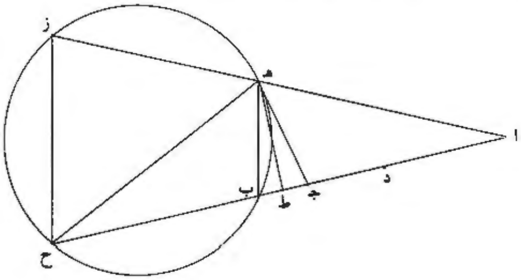
المهندس الحاذق أبا حامد الصاغاني، أيدهما الله، سلكا طريق أرشميدس، وصححا مقدمته المذكورة وبنيا على ما أسسه، ونعم ما فعلا، وأن قسمة الخط المفروض بقسمين، كما عملت، أقرب من قسمته بثلاثة أقسام كما عملاه، وأن القياس الذي استعملتُه في عمل المثلث المتساوي الساقين وكل من زاويتيه اللتين على القاعدة ثلاثة أمثال الزاوية الباقية مُطردٌ في سائر المضلعات، التي أضلاع كل منها فرد، وليس يطرد قياسهما في جميعها: لأنه قد يُوجد مثلث متساوي الساقين تكون كل من زاويتيه اللتين على قاعدته خمسة / أمثال الزاوية الباقية، فيحصل به ذو الإحدى عشرة قاعدة متساويات في دائرة؛ ٤٢-ظ ولا يُوجد مثلث زواياه الثلاث متوالية على نسبة ما من الأضعاف، فيحصل به ذو الإحدى عشرة قاعدة متساويات في دائرة. وكذلك أكثر المضلعات المتساوية الأضلاع، التي عدة أضلاع كل منها فرد. ومعلوم أيضاً أن القطع المكافئ أقرب من القطع الزائد. وقد استعمل شيخنا أبو حامد – أيده الله – بدله زائدين، فعَمَلُه لذلك ولما سِواه أبعد.

وأنا معترف بتقدم الأستاذ أبي سهل – أدام الله سلامته وتبريزه – عليّ وعلى أمثالي، وبأنه نسيج عصره في صناعة الهندسة، وبقوة شيخنا أبي حامد، أيده الله، على التسبيع وغيره من الأشكال الهندسية الغريبة، فلقد تمهر بها، وتدرب فيها.

وشغلتني الأعمالُ السلطانية كُلفتَها والاعتماداتُ الجليلة عن فنها، دون خطبتي لها، إذ رغبتني منذ سنين كثيرة في شتّى منها عن الدرس والتدريس لها. ولذلك ينكر بعض المهندسين اليسير من معرفتي والقليل من عملي فيوهم أني منتحله لا عامله، ولهذا مَنْ انسأل سألت الأستاذ سيدي، أدام الله عزه، إذ هو المتوسط والمبرز والمعلم لهذه العلوم والشاهدُ العَدْلُ / والحَكَمُ الصدق في كتابي المتقدم أن يتعرف من المشايخ المهندسين ٤٣-و الحاضرين الحضرة أجلها الله وأيدهم: هل عمل أحد المُسبع بقطع واحد؟ أو هل مَعَنَ بعلمهم أحد في عمل ذي الإحدى عشرة قاعدة متساويات في دائرة؟ وأن يعرفني مرجوعهم في الجواب، حتى إذا أنفذت عملي في الشكلين المذكورين لم يَسُؤْ خلقهم بقدح فيه كما ساءت مرات بقدحهم فيما سواه، ونسبهم إلى غيري إياه؛ ومن عند الله التوفيق والمعونة، وبه الحول والقوة، وحسبنا الله ونعم المعين، وهو المحمود على ما ألهمْناه حتى علمناه، والمسؤول التأييد لإدراك ما جهلناه فحرمناه.

1 أبا: ابو – 7 عشرة: عشر – 9 عشرة: عشر – 15 عليّ: على – 17-18 من سأل: من سال.

وأنا مبيّن تحليل ما عملته آنفًا في المسبع إلى أن أنفذ إلى الأستاذ مولاي أدام الله عزه، رسالتي المخصوصة به، فيعلم أنه أقرب وأسهل مما عمله غيري وعملته أنا من قبل.



فلنخط لذلك دائرة ب هـ ز ‹تحيط› بذي أربعة أضلاع ب هـ ز ح، ولتتساو أضلاع هـ ز زح ب ح الثلاثة لتساوي قسي هـ ز زح ب ح الثلاث. وليكن كل منها ضعف قوس ب هـ، فيكون جميعها ستة أمثال قوس ب هـ، وجميع محيط الدائرة سبعة أمثال قوس ب هـ، فقوس ب هـ سبعة أمثاله محيط دائرة ب هـ ز، ووتر ب هـ ضلع المُسبع الواقع في دائرة ب هـ ز. وإذا أخرجنا ز هـ ح ب على استقامة التقيا، فليلتقيا / على ا، ٤٣-ظ ونخرج هـ ح، فيكون زاوية ز هـ ح مثلي زاوية هـ ح ب لأن قوس ز ح فرضت مثلي قوس ب هـ. ولكن زاوية ز هـ ح مثل زاويتي هـ ا ح ا ح هـ، فزاويتا هـ ا ح ا ح هـ مثلا زاوية ا ح هـ، فزاوية هـ ا ح مثل زاوية ا ح هـ، وضلع ا هـ مثل ضلع هـ ح، وا هـ مثل ا ب لأن هـ ز مثل ب ح؛ وزاوية ا ز ح مثل زاوية ا ح ز لتساوي قوسي هـ ز ب ح. ونرسل من نقطة هـ عمود هـ ط على ا ب، فيكون ا ط مثل ط ح، ونفصل من ا ط ط جـ مثل ط ب، فيبقى ا جـ مثل ب ح؛ وب ح أطول من ب هـ، فـ ا جـ أطول من ب هـ، فنفصل من ا جـ ا د مثل ب هـ. ولأن نسبة ب هـ إلى ا ب كنسبة ز ح إلى ا ح لتوازي ب هـ ز ح، وا د مثل ب هـ وا جـ مثل ب ح، أعني ز ح، فإن نسبة ا د إلى ا ب كنسبة ا جـ إلى ا ح. وإذا فصلنا، فنسبة ا د إلى د ب كنسبة ا جـ إلى جـ ح، وإذا بدلنا، فنسبة ا د إلى ا جـ كنسبة د ب إلى جـ ح. لكن جـ ح مثل ا ب، لأن ا جـ مثل ب ح وجـ ب مشترك، فنسبة ا د إلى ا جـ كنسبة د ب إلى ا ب؛ وإذا فصلنا، فنسبة ا د

4 منها: منهما – 8 هـ ح ب: كتب بعدها «ا حـ هـ فزاويتا»، ثم ضرب عليها بالقلم – 9 مثل: مثلي.

إلى د جـ كنسبة د ب إلى ا د، فضرب د ب في د جـ مثل ضرب ا د في نفسه. وأيضًا، فإنا نصل جـ هـ، وجـ ط مثل ط ب، وزاوية ط قائمة، فـ جـ هـ مثل ب هـ، وزاوية ب مشتركة لمثلثي ا ب هـ جـ ب هـ، فهما متشابهان، ونسبة ا ب إلى ب هـ كنسبة ب هـ إلى ب جـ. ولكن ب هـ مثل ا د، فنسبة ا ب إلى ا د كنسبة ا د / إلى ب جـ، ٤٤-و فضرب ا ب في ب جـ مثل مربع ا د. وقد كان ضرب ب د في د جـ مثل مربع ا د أيضًا.

فقد أدى هذا التحليل إلى قسمة خط مفروض مستقيم بثلاثة أقسام، وضرب جميع الخط في القسم الثالث مثل مربع القسم الأول، وضرب مجموع قسمي الثاني والثالث في الثاني أيضًا مثل مربع القسم الأول؛ وهذا أقرب وأسهل من إيجاد خط مقسوم بثلاثة أقسام، وضرب مجموع القسمي الأول والثاني في الأول مثل مربع القسم الثالث، وضرب مجموع القسمي الثاني والثالث في الثاني مثل مربع القسم الأول، كما وضعه أرشميدس وعمله الأستاذ أبو سهل وشيخنا أبو حامد، أيدهما الله، لعمل المسبع. وهو أيضًا أسهل من قسمة الخط بقسمين، ضرب جميع الخط في أحدهما مثل مربع خط نسبته إلى القسم الآخر كنسبة جميع الخط إلى مجموعه وذلك القسم الآخر، كما عملته أنا من قبل لعمل المسبع أيضًا. ويسهل قسم الخط على النسبة المذكورة بكل من الأعمال التي تقدم ذكرها، ولكني قاسمه بقطع واحد، وتلك الأعمال كلها إما بقطعين، مكافئ وزائد، وإما بثلاثة قطوع زوائد.

وأذكر التركيب أيضًا إنما دون البرهان على المقدمة المصححة في الرسالة المخصوصة بهذا العمل. /

فليكن خط ا ب المستقيم المفروض مقسومًا على نقطتي جـ د، وضرب ا ب في ٤٤-ظ ب جـ مثل مربع ا د، وكذلك ضرب ب د في د جـ مثل مربع ا د. ونعمل مثلث ا ب هـ وا هـ مثل ا ب وب هـ مثل ا د. ونخرج ا ب ا هـ على استقامتهما إلى ح ز حتى يصير كل من ب ح وهـ ز مثل ا جـ، ونصل ز ح وندير على ذي أربعة أضلاع ب هـ ز ح دائرة ب هـ ز تحيط به؛ وذلك سهل.

فأقول: إن أضلاع هـ ز ز ح ب ح الثلاث متساوية، وإن كل من القسي الثلاث التي توترها مثلا قوس ب هـ، وإن قوس ب هـ سبع محيط دائرة ب هـ ز، ووتر ب هـ ضلع المسبع المتساوي الأضلاع الواقع في دائرة ب هـ ز.

2 وجـ ط: فجط – 10 مجموع ... وضرب: أثبتها في الهامش مع بيان موضعها – 18 إنما: اىما – 22 ا د: كتبها بد، ثم ضرب عليها بالقلم – 25 كل: كلا – 26 مثلا: مثلى.

برهان ذلك: أن ضربَ د ب في د جـ مثل مربع ا د، ونسبة ا د إلى د جـ كنسبة د ب إلى ا د. وإذا ركّبنا، فنسبة ا د إلى جـ ا كنسبة د ب إلى ا ب. ولكن ا ب مثل جـ ح لأن ا جـ مثل ب ح وجـ ب مشترك. فنسبة ا د إلى ا جـ كنسبة د ب إلى جـ ح. وإذا بدلنا، فنسبة ا د إلى د ب كنسبة ا جـ إلى جـ ح. / وإذا ركّبنا، فنسبة ا د إلى ا ب ٤٥-و كنسبة ا جـ إلى ا ح. ولكن ا د مثل ب هـ وا جـ مثل ب ح. فنسبة ب هـ إلى ا ب كنسبة ب ح إلى ا ح. لكن نسبة ب هـ إلى ا ب كنسبة ز ح إلى ا ح لتوازي ز ح ب هـ. فنسبة ز ح إلى ا ح كنسبة ب ح إلى ا ح. فـ ز ح مثل ب ح، فهو مثل هـ ز. فخطوط هـ ز ز ح ب ح متساوية وقسي هـ ز ز ح ب ح الثلاث أيضا متساوية.

وأيضًا، فإنا نصل هـ جـ وننصف جـ ب بنقطة ط ونصل هـ ط. فلأن ضرب ا ب في ب جـ مثل مربع ا د وب هـ مثل ا د، فإن ضرب ا ب في ب جـ مثل مربع ب هـ، فنسبة ا ب إلى ب هـ كنسبة ب هـ إلى ب جـ، وزاوية ا ب هـ مشتركة لمثلثي ا ب هـ جـ ب هـ، فإنهما متشابهان. وا ب مثل ا هـ، فـ جـ هـ مثل ب هـ. وهـ ط عمود على جـ ب وا ط مثل ط ح لأن ا جـ مثل ب ح وجـ ط مثل ط ب، فـ ا هـ مثل هـ ح، وزاوية ا مثل زاوية هـ ح ب. ولكن زاوية ز هـ ح الخارجة مثل زاويتي ا هـ ح ب المتساويتين، فزاوية ز هـ ح مثلا زاوية هـ ح ب، فقوس ز ح مثلا قوس ب هـ. وكذلك كل من قوسي هـ ز ب ح مثلا قوس ب هـ، وجميع قسي هـ ز ‹ز ح› ح ب ستة أمثال قوس ب هـ، فجميع محيط دائرة ب هـ ز سبعة أمثال قوس ب هـ، فقوس ب هـ سُبع محيط دائرة ب هـ ز ووتر ب هـ ضلع المسبع المتساوي الأضلاع الواقع في دائرة ب هـ ز؛ وذلك ما أردنا بيانه.

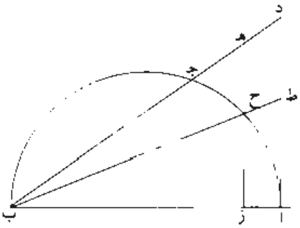
صورة الشكل قد تقدمت./

وإذا أنفذت الرسالة المخصوصة بهذا العمل إلى الأستاذ مولاي، أدام الله تأييده، بعد ٤٥-ظ ارتضائه ما أومأت إليه منها، وقف على البرهان على المقدمة التي ذكرتها بقطع واحد – إن شاء الله.

قد استعملت، أيد الله الأستاذ سيدي، مع القطع الواحد من قطوع المخروطات فيما عملته آنفًا مقدمتين من كتاب *الأصول*: إحداهما، إذا أخرج من نقطة ب من خط ا ب القطر خط يقطع دائرة ا جـ ب على جـ، وأخرج من نقطة ا عمود على ا ب حتى يلقى

1 ا د: ا جـ، وأثبت «ا د» في الهامش مع «ظ» فوقها – 2 ا د (الأولى): ا جـ – ا جـ: جـ ب – 10 ا د (الثانية): ا جـ – 16 قسي: قوس – 22 وقف: ووقف، أشار الناسخ أو أحد غيره إلى زيادة الواو الأولى، فأحاطها بنقط – 26 يلقى: تلقى.

ب جـ المخرج على د. كيف نخرج من خط جـ د خطًا كخط هـ ز يوازي ا د، فيقطع المحيط على ح، وتكون نسبة هـ ح إلى ز ح كنسبة مفروضة.



وذلك سهل بأن نقسم ا د بنقطة ط على النسبة المفروضة، ونخرج ب ط، فيقطع لا محالة الدور، فليقطعه على ح. ونجيز عليه هـ ز موازيًا لـ ا د. فتكون نسبة هـ ح إلى ز ح كالنسبة المفروضة؛ وذلك بيّن. /

والمقدمة الثانية أن نخرج هـ ز موازيًا لـ ا د العمود حتى يكون مثل الخط الواصل بين ا ح؛ وذلك أيضًا غير بعيد. ٤٦-و

ولم أنفذ الرسالة بهذا العمل للمقدمة التي كنت قدمتها من قبل – والله الموفق للصواب بمنّه.

تم والحمد لله. وكتب من نسخة بخط أحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي، ووافق الفراغ بكشك همذان في د يب ز ثمد، وصلى الله على نبيه محمد وآله.

4 عنه: عنها – 5 بيّن: تبين 8 قدمتها: قدمته – 10 السجزي: الشجري.

رسالة محمد بن الليث إلى أبي محمد عبد الله بن علي الحاسب في طريقي أبي سهل القوهي وشيخه أبي حامد الصاغاني في عمل المسبع المتساوي الأضلاع في الدائرة*

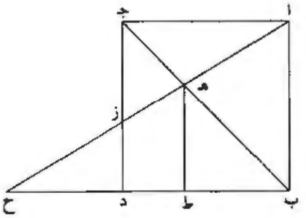
١٣٣ - و

اعلم أن هذين الأستاذين راما تصحيح المقدمة المذكورة في رسالة أرشميدس في عمل المسبع من غير أن برهن عليها وهي: مربع ا د على قطر ب جـ. وأخرج ب د غير متناهٍ وا هـ زح حتى يكون مثلث ا هـ جـ كمثلث ح د ز.

أما أبو سهل، فلمهارته في الهندسة، أضرب عن ذكر المربع والمثلثين المتساويين، وتخطاها كلها إلى ما له شُكِلت وبسببه عملت وهو قسمة خط بثلاثة أقسام. يكون ضرب قسمي الأول والثاني في الأول كمربع الثالث، وضرب الثاني والثالث في الثاني كمربع الأول، وعمل من هذه الأقسام الثلاثة مثلثا. وبيّن أن إحدى زواياه مثلا الثانية وأربعة أمثال الثالثة، أي تتوالى زواياه على نسبة الضعف، ليكون الجميع مثل ومثلي وأربعة أمثال. أعني سبعة أمثال الزاوية الصغرى التي تكون سُبع قائمتين. حتى إذا ركبها على محيط ما، فصلت منه بضلعيها سُبعه.

والخط المنقسم بهذه الأقسام، وهو ا هـ زح، إذ من تساوي ا جـ هـ ح د ز وزاويتي ح جـ ا هـ، يكون ا هـ إلى زح كـ د ح إلى ا جـ، أعني زح إلى ا ز لتشابه ا جـ ز د ح ز، فـ ا هـ إلى زح كـ زح إلى ا ز، فـ ا ز – الأول والثاني – في ا هـ الأول كمربع زح الثالث. ونخرج عمود هـ ط، فـ ح ط إلى ط هـ، أي ط ب، كـ ح ب إلى ب ا، أي [ب ا] إلى ب د. فبالإبدال ح ط إلى ح ب كـ ط ب إلى ب د. فبالتفصيل ح ط إلى ط ب كـ ط ب إلى ط د، فـ ط ح في ط د كمربع ط ب. ولأن أقسام ا ح على نسب أقسام ب ح، فضرب ح هـ – الثاني والثالث – في ز هـ الثاني كمربع ا هـ الأول.

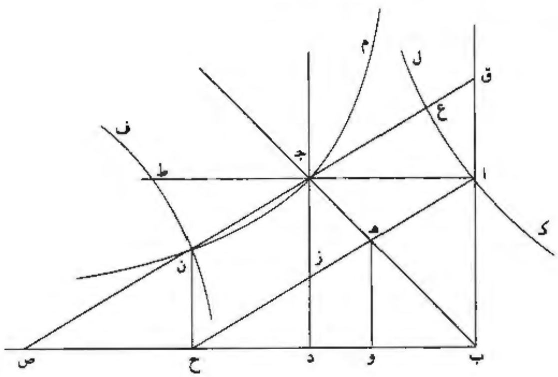
* هذه النسخة من نص السابق هي تحرير مختصر له، مجهول المؤلف – 3 الصاغاني: الصغاني، ولن نشير إليها فيما بعد – 6 حتى: كتب قبلها كلمة مطموسة في المخطوطة ولعلها «يكون»، ثم ضرب عليها بالقلم – 8 وبسببه: وبسببه وهو: وهي – 16 زح (الثانية): د ح.



فالأستاذ أبو سهل قسم هذا الخط بهذه الأقسام بقطعين، زائد ومكافئ، وعمل المثلث في رسالته المنسوبة إليه.

وأما شيخنا أبو حامد، فحلّل مقدمة أرشميدس بثلاثة قطوع زوائد: قطعان متقابلان وثالث قاطع لأحدهما؛ ثم ركّبه وبنى عليه وعلى الخط المنقسم به بثلاثة أقسام على النسب المذكورة، وتمم رسالته من بعد كما تمم غيره رسالته. ولعل الشك العارض فيها لغلط وقع من الوراق في نقلها من الأصل. وأنا أحله وأصحح ما سقم منه.

فالشيخ زاد في ا جـ جـ ط مثله، وعمل قطعي كـ ل ف ن المتقابلين على ا ط ولا يلقاهما ب جـ د جـ، وتكون زاويتاهما زاويتي جـ المتقابلتين المنفرجتين، وقطع م ن الزائد على جـ ولا يلقاه ا ب ب د، فهو يقطع ف ن؛ وليكن على ق، لأن ف ن إذا أخرج لقي ب د وم ن، لم يلقه. وأرسل عمود ن ح على ب د ووصل ا ح. وقال إنه عمل المطلوب. وقسم ا ح على هـ ز القسمة المذكورة.

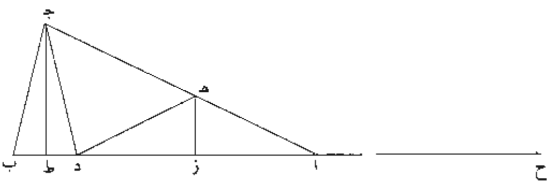


4 ركّبه: الضمير يعود على «الشكل»، وهو ما نجده في النسخة الأصلية / به بثلاثة أقسام: في النسخة الأصلية «به بالأقسام الثلاثة»، ومن الواضح أن محرر هذه الرسالة أراد تصحيح العبارة – 8 زاويتي: زاويتا – 9 وليكن على ق: ناقصة في النسخة الأصلية.

برهانه أنه أخرج ن جـ إلى ق ص من ب ا ب د، فقطع قطع كـ ل على ع، فـ جـ ق كـ ن ص لشكل و من ب من *المخروطات*؛ وا ح قائمتان وص ح موازٍ لـ ا جـ ومساوٍ له، فـ جـ ص يوازي ا ح. ومربع جـ ع – الخارج من زاوية قطع كـ ل إليه، أعني جـ ن، لشكل لا من ا منها، بل ز ح، لتوازيهما – مساوٍ لضرب ا ز الموازي له الموتر للزاوية التي تلي زاوية القطع، في ا هـ الفضل منه بين القطع وبين الخط الذي لا يلقاه لشكل ز من ب منها، فـ ا ز في ا هـ كمربع ز ح. وأخرج عمود هـ و. فتبيّن كما تقدم أن و ح في و د كمربع ب و، وكذا هـ ح في هـ ز كمربع ا هـ، وكذا انقسم ب ح لأن نسبة أقسامه كنسبة أقسام ا ح، فـ ب د في ب و كمربع د ح، وو ح في و د كمربع ب و.

ثم عمل مثلثًا من ب و و د د ح، وأخرج الضلع المساوي لـ و د في جهتيه حتى صارت الزيادتان، كل منهما، مثل الضلع الذي يليه من الضلعين الباقيين. وحصل المثلث المعلوم الذي عمله أرشميدس وغيره ممن رام المسبع بالآلة والحركة بمقدمته التي قلدها، لأن زوايا هذا المثلث متوالية على نسبة الضعف، أعني كنسبة الواحد إلى اثنين واثنين إلى أربعة وجميع ذلك سَبعة والواحد سُبعها، وحصلت إحدى زواياه سُبع قائمتين، فركبها على محيط الدائرة حتى فصلت منه بضلعيها سُبعه؛ وذلك بيّن.

وأما أنا فسلكت طريقة أوقليدس في عمله في مثلث المخمس، إذ حصل منه أن جميع زواياه تكون خمسة أمثال الزاوية الصغرى. فإذا ركبت على المحيط، فصل ضلعاه خُمسه. فعلمت أني إذا عملت مثلثًا متساوي الساقين، كلٌّ من زاويتي قاعدته ثلاثة أمثال الباقية، حتى يكون جميع زواياه سبعة أمثال الصغرى. فإذا ركبت على المحيط، فصل ضلعاه سُبعه.



فعلى التحليل أنزلت أن ا ب كـ ا جـ وكل من ب جـ ثلاثة أمثال ا، ففصلت من جـ ب جـ د كـ ا، ومن ا د جـ ا د هـ كـ ا، فـ ا هـ كـ هـ د، وكل من د جـ هـ د هـ جـ

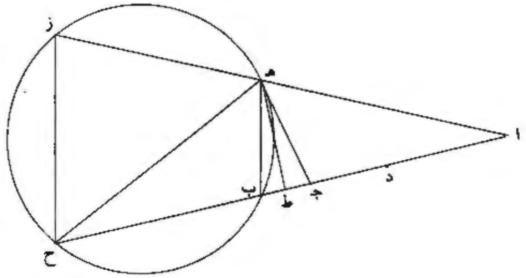
7 وح: ن ح – 8 اح: ب د – 15 عمله في: غير واضحة؛ ويعني بـ «مثلث المخمس» المثلث اللازم لعمل المخمس، انظر النص الأصلي ص. 717.

ضعف ا، فـ د هـ ك د جـ، ولاشتراك ب في مثلثي ب جـ د ب جـ ا وتساوي ب جـ د ا، فهما متشابهان، وا ب جـ متساوي الساقين، فكذا ب جـ د، فـ ب جـ ك جـ د، فـ ب جـ جـ د د هـ هـ ا / الأربعة متساوية؛ ولأن ا ب إلى ب جـ ك ب جـ إلى ١٣٣ - ظ ب د، فـ ا ب في ب د كمربع ب جـ، أعني مربع ا هـ. ونخرج عمودي جـ ط هـ ز، فتوازيا، وصارت ا هـ إلى ا ز ك ا جـ، أعني ا ب، ‹إلى› ا ط. ونخرج ا ح ك ا د، فـ ب ح ضعف ا ط، وا د مثلا ا ز، فـ ا هـ إلى ا د ك ا ب إلى ب ح. فقد انقسم ا ب على د، وا ب في ب د كمربع ا هـ، وا هـ إلى القسم الآخر من ا ب، وهو ا د ك ا ب إلى ب ح. ووجدت ب ح ك ا ب ا د. فعلمت أني إذا قسمت خطًا بقسمين، ضرب جميعه في أحد القسمين كمربع خط نسبته إلى القسم الآخر كنسبة جميع الخط إلى مجموعه والقسم الآخر، كنت قد حصلت مثلثًا متساوي الساقين يكون جميع زواياه سَبعة أمثال الصغرى منها. فإذا ركبت الصغرى على المحيط، فصل ضلعاها سُبعه.

فتركتُ ذكر التحليل تجنبًا عن التطويل، وفرضت ا ب، ورمتُ قسمته بقسمين على النسبة المذكورة، أعني ا ب في أحد قسميه كمربع خط نسبته إلى القسم الآخر ك ا ب إلى مجموعه والقسم الآخر. فلم يمكنني ذلك إلا بقطعين، زائد ومكافئ. فقسمتُه بهما وعملت المثلث الذي حللته إلى ذلك وفصلت به من المحيط سُبعه، وعملت رسالة فيه في سنة ثمانٍ وخمسين وثلاثمائة هجرية باسم الشيخ أبي الحسين عبد الله بن أحمد.

وقسمة الخط بقسمين، كما عملت، أقرب من قسمته بثلاثة أقسام كما عمل أبو سهل القوهي وشيخنا أبو حامد الصاغاني. والقياس الذي استعملتُه من المثلث الموصوف مُطرد في سائر المضلعات التي ‹عدة› أضلاعها فرد، ولا تطرد قياساتها إذ قد يوجد مثلث متساوي الساقين، كل من زاويتي قاعدته خمسة أمثال الباقية، فيحصل به ذو الإحدى عشرة قاعدة متساويات في دائرة، ولا يوجد مثلث زواياه الثلاثة متوالية على نسبة ما من الأضعاف، فيحصل به ذو الإحدى عشرة قاعدة. وكذا أكثر المضلعات المتساوية الأضلاع التي عدة أضلاعها فرد، ومعلوم أيضًا أن القطع المكافئ أقرب من الزائد.

16 بهما: بها – 17 عبد: عبيد في النسخة الأصلية.



وأنا مبيّن تحليل ما عملته آنفًا في المسبع.

فلنرسم ذا أربعة أضلاع ب هـ زح في دائرة ب ز، ولتتساو قسي هـ ز زح ح ب وأوتارها. وليكن كل منها ضعف ب هـ، والمحيط سبعة أمثال هـ ب، وهـ ب ضلع المسبع. ونخرج ز هـ ح ب ليلتقيا على ا، وهـ ح؛ فـ ز هـ ح، أعني ا ح هـ وا، مثلا هـ ح ب، وهـ ح كـ هـ ا، أعني ا ب، لأن هـ ز كـ ب ح وز كـ ح وقوس هـ ز كقوس ب ح. فنخرج عمود هـ ط، فـ ا ط كـ ط ح، ونفصل ط جـ كـ ط ب فـ ا جـ كـ ب ح وب ح أطول من ب هـ، فـ ا جـ أطول من ب هـ، فنفصل ا د كـ ب هـ. ولأن ب هـ إلى ا ب كـ زح إلى ا ح لتوازي ب هـ زح؛ وا د كـ ب هـ وا جـ كـ ب ح، أي زح، فـ ا د إلى ا ب كـ ا جـ إلى ا ح. وبالتفصيل ا د إلى د ب كـ ا جـ إلى ح جـ. وبالإبدال ا د إلى ا جـ كـ د ب إلى جـ ح، أي ا ب، لأن ا جـ كـ ب ح وجـ ب مشترك، فـ ا د إلى ا جـ كـ د ب إلى ا ب. وبالتفصيل ا د إلى د جـ كـ د ب إلى ا د، فـ د ب في د جـ كمربع ا د. وأيضًا نصل جـ هـ، فيكون كـ ب هـ وب مشتركة لـ ا ب هـ جـ ب هـ، فـ ا ب إلى ب هـ، أي ا د، كـ ب هـ، أي ا د، إلى ب جـ، فـ ا ب في ب جـ كمربع ا د؛ وكان ب د في د جـ كمربع ا د أيضًا.

فقد أدى هذا التحليل إلى قسمة خط بثلاثة أقسام، ضرب الخط في القسم الثالث كمربع القسم الأول، وضرب مجموع قسمي الثاني والثالث في الثاني كمربع القسم الأول؛ وهذا أقرب من قسمة الخط على ما وضعه أرشميدس وعمله الأستاذ أبو سهل وشيخنا أبو حامد؛ وهو أيضًا أسهل من قسمة الخط بقسمين، ضرب جميع الخط في أحدهما كمربع خط نسبته إلى القسم الآخر كنسبة جميع الخط إلى مجموعه وذلك

2 ذا: ذي / زح: زهـ – 12 اد: ار.

القسم الآخر، كما عملته أنا من قبل لعمل المسبع أيضًا. ويسهل قسمة الخط على النسبة المذكورة بكل من الأعمال التي تقدم ذكرها. ولكني قاسمه بقطع واحد. فتلك الأعمال إما بقطعين، زائد ومكافئ، وإما بثلاثة قطوع زوائد.

وأذكر التركيب أيضًا إنما دون البرهان على المقدمة المصححة في الرسالة المخصوصة.

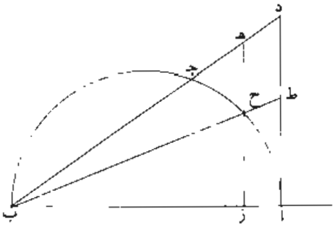
فلنقسم ا ب على جـ د، وا ب في ب جـ كمربع ا د، وب د في د جـ كمربع ا د. ونعمل مثلث ا ب هـ، وا هـ كـ ا ب وب هـ كـ ا د. ونخرج ا ب ا هـ إلى ز ح حتى يصير كل من هـ ز ب ح كـ ا جـ. ونصل ز ح، ونرسم على ذي أربعة أضلاع ب هـ ز ح دائرة ب ز تحيط به؛ وذلك سهل.

وأقول: إن أضلاع هـ ز ز ح ح ب الثلاثة متساوية، وإن كل واحدة من قسيها مثلا قوس ب هـ، وب هـ ضلع المسبع في الدائرة.

برهانه: أن د ب في د جـ كمربع ا د، وا د إلى د جـ كـ د ب إلى ا د، وبالتركيب ا د إلى ا جـ كـ د ب إلى ا ب، أي جـ ح، لأن ا جـ كـ ب ح وجـ ب مشترك، فـ ا د إلى ا جـ كـ د ب إلى جـ ح. وبالإبدال ا د إلى د ب كـ ا جـ إلى جـ ح. وبالتركيب ا د إلى ا ب كـ ا جـ إلى ا ح. ولكن ا د كـ ب هـ، / وا جـ كـ ب ح، فـ ب هـ إلى ١٣٤ و
ا ب – أعني ز ح إلى ا ح لتوازي ز ح ب هـ – كـ ب ح إلى ا ح، فـ ز ح كـ ب ح، أي هـ ز، وهـ ز ز ح ب ح متساوية وقسيها أيضًا متساوية.

وأيضًا نصل جـ هـ، وننصف جـ ب على ط، ونصل هـ ط. فلأن ا ب في ب جـ كمربع ا د، وب هـ كـ ا د، فإن ا ب في ب جـ كمربع ب هـ، فـ ا ب إلى ب هـ كـ ب هـ إلى ب جـ، وا ب هـ مشتركة لمثلثي ا ب هـ جـ ب هـ، فهما متشابهان، وا ب كـ ا هـ، فـ جـ هـ كـ ب هـ وهـ ط عمود على جـ ب، وا ط كـ ط ح لأن ا جـ كـ ب ح وجـ ط كـ ط ب، فـ ا هـ كـ هـ ح، وا كـ هـ ح ب، ولكن خارجة ز هـ ح كـ ا هـ ح ب المتساويتين، فـ ز هـ ح مثلا هـ ح ب، فـ ز ح مثلا قوس ب هـ؛ وكذا كل من قوسي هـ ز ب ح مثلا قوس ب هـ، فجميع الخط سبعة أمثال قوس ب هـ، فـ ب هـ ضلع المسبع المتساوي الأضلاع الواقع في دائرة ب هـ ز.

قد استعملت مع القطع الواحد من قطوع المخروطات فيما عملته آنفًا مقدمتين من كتاب الأصول: إحداهما، إذا أخرج من ب من ا ب القطر خط يقطع الدائرة على جـ، وأخرج عمود ا د حتى يلقى ب جـ المخرج على د، كيف نخرج من د جـ خطا كـ هـ ز يوازي ا د، فيقطع المحيط على ح، وتكون هـ ح إلى ح ز كنسبة مفروضة



وذلك يسهل بأن نقسم ا د على ط بالنسبة المذكورة، ونخرج ب ط فيقطع لا محالة الدائرة؛ وليقطعها على ح. ونجيز عليها هـ ز موازيًا لـ ا د، تكون هـ ح إلى ز ح كالنسبة المفروضة؛ وذلك بيّن.

والمقدمة الثانية: أن نخرج هـ ز موازيًا لـ ا د العمود حتى يكون مثل الخط الواصل بين ا ح؛ وذلك أيضًا غير بعيد.

ولم أنفذ الرسالة بهذا العمل للمقدمة التي كنت قدمتها من قبل – والله الموفق للصواب بمنّه وسعة فضله.

تمت الرسالة نصف ليلة الجمعة الثاني من شعبان من سنة ‹خمس وسبعين و›ستمائة.

2 وليقطعها: وليقطعه، في النسخة الأصلية: «فيقطع لا محالة الدور، فليقطعه»، ويبدو أن المحرر كتب «الدائرة» بدل «الدور» ولم ينتبه إلى ما بعدها – 6 أنفذ: بنفذ / التي: الذي / قدمتها: قدمته.

نصّا كتابَي السجزي:

١ـ كتاب أحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي في عمل المسبّع في الدائرة وقسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية.

٢ـ مقالة لأحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي في عمل المسبّع في الدائرة وقسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية.

ب - ١٠ - ظ
ت - ٨٠ - ظ
ق - ١١٣ - ظ

كتاب أحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي في عمل المسبّع في الدائرة وقسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية

قال: إنّا نعجب ممن يلتمس ويتعاطى صناعة الهندسة، مع اقتباسه من القدماء الأفاضل، يظن بهم العجز والتقصير، وخاصة إذا كان مبتدئًا ومتعلمًا، مع قلة المعرفة بها، بحيث يقع في وهمه أنه يتهيّأ له بأهون السعي أشياءُ يُقدّرها سهلةَ المأخذ قريبة على الأفهام. وقد بَعُدَ ذلك عن فهم المرتاضين في هذه الصناعة المتدرّبين فيها.

فليت شعري، بأية قوة وحدس ودُربة وغَوْص يُحسن الظنَّ بنفسه في وجود المسبّع من مقدماتِ مَن يقرأ بعض كتاب المدخل – أعني كتاب أوقليدس في *الأصول* – وليس له دربةٌ ولا رياضة ويستنقص المبرّزين في هذه الصناعة.

وما الذي يُوجب الظنَّ في عجز أرشميدس الفاضل مع تقدمه في الهندسة على سائر المهندسين: فإنه بلغ في الهندسة غاية ‹حتى› سماه اليونانيون المهندس – وهو أرشميدس، ولم يُسمَّ أحدٌ من المتقدمين ولا من المتأخرين باسمه – لفضله في صناعة الهندسة. وإنه كان في غاية الاجتهاد في استخراج الأشياء النافعة، وبقوته تمّ الأدواتِ والآلات والمهنَ الحِيَلِيّة. وإنه بنى مقدّمات المسبّعَ وسلك طَريقَ الصواب فيه، وبقوته أدركنا المسبّع. وقد ب - ١١ - و
أدرك إيرن الخانيقونات بقوته وعنايته واجتهاده بالأشياء التعاليمية. هذا مع فضله وتقدّمه

2-5 كتاب ... قال: قال احمد بن محمد بن عبد الجليل السّجزي [ب] كتاب عمل ... متساوية لأحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي قال [ق] – 2 بن محمد: ناقصة [ت] – 2-3 في الدائرة: ناقصة [ت] – 5 إنّا: انا [ج] / نعجب: تعجب [ت، ق، ج] يلتمس و: ناقصة [ت، ق] مع: وانه مع [ت] به مع [ق] ومع [ج] – 6 مع: ومع [ت] – 7 عن: عن [ت، ق] 8 متدربين: المتدربين [ق] – 9 بأية: بايت [ب] وغوص: وغوص [ب] وعوض [ت، ق] بنفسه: ناقصة [ت، ق، ج] – 10 أوقليدس: اقليدس [ق] – 12 يوجب: وجب [ق] – 14 لفضله: لفضله، وكتب في الهامش لأصل بفضله، [ب] 15 والمهن: ناقصة [ت] – 16 مقدّمات: كررها، ثم ضرب عليها بالقلم [ب] – 17 أدرك: ادرب [ق] الخانيقونات: الخانيقونات [ب، ج] المنجنيقات [ق] وعنايته: وبعنايته [ت، ق].

ومرتبته في صناعة الهندسة، ينسبه هذا البائس الضال إلى التقصير، ويُومئ إلى أوائل مقدماته الردية الفاسدة البعيدة من طريق الصواب التي لا يمكن أن توقف على عمل المسبع بها. والتمويه الذي موّه ‹به› على نفسه وظن أنه يموِّه على أحد، اللّهم إلا على من لا يُحسن شيئًا من الهندسة ولا من مدخلها. ثم مع هذا ينسُب أرشميدس إلى أشياءَ تقبح بمن له أدنى فهم فضلاً عن المهندسين. ويزعم أن المقدمة التي أتى بها أرشميدس أصعبُ من المطلب، ويستقبح طريقته، وينسبه إلى التقليد. فنِعمَ ما فعل أرشميدسُ بما حصَّل من البرهان على مقدمات المسبع، وما سطر في كتابه لئلا ينتفع به مَن لا يستحقّه، مثلُ هذا المحروم.

وأنا أيضًا بعد اقتباسي من علم أرشميدس، ومن مقدمات أبلونيوس، وخاصةً من المحدثين مثل العلاء بن سهل، كنت ضنينًا بهذا الشكل الشريف الغريب، وعلى ما تهيأ لي بأهونِ / السعي من / انقسام الزاوية المستقيمة / الخطين بثلاثة أقسام متساوية، من المقالة الأولى من كتاب أبلونيوس في *المخروطات*.

ق – ١١٤ – و
ت – ٨١ – و
ب – ١١ – ظ

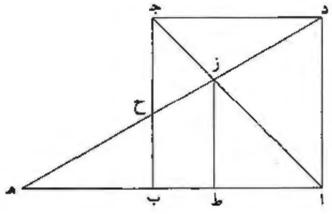
والآن أشرح الحال في ذلك وأقدّم قول هذا المُمَوِّه على نفسه ليكون تأديبًا للمبتدئين، وأبيّن فساد قوله والمغالطة فيما عمله، ثم أردفه بمقدمات المسبع، وأُتبعه بعمل المسبع، وأختم الكتاب بقسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية. وبالله التوفيق.

وهذا ابتداء كتابه وترتيب مقدماته.

قال: قد قلّد أرشميدسُ – في خلال مقدمات كثيرة قدّمها لقسمة الدائرة بسبعة أقسام متساوية – مقدّمة لم يبيّن عملها ولم يبرهن عليها، ولعلها أصعب عملاً وأبعد برهانًا مما له قدّمها، وهي هذه.

قال، يعني أرشميدس، قال: لنُخرج قطر مربع ا ب جـ د، وهو ا جـ. ونخرج ا ب إلى هـ بلا نهاية، ولنخرج من نقطة من ب هـ – ولتكن هـ – خطًا مستقيمًا إلى زاوية المربع عند نقطة د، يقطع قطر ا جـ على نقطة ز وضلعَ ب جـ على نقطة ح، ويصير مثلث ب ح هـ الخارجُ من المربع مساويًا لمثلث جـ د ز.

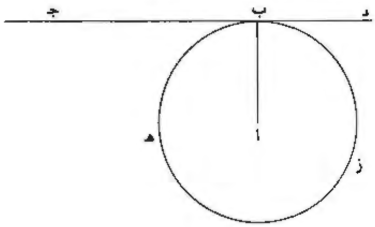
2 الردية: الكلية [ق] – 3 الذي: كتبها «إلى»، ثم ضرب عليها بالقلم وأثبت الصواب في الهامش [ب] / يموّه: موّه [ق] – 4 لا: ليس [ب، ح] / يحسن: حسن [ق] – 5 تقبح: يقبح [ت، ق، ح] / بمن: لمن [ت، ق، ح] / أتى: ناقصة [ت] / أتى بها: ادريها [ق] – 6 طريقته: طريقه [ق] / أرشميدس: كتبها أحيانًا «ارشميدس» أو «ارسميدش»، ولن نشير إليها فيما بعد [ب] – 7 سطر: سطره [ت، ق، ح] / به: ناقصة [ت، ق] / يستحقه: يستحق [ق] – 9 أبلونيوس: ابللونيوس [ت] – 10 مثل: من [ت] – 12 أبلونيوس: ابلونيوس [ت] / المخروطات: المخروط [ت، ق] – 13 والآن: ولان [ت، ق] / ليكون: لتكون [ت] – 15 التوفيق: كتب بعدها «وهو حسبي كافيا ومعينا» [ت، ق] – 18 يبيّن: يتبين [ق] / عملاً: ناقصة [ت] – 20 قال يعني أرشميدس: ناقصة [ت، ق] / ا جـ: ا ز جـ [ب، ح] – 21-22 من ب هـ ... على نقطة: ناقصة [ب] – 22 نقطة ز ... على: أثبتها في الهامش مع «صح» [ت].



وإنما أراد أرشميدس بما قلّده من ذلك أن يخرج عمود ز ط على ا ب، فيقسمُ ا ب على ط انقساماً يصير به ضرب ا ط في جميع ا هـ مثل ضرب ا ب في ط هـ وضربُ ا ب في ا ط مثل / مربع ب هـ. ولكن قسمة ا ب على هذه الشريطة أقرب عملاً وبرهاناً من إخراج خط هـ د على الشريطة التي ذكرها أرشميدس؛ ولعلّه غير ممكن دون قسمة ا ب على الشريطة المذكورة، ولعلّ قسمة ا ب كذلك أصعب من قسمة الدائرة بسبعة أقسام متساوية. ب-١٢-و

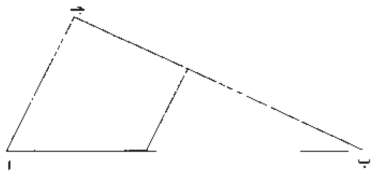
وأنا متعلق بما حضرني في هذا الباب على أصل آخر وطريق أقرب وعمل أسهل ومقدّمات أقلّ وأيسر.

أولاها هذه: إذا أديرت دائرة ببعد عمود قام على خط، فإنها تماس الخط الذي قام عليه العمود، كخط ا ب قام عموداً على جـ د على نقطة ب، وأدرنا ببعد ا ب دائرة ب هـ ز، فأقول: إنها تماس خط جـ د، والبرهان عليه سهل.



الثانية: نريد أن نخرج من أحد أضلاع مثلث مفروض، كضلع ا ب من مثلث ا ب جـ، إلى الضلع الثاني، وهو ب جـ، خطًّا مساوياً لما يفصله منه خارج المثلث الأصغر وموازياً للضلع الثالث وهو ا جـ.

1 فيقسم: فتقسم [ت] فينقسم [ح] – 2 انقساماً: انقسام ما [ق] / يصير به: يضربه [ت] / جميع: ناقصة [ق] – 3 ا ط: ط ه [ب] – 3-4 أقرب ... الشريطة: ناقصة [ب] – 4 الشريطة: شريطة [ت] – 6 متعلق بما: معلق مما [ت، ق] / حضرني: خطرني [ق] / أسهل: سهل [ت، ق] – 8 أولاها: اولها [ق] / أديرت: ادرت [ق] – 9 على جـ د: ناقصة [ت، ق] – 10 إنها: أنها [ح] – 11 من (الثانية): مثل [ب].



الثالثة: نريد أن نخرج خطًا نسبته إلى خط معلوم، / كخط ا ب، نسبة معلومة كنسبة جـ إلى د./ ت-٨١-ظ



الرابعة: نريد أن نقسم خطًا معلومًا، كخط ا ب، بقسمين، يكون ضرب الخط كلّه في أحد القسمين مثل مربع خط نسبته إلى القسم الآخر نسبة / معلومة، ولتكن نسبة جـ إلى د. ب-١٢-ظ ق-١١٤-ظ



هذه المقدّمات هي التي بنى عليها في عمل المسبع، ثم أمر في عمل المسبع أن يقسم خط مفروض بقسمين يكون ضرب الخط كلّه في أحد القسمين مثل مربع خط نسبته إلى القسم الآخر كنسبة الخط كله إلى جميع الخط كلّه مع هذا القسم. فأعطى في الشكل الرابع النسبة واستعمل في عمل المسبع نسبة أخرى خلاف ما قدمه في مقدّمته. وظن أنه يمكن عمل ذلك بمقدمة الشكل الرابع. ولا يتهيأ عمل ذلك إلا بالقطوع المخروطية. ‹و›الذي لا يعرف المخروط في الهندسة ولا قطوعه، فبهذه المقدمات المسطرة في كتب الأوائل التي بها يتهيّأ عمل المسبع للذي أضاف مقدماته إليها. فأما بمقدماته وأشباه

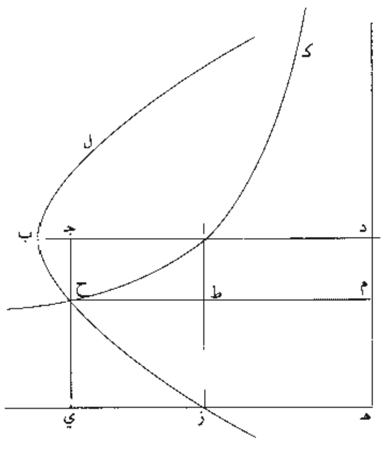
6 هي: ناقصة [ق] / أمر: امّ [ت] – 6-7 بقسم خط مفروض: نقسم خطا مفروضا [ق] – 9 النسبة: نسبة [ق] – 10 لا: ناقصة [ب] – 11 ‹و›الذي لا يعرف: الذي لا يعرفه [ب، ت، ق] ‹ذلك العمل› الذي لا يعرفه ‹لأنه لا يعرف› [ح] (كذا !) / فبهذه: فهذه [ب] / المسطرة: المسطورة [ب] – 12 بها: راه [ب، ت، ق] ‹نرى عنها› [ح] (كذا !) / للذي: الذي [ب، ت، ق] / أضاف: إضاف [ح] / إليها: إلى الأوائل [ق].

مقدماته، فإنه عسر وجود المسدّس في الدائرة – وهو الذي عمله النجارون على رؤوس القدور بفتحة واحدة من البركار – فضلاً عن وجود المسبّع، فهذا غلطه ومغالطته في مقدّمات المسبع وعمله.

فأما الآن فلنبتدئ بما وجدنا من أمر المسبع ومقدماته / وقسمة الزاوية المستقيمة الخطين ب-١٣-و بثلاثة أقسام متساوية.

مقدمة: نريد أن نقسم خط ا ب بقسمين مثلاً على جـ، تكون نسبةُ الخط القويّ على ا ب في ب جـ إلى خط ا جـ كنسبة ا ب إلى مجموع ا ب ا جـ كخط واحد مستقيم.

فنخرج ب ا على استقامته إلى د، على أن يكون ا د مساويًا لـ ا ب، ونضيف إلى ا د مربع ا د هـ ز، ونعمل على نقطة ا قطعًا زائدًا لا يلقيانه خطا هـ ز هـ د بل يقربانه دائمًا، على ما في الرابع من الثانية من كتاب أبلونيوس الفاضل في *المخروطات*، وفي الأول من نقل إسحاق، وهو كـ ا ح؛ وعلى سهم ب د قطعًا مكافئًا يكون ضلعه المنتصب ا ب، وهو ل ب ح. ونخرج من تقاطع القطعين، وهو نقطة ح، عمود ح جـ على خط ا ب.



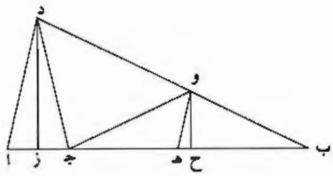
1 عسر: عشر [ت] – 4 فأما الآن: فالآن [ق] / وجدنا: وعدنا [ت، ق، ح] – 6 مقدمة: ناقصة [ب، ت، ح] – 8-7 كخط واحد مستقيم: ناقصة [ب، ت، ح] – 9 ب ا: ا ب [ق] – 10 ا د: ا جـ [ب] / يلقيانه: يلتقيانه [ت] / خطا: خطي [ب، ت، ق] – 11 أبلونيوس: ابللونيوس [ت] / المخروطات: المخروط [ت] – 12 كـ ا ح: ا ح كـ [ب، ت، ح] / ب د: ب د و [ت] / يكون: ناقصة [ب] – 13 ل ب ح: ب ح ل [ب، ت، ح] / ح جـ: ح جـ ز [ب] – 14 ا ب: ا ز [ب].

أقول: إنا قسمنا خط ا ب على نقطة جـ كما أردنا.

برهان ذلك: أن نخرج هـ ز جـ ح على استقامتهما حتى يلتقيا على ي، ونخرج ح ط م يوازي ي هـ وا ط ز يوازي جـ ي. فلأن سطح م ي مساوٍ لمربع ز د، يكون ي ط مساويًا لـ ط د. فنأخذ سطح ط جـ مشتركًا، / يكون سطح ي ا مساويًا لسطح ح د. لكن ق-١١٥-و سطح / ح د / هو خط جـ ح في خط جـ د، وي ا هو جـ ا في ا ز، أعني ا ب، ب-١٣-ظ ت-٨٢-و فـ ا ب في ا جـ مساوٍ لـ جـ ح في جـ د. فنسبة جـ ح إلى ا جـ كنسبة ا ب إلى جـ د. لكن جـ ح يقوى على ا ب في ب جـ لأن ا ب كان الضلع المنتصب لقطع ل ب ح المكافئ؛ وجـ د هو ا ب مع جـ ا، فنسبة الخط القوي على ا ب في ب جـ إلى خط جـ ا كنسبة خط ب ا إلى ب ا ا جـ كخط واحد مستقيم. فقد عملنا ما أردنا؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

قد بنى أبو سعد العلاء بن سهل هذا الشكل، وسلك فيه طريق التحليل، وتركيبنا قسم من تحليله.

وهذه مقدمة أخرى: نريد أن نعمل على خط ا ب مثلثًا متساوي الساقين، يكون كل واحدة من زاويتيه اللتين على القاعدة ثلاثة أمثال الزاوية الباقية.



فنقسم ا ب بقسمين على جـ، يكون ا ب في ا جـ يقوى عليه خط كخط ا د، فنسبته إلى جـ ب كنسبة ا ب إلى / ا ب ب جـ كخط واحد مستقيم، بما قدمنا ب-١٤-و عمله. ونخرج ب د يساوي ا ب يحيط مع ا د بزاوية د.

1 إنا: ناقصة [ت] / ا ب: ب ا [ب، ت، ح] – 2 يلتقيا: يلتقيان [ق] – 3 ح ط م: خط [ب] / ي هـ: خط ي هـ [ق] / وا ط ز: وا ط [ت] وا ه ر [ب] / جـ ي: جـ ب ي [ب] / م ي: م ب ي [ب] – 4 مساويًا: مساوٍ [ب، ت] / يكون ... لسطح: فسطح ي ا يساوي سطح [ق] / ح د: د ط [ب] – 5 ح د هو خط: ناقصة [ب] / خط (الثانية): ناقصة [ت، ق] – 7 في: ناقصة [ب] / الضلع: ضلع [ب، ت، ق] / ل ب ح: ب ح ل [ت، ح] ب حـ ل [ب] – 8 خط: ناقصة [ق] – 11 سعد: سعيد [ب] – 14 واحدة: واحد [ت] – 15-16 عليه خط كخط ا د، فنسبته: عليه خط نسبته [ق] عليه خط كخط ا د نسبته [ح] على خط نسبته [ت] على خط فنسبته [ب] ونجد «كخط ا د» في الهامش بخط آخر – 17 عمله: كتب بعدها «وليكن الخط القوي على ا ب في ا جـ خط ا د» [ق].

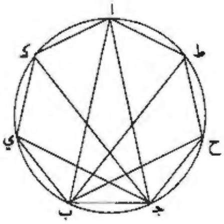
أقول: إن مثلث ا ب د هو المطلوب، وكل واحدة من زاويتي ا د ثلاثة أمثال زاوية ب.

برهان ذلك: أنا نصل د جـ. فلأن نسبة ا د إلى جـ ب كنسبة ا ب إلى ا ب ب جـ كخط واحد، وا ب أصغر من ا ب ب جـ مجموعين، فـ ا د إذن أصغر من جـ ب. فنطرح من جـ ب ب هـ مساوياً لـ ا د، ونخرج هـ و يوازي ا د ونخرج و ح د ز عمودين على ا ب. فلأن ضرب ا ب في ا جـ مساوٍ لمربع ا د، تكون نسبة ا ب إلى ا د من مثلث ا ب د كنسبة ا د إلى ا جـ من مثلث ا د جـ، وزاوية ا من المثلثين مشتركة، فيكون مثلث ا د جـ يشبه مثلث ا ب د، فخط د جـ مثل خط ا د وا ز مثل ز جـ. ولأن ز جـ نصف ا جـ وجـ ب نصف ضعف جـ ب، يكون ز ب نصف ا ب ونصف جـ ب أيضاً، ونسبة هـ ب المساوي لـ ا د إلى نصف جـ ب كنسبة ا ب إلى نصف ا ب جـ ب، أعني ز ب. لكن نسبة و ب، المساوي لـ هـ ب، إلى ح ب، كنسبة د ب، المساوي لـ ا ب، إلى ز ب./ فنسبة هـ ب إلى ح ب كنسبة ا ب إلى ز ب، أعني نصف ا ب ب جـ، ب-١٤-ظ
ونسبة هـ ب إلى نصف جـ ب أيضاً كنسبة ا ب إلى ب ز. فنصف جـ ب إذن مساوٍ لـ ح ب، فخط و جـ إذن مثل خط و ب، أعني هـ ب. فخطوط ا د د جـ و جـ و ب كلها متساوية. لكن زاوية ا جـ د مثل زاويتي جـ د و د ب جـ، وزاوية د و جـ ضعف زاوية ب، فزاوية ا جـ د، أعني زاوية جـ ا د ثلاثة أضعاف زاوية ب. فكلّ واحدة من زاويتي ا د من مثلث ا ب د ثلاثة أضعاف زاوية ب. فقد عملنا / ما أردنا؛ وذلك ما أردنا أن ت-٨٣-و
نعمل.

نريد أن نعمل في دائرة ا ب جـ مسبعاً متساوي الأضلاع والزوايا.

1 أقول: فأقول [ق] / ا ب د: ا د ب [ب، ت، ح] / زاوية: ناقصة [ت] – 3 برهان ذلك: برهانه [ت] / أنا: إنا [ح] – 4 إذن: اذا، ولن نشير إليها فيما بعد [ث] – 5 فنطرح: فيفرع [ت] فنفصل من [ق] – 7-8 فيكون مثلث: فمثلث [ق] يكون مثلث [ب، ث] – 8 ا ب د: ا ب جـ [ب] / فخط: وخط [ق] / وا ز: فـ ا ز [ح] – 9 ا جـ: ا جـ ر [ب] / نصف (الثانية): فنصف [ت] / ونصف جـ ب أيضاً: جـ ب مجموعين [ق] – 11 و ب: ر ب [ث] ر ب الى [ب] / لـ هـ ب: لخط هـ ب [ق] / ح ب: حـ ب [ب] – 12-13 فنسبة هـ ب ... إلى ب ز: فنسبة هـ ب إلى نصف جـ ب وإلى ح ب واحدة [ق]، لطول العبارة ربما أراد مصطفى صدقي تلخيصها عند نسخه لها – 12 ح ب: حـ ب [ب] – 13 ونسبة: فنسبة [ب، ت] – 13-14 إلى نصف جـ ب ... فخط و جـ: ناقصة [ب] – 14 إذن: ناقصة [ق] / خط: ناقصة [ق] / و ب: د ر [ب] / و جـ: جـ و [ث، ح] حـ ر [ب] / و ب: ر ب [ب] – 15 جـ د و: وجـ د [ب] / د ب جـ: و ب جـ [ق] – 16 أعني زاوية جـ ا د: ا د ب [ب] / أضعاف: أمثال [ق] – 17 ا ب د: ا د ب [ب، ت، ح] / أضعاف: أمثال [ق] / أردنا: اردناه [ت] – 19 ا ب جـ: ناقصة [ق] / الأضلاع: للاضلاع [ب] / والزوايا: ناقصة [ب، ث].





فنعمل مثلث هـ ز د متساوي الساقين، يكون كل واحدة من زاويتي هـ ز ثلاثة / أمثال زاوية د، ونعمل في دائرة ا ب جـ ح مثلثًا زواياه مساوية لزوايا مثلث هـ ز د، وهو مثلث ا ب جـ. ونخرج ب ح، يكون زاوية جـ ب ح مساوية لزاوية ب ا جـ، / ونقسم زاوية ح ب ا بنصفين بخط ب ط. فبين أن زوايا جـ ب ح ح ب ط ط ب ا الثلاث متساوية. ونعمل بزاوية ب جـ ا ما عملنا بزاوية جـ ب ا، ونخرج خطي جـ ي جـ ك. فلأن الزوايا التي على ب جـ الستة متساوية ومساوية لزاوية ا، يكون قسيها وهي جـ ح ح ط ط ا ا ب ي ي ك ك ا متساوية ومساوية لقوس ب جـ. فقد عملنا في دائرة ا ب جـ ح مسبعًا متساوي الأضلاع؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.

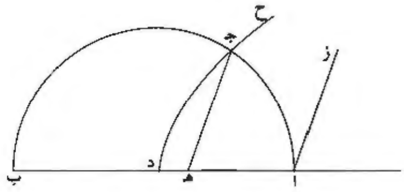
ق-١١٥-ظ
ب-١٥-و

وهذه مقدمة لقسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية.

نصف دائرة ا جـ ب معطى، وخط ا ز معلوم الوضع، والقطر ا ب، والمركز د. ونريد أن نجد على قطر ا ب / نقطة كنقطة هـ، إذا أخرجنا منها إلى محيط نصف دائرة ا جـ ب خطًا موازيًا لخط ا ز، كخط هـ جـ، يكون مربعه، أعني هـ جـ، مساويًا لخط ب هـ في هـ د. فلنعمل على قطر د ب قطعًا زائدًا، يكون قطره المجانب د ب وضلعه المنتصب مساويًا لخط د ب وتكون خطوط الترتيب على زوايا مساوية لزاوية ز ا ب، وهو قطع د جـ ح يقطع نصف محيط الدائرة على نقطة جـ. ونخرج جـ هـ يوازي ا ز.

ب-١٥-ظ

1 زاويتي: زاويتيه [ق، ح] – 2 ا ب جـ ح: ا ب جـ [ق] / هـ ز د: د هـ ز [ق] – 3 ب ح: جـ ح [ق]، كتب في هذا الشكل جـ بدلاً من ب والعكس – 4 ح ب ا: حـ ب ا [ب] / فبين: فنبيّن [ق] – 5 عملنا: علمنا [ت] – 6-7 ح ط ط ا: حـ ط ه ا [ب] – 7 ي ك: ب ك [ب] / ا ب جـ ح: ا ب جـ [ق] – 10 معطى: معطاة [ب، ق] – 11 أخرجنا: اخرج [ب، ت، ق، ح] / محيط: المحيط [ت] – 12 خطًا موازيًا: خط مواز [ح] – 13 قطره المجانب د ب و: ناقصة [ت، ق] في الهامش بخط آخر [ب] – 14 خطوط الترتيب: خطوطه الترتيبية [ب، ح] خطوطه الترتيب [ت، ق] – 15 د جـ ح: د جـ ز [ب، ت].

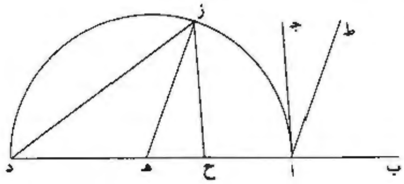


أقول: إن هـ ب في هـ د مساوٍ لمربع هـ جـ.

برهان ذلك: أن نسبة هـ ب في هـ د إلى مربع هـ جـ كنسبة د ب إلى الضلع المنتصب. لكن د ب مساوٍ لضلعه المنتصب، فـ ب هـ في هـ د إذن مساوٍ لمربع هـ جـ. فقد عملنا ما أردنا؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.

ومن بعد ما قدّمنا، فليسهل بذلك قسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية.

فلتكن زاوية ب ا جـ معطاة. ونريد أن نقسمها بثلاثة أقسام متساوية./ فلنخرج ب ا ب-١٦-و
على استقامته إلى د على أي مقدار أردنا، وندير على قطر ا د نصف دائرة ا ز د، والمركز هـ. ونخرج ح ز يوازي ا جـ، يكون ح د في ح هـ مساويًا لمربع ح ز على ما قدمنا عمله. ونصل ز د ز هـ ونخرج ا ط يوازي هـ ز.



أقول: إن زاوية ب ا ط ضعف زاوية ط ا جـ./

برهان ذلك: لأن ضرب ح د في ح هـ مساوٍ لمربع ح ز، يكون نسبة ح د إلى ح ز ت-٨٣-ظ
من مثلث ح د ز / كنسبة ح ز إلى ح هـ من مثلث ح ز هـ. وزاوية ح مشتركة بين ق-١١٦-و
المثلثين، يكون المثلثان متشابهين، فزاوية ح د ز مساوية لزاوية ح ز هـ، فزاوية ح ز هـ إذن

1 إن: أن [ح] / مساوٍ: مساويًا [ب] – 3 مساوٍ (الأولى): مساويا [ب، ت] – 4 أردنا: اردناه [ت] – 6 معطاة: معطا ة [ت] – 8 يكون: ويكون [ق] / قدمنا: قدمناه [ت] – 9 ز د ز هـ: ز هـ ز د [ق] – 10 ضعف: مثلي [ق] – 11 مساوٍ: مساويًا [ب، ت] – 12 ح د ز: د ح ز [ق] / ح هـ: حـ هـ [ب] / ح ز هـ: هـ ز ح [ق] / بين: من [ق، ح] – 13 يكون: فيكون [ح] / المثلثان: المثلثين [ق، ح].

مساوية لزاوية هـ ز د. لكن زاوية ح هـ ز الخارجة مساوية لضعف زاوية هـ ز د، لأن هـ ز مثل هـ د. فزاوية ح هـ ز ضعف زاوية هـ ز ح. لكن زاوية ا ح ز المساوية لزاوية ب ا جـ مساوية لزاويتي ح ز هـ ز هـ ح الداخلتين من / المثلث؛ وزاوية ب ا ط مساوية لزاوية ب-١٦-ظ
ح هـ ز، تبقى زاوية ط ا جـ مساوية لزاوية هـ ز ح، فزاوية ب ا ط ضعف زاوية ط ا جـ. نقسم زاوية ب ا ط بنصفين، فقد قسمنا زاوية ب ا جـ بثلاثة أقسام متساوية، وذلك ما أردنا أن نبيّن.

تم كتاب أحمد بن محمد بن عبد الجليل
في المسبع وقسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة أقسام متساوية.

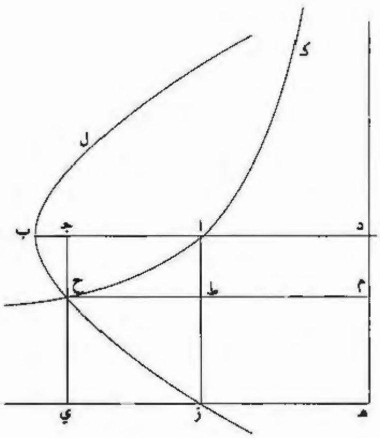
1 لأن: ولأن [ق] – 3 ح زهـ: ح د هـ [ب] – 4 تبقى: فتبقى [ج] – 5 نقسم: ونقسم [ق] فنقسم [ج] – 6 أردنا أن نبين: أردناه [ت] أردنا أن نعمل [ق] – 7-8 تم ... متساوية: تم الكتاب بحمد الله وعونه وتأييده وحسبنا الله وحده ونعم الوكيل. قد نقل من نسخة سقيمة وقوبل بها ولله الحمد [ب] تم في يوم الثلاثاء التاسع من جمادى الأولى سنة ثلاث وخمسين ومائة وألف [ق] – 8 متساوية: كتب بعدها بحمد الله م [ت]

١٢٩ - و

مقالة لأحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي
في عمل المسبع في الدائرة وقسمة الزاوية المستقيمة الخطين
بثلاثة أقسام متساوية*

مقدمة للمطلوب الأول: نريد أن نقسم اب على جـ، بحيث يكون نسبةُ الخط القويّ على اب في ب جـ إلى اجـ كنسبة اب إلى اب اجـ معًا.

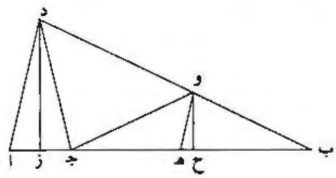
فنخرج اد بالاستقامة كـ اب، ونرسم عليه مربع اهـ، وعلى ا قطع اح كـ الزائد على ألا يلقاه هـ ز هـ د، وعلى سهم ب د قطع ب ح ل المكافئ وضلعه المنتصب ب ا. ونخرج من تقاطع القطعين، وهو ح، عمود ح جـ على اب. فينقسم الخط على جـ بالقسمة المذكورة.



* هذه النسخة من النص السابق هي تحرير مختصر له مجهول المؤلف.

برهانه: أن نخرج هـ ز جـ ح – وليلتقيا على ي – وح ط م موازيًا لـ ب د وا ط ز لـ جـ ي. فلأن سطح م ي، على ما بينه أبلونيوس، مساوٍ لمربع ز د، فـ م ا بل م جـ، أعني جـ ح في جـ د، مساوٍ لـ ز ح بل ز جـ، أعني جـ ا في ا ز، أعني ا ب، فـ ا ب في ا جـ مساوٍ لـ جـ ح في جـ د. فنسبة جـ ح القوي على ا ب في ب جـ، لكونه الضلع المنتصب لقطع ب ح ل، إلى ا جـ كنسبة ا ب إلى جـ د، أعني ا ب ا جـ معًا؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

مقدمة أخرى له: نريد أن نعمل على ا ب مثلثًا متساوي الساقين، كل واحدة من زاويتي قاعدته ثلاثة أمثال زاوية رأسه.



فنقسم ا ب على جـ بحيث يقوى ا ب في ا جـ على ا د، الذي نسبته إلى جـ ب كنسبة ا ب إلى ا ب جـ ب معًا. ونخرج ب د يساوي ا ب.

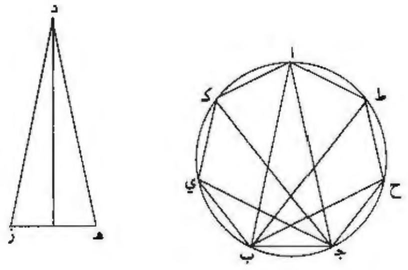
فمثلث ا د ب هو المطلوب.

برهانه: أن نصل د جـ. فلأن ا د إلى جـ ب كـ ا ب إلى ا ب ب جـ معًا، وا ب أصغر من ا ب ب جـ، فـ ا د أصغر من جـ ب. فنفصل ب هـ مثله، ونخرج هـ و يوازي ا د وعمودي د ز و ح على ا ب. فلأن ا ب في ا جـ كمربع ا د، يكون ا ب إلى ا د كـ ا د إلى ا جـ، وزاوية ا مشتركة؛ فمثلثا ا د جـ ا د ب متشابهان، فـ د جـ كـ ا د، فـ ا ز كـ ز جـ. ولأن ز جـ نصف ا جـ وجـ ب نصف ضعفه، يكون ز ب نصف ا ب ب جـ، ونسبة هـ ب، المساوي لـ ا د، إلى نصف جـ ب، كنسبة ا ب إلى نصفي ا ب وجـ ب، أعني ز ب. لكن نسبة و ب المساوي لـ هـ ب، إلى ح ب، كنسبة د ب المساوي لـ ا ب، إلى ب ز. فنسبة هـ ب إلى نصف ب جـ، كنسبة هـ ب إلى ب ح.

9 رسم الناسخ مثلث الشكل الثالث بجوار الشكل الثاني، ولكنه أشار إلى موضعه الحقيقي في الهامش بقوله: «هذا المثلث متعلق بهذا الشكل» – 16 نصف (الثالثة): نصفا.

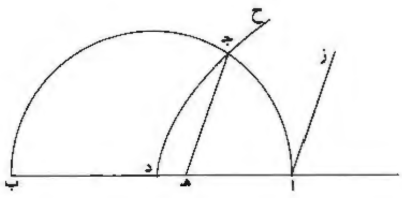
ف ب ح نصف ب جـ، ف جـ و ك ب و، أعني هـ ب. ف ا د د جـ جـ و و ب الأربعة متساوية. لكن زاوية ا جـ د، أعني زاوية ا، مساوية لزاويتي ب وجـ د و المساوية لـ جـ و د التي هي نصف ب، فزاوية ا ثلاثة أمثال زاوية ب، وكذا زاوية د ثلاثة أمثالها؛ وهو المطلوب.

وبعد تقديم هاتين المقدمتين، نريد أن نعمل في دائرة ا ب جـ مسبعًا متساوي الأضلاع.



نعمل مثلث د هـ ز متساوي الساقين، على أن كل واحدة من زاويتي هـ ز ثلاثة أمثال زاوية د، وفي الدائرة مثلث جـ ا ب مساويةً زواياه لزوايا مثلث ز د هـ، ونعمل زاوية جـ ب ح مساوية لزاوية ا، ونتصف زاوية ح ب ا بـ ب ط؛ وكذا نعمل بزاوية جـ. فنبين أن زوايا جـ ب ح ح ب ط ط ب ا ا جـ ك ك جـ ي ي جـ ب الستة متساوية ومساوية لزاوية ا. فيكون القسي السبع وأوتارها متساوية؛ وذلك ما أردنا أن نبين./

مقدمة للمطلوب الثاني: نصف دائرة ا جـ ب معطى على قطر ا ب ومركز د، وا ز معلوم الوضع. ١٢٩-ظ



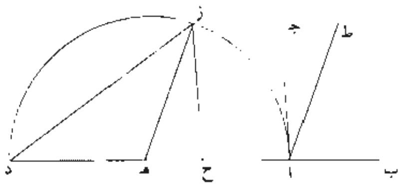
8 مساوية: مساويا.

ونريد أن نجد على قطر ا ب نقطة كنقطة هـ، يكون مربع الخط الخارج منها إلى المحيط، الموازي لـ ا ز، مثل هـ جـ، مساويا لـ ب هـ في هـ د. فنعمل على د ب قطع د ح الزائد على أن يكون ضلعه المنتصب ويكون قطره المجانب مساويًا لـ د ب. وخطوط ترتيبه على زوايا مساوية لزاوية ا، وليقطع نصف الدائرة على جـ؛ ونخرج من جـ جـ هـ موازيًا لـ ا ز.

فأقول: إن هـ ب في هـ د مساوٍ لمربع هـ جـ.

برهانه: أن نسبة هـ ب في هـ د إلى مربع هـ جـ كنسبة د ب إلى ضلعه المنتصب المساوي له، فـ هـ ب في هـ د مساوٍ لمربع هـ جـ؛ وهو المطلوب.

ومن بعد ما قدّمنا هذه المقدمة، فيسهل بذلك قسمة الزاوية المستقيمة الخطين ولتكن ب ا جـ، بثلاثة أقسام متساوية، بأن نخرج ب ا إلى د، أي مقدار أردنا، ونرسم على ا د نصف دائرة د ز ا والمركز هـ. ونخرج ز ح موازيًا لـ ا جـ بحيث يقوى على د ح وح هـ على ما قدمنا. ونخرج ز د ز هـ وا ط يوازي ز هـ.



فنقول: إن زاوية ب ا ط ضعف زاوية ط ا جـ.

برهانه: فلأن د ح في ح هـ كمربع ز ح، يكون د ح إلى ح ز كـ ح ز إلى ح هـ. وح مشتركة، فزاوية د كزاوية ح ز هـ. فـ ح ز هـ مساوية لـ هـ ز د. فـ ح هـ ز الخارجة، أعني ب ا ط، لكونها ضعف هـ ز د، تكون ضعف / ح ز هـ، أعني ط ا جـ، وذلك ١٣٠-و أن ب ا جـ، أعني ب ح ز الخارجة، مساوية لزاويتي ح هـ ز ح ز هـ، فزاوية ب ا ط ضعف زاوية ط ا جـ؛ وذلك ما أردناه.

2 فنعمل: مطموسة.

نصوص كتب القوهي:

١ـ استخراج ويجن بن رستم المعروف بأبي سهل القوهي في عمل المسبّع المتساوي الأضلاع في دائرة معلومة.

٢ـ رسالة أبي سهل ويجن بن رستم القوهي في استخراج ضلع المسبّع المتساوي الأضلاع في الدائرة.

٣ـ رسالة في عمل ضلع المسبّع المتساوي الأضلاع في الدائرة لأبي سهل القوهي.

استخراج ويجن بن رستم المعروف بأبي سهل القوهي في عمل المسبع المتساوي الأضلاع في دائرة معلومة

قد ظهر في عصر مولانا الملك الجليل المنصور عَضُد الدولة، أطال الله بقاءه، وأدام سلطانه، كثيرٌ من العلوم الشريفة، والآداب الحسنة، والصنائعُ اللطيفة، والأعمالُ العجيبة، وحسنُ السياسة، وجميلُ السيرة، وبسطُ العدل، وعمارة البلاد، وأمن العباد، في أيام دولته وزمان إقباله، كما ظهر كثيرٌ من الأشكال الهندسية التي لم تظهر في عصر أحد من الملوك، مع قصدهم لإظهارها، واجتهادهم

2 رستم: وستم [ب] – 3 بأبي: با [ب].

رسالة أبي سهل ويجن بن رستم القوهي في استخراج ضلع المسبع*

قد أظهر الله، وله الحمد، في عصر مولانا الملك الجليل المؤيد المنصور عضد الدولة، أطال الله بقاءه، وأدام تأييده وعلوه وتمكينه وقدرته وسلطانه، من فنون العلم والأدب وضروبِ البحث والطلب، ما لم يزل مستبهمًا لا ينفتح، ومستعجمًا لا ينشرح، وأبيًا لا يذل ولا يُصحَب وبعيدًا لا يدنو ولا يقرِّب؛ كما ظهر ببركة دولته ويمن نقيبته كثيرٌ من دقيق الأشكال الهندسية بَعُدَ مأخذها وصعب مرامها على السلف حتى وكّلوا

1 الرحيم: نجد بعدها «وما توفيق إلا بالله» [ا] – 2-3 رسالة أبي ... المسبع: رسالة في استخراج ضلع المسبع لأبي سهل ويجن بن رستم القوهي رحمهم الله تعالى [ق]؛ وكتب [د] بعدها: «في الدائرة للملك الأجل عضد الدولة الديلمي رحمه الله. بسم الله الرحمن الرحيم الحمد لله رب العالمين وصلوته على نبيه سيدنا محمد وآله الطاهرين» – 4 قد أظهر: قال ويجن بن رستم المعروف با سهل القوهي قد ظهر [د] قال قد ظهر [ق] / الله: الله تعالى [د] – 5 الجليل المؤيد: ناقصة [د] / الدولة: الدولة وتاج الملة [د] – 6-7 وأدام ... وسلطانه: ناقصة [د] – 9 يذل: يزل [ا] – 10 يدنو: يدنوا [ا] / ببركة دولته: ببركه [د] – 11 كثيرٌ: كثيرًا [ا، د، ق].

* نجد في [ا] (ص. ١٤٦–و) صدر مختصر، ضُرب عليه بالقلم، وهو نفسه ما نجده في هامش [ق]: «وفي بعض النسخ صدر الكتاب هكذا: "قد أظهر الله وله الحمد في عصر مولانا الملك عضد الدولة من فنون العلم والأدب وضروب البحث والطلب ما لم يزل مستبهمًا لا ينفتح ومستعجمًا لا ينشرح وأبيًا لا يذل ولا يصحب (أثبت «وأبيًا ... يصحب» في الهامش [ا]) وبعيدًا لا يدنو ولا يقرِّب كما ظهر ببركة دولته كثير من دقيق (صححها في الهامش [ا]) الأشكال الهندسية، فمنها ضلع المسبع المتساوي الأضلاع في الدائرة وقد جاهده المذكورون من أفاضل المهندسين سيما أرشميدس ولم يحظ واحد منهم بطائل وتداوله نظر (نظره [ا]) عبده، فوجده وهو متقرب إليه بتسهيل السبيل إليه وإيراد الدليل عليه". تم نسخة (ناقصة [ا]) الصدر».

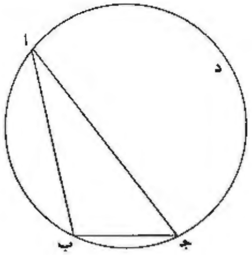
لاستخراجها، من أجل أنهم علموا أن هذا النوع من العلوم التعليمية، كالهيئة والعدد والأوزان ومراكز الأثقال وما أشبهها من الرياضيات الفلسفية، والعلوم التي يجري عليها القياس، إذ هي من العلوم الحقيقية التي لا تقبل الفساد والتغير والنقض والطعن كما يقبل غيرها، لأن مقدماتها ضرورية، وقياساتها صحيحة، وبراهينها بالغة للمقدمات والقياسات جميعًا. وأسهل قسم من أقسام أحد هذه الأشكال التي ظهرت في هذا العصر المبارك، هو شكل قد اجتهد الأوائل المذكورون فيه، ولم يتم لأحد / منهم استخراجه، –و كما تممه الله عز وجل، بدولة مولانا الملك الجليل المنصور عضد الدولة أطال الله بقاءه، وأدام سلطانه، على يد خادمه: وهو عمل ضلع المسبع المتساوي الأضلاع في دائرة.

النظر فيها إلى الخلف، بعد تعذّرها على المبرّزين وتعسّرها على المتقدّمين منهم، فانثنوا عن حلها خائبين، وولّوا عن فكّها هاربين، قد تعروا فيها من حولهم وقوتهم وتفادوا لديها من بأسهم ونجدتهم، هذا مع استفراغهم لجهدهم في استخراجها، واستنفادهم / لوسعهم في استنباطها، د – ٦٦ – و ثقة منهم بما وعدتهم به أمانتهم، من بقاء علم الهندسة على وجه الدهر، ونمائه مع نفاذ العمر، وإبقائه ذكرًا جميلاً لا يبلى، وذخرًا جزيلاً لا يفنى، ومن حسن عائدته على العلوم التعليمية، خاصةً كالعدد والألحان والنجوم والأوزان وما جاراها وناسبها وسائرها وقاربها، بل على العلوم النظرية عامّة، إذ كان مثالاً يحتذي في الحق وإمامًا يقتفي في الصدق، فإن أصله مستقر وقياسه مطّرد مستمر، لا يلحقه طعن، ولا يناله وهن، ولا يعترض عليه فسخ ولا نقض، ولا يبدله إلحاد ولا رفض، فهو منقطع القرين صحة وعديم النظير عزّة؛ وأسهل هذه المطالب علم ضلع المسبع المتساوي الأضلاع في الدائرة. وقد جاهده قرائح المذكورين من أفاضل المهندسين، سيما أرشميدس، ولم يحظ واحد منهم بطائل منه، وتداوله نظرُ عبد مولانا الملك الجليل المؤيد المنصور عضد الدولة أطال الله بقاءه، وأدام سلطانه وأيّد نصره، فوجده؛ وهو متقرب إليه، بتسهيل السبيل إليه وإيراد الدليل عليه، وراجٍ حسن موقعه منه، إن شاء الله وهو حسبي ونعم الوكيل.

3 الرياضيات: الرياضات [ب] – 5 هي: هو [ب].

5 لجهدهم: بجهدهم [د] – 11 خاصة: وخاصة [د] – 12 جاراها: جاز لها [د] – 14-15 فإن ... طعن: ناقصة [د] – 20 قرائح: فراغ [د] – 22-23 الجليل المؤيد المنصور: ناقصة [د] – 23-24 أطال ... نصره: ناقصة [د] – 26-27 وهو ... الوكيل: وحده [د] – 27 الوكيل: المعين. تم الصدر والحمد لله [ا].

/– آ – نريد أن نعمل في دائرة ا ب جـ المعلومة ضلع / المسبع المتساوي الأضلاع. ا – ١٤٦ – و ق – ٢٢٣ – و



فعلى التحليل، ننزل أن خط ب جـ هو ضلع المسبع المتساوي الأضلاع في دائرة ا ب جـ، وقوس ا ب مثلا قوس ب جـ الذي هو سبع محيط الدائرة، ونصل خطي ا ب ا جـ، فزاوية ا جـ ب مثلا زاوية ب ا جـ، لأن نسبة القوس إلى القوس كنسبة الزاوية إلى الزاوية، إذا كانتا على المحيط أو على المركز، ويبقى قوس ا د جـ أربعة أمثال قوس ب جـ ومثلي قوس ا ب، لأنا فرضنا قوس ب جـ سبع محيط الدائرة، فزاوية ا ب جـ أيضًا أربعة أمثال زاوية ب ا جـ. وقد كانت زاوية ب جـ ا مثلي زاوية جـ ا ب، فزاوية ا ب جـ مثلا زاوية ب جـ ا. ففي مثلث ا ب جـ المستقيم الخطوط زاوية ا ب جـ منه مثلا زاوية ا جـ ب وأربعة أمثال زاوية ب ا جـ الباقية.

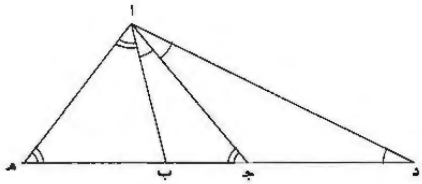
فقد انتهى بنا التحليل إلى عمل مثلث مستقيم الخطوط إحدى زواياه مثلا إحدى الزاويتين الباقيتين وأربعة أمثال الزاوية الباقية. /

– بَ – فنريد أن نعمل مثلثًا مستقيم الخطوط إحدى زواياه مثلا إحدى الزاويتين ب – ١٨ – ظ
الباقيتين وأربعة أمثال الزاوية الباقية.

1 آ: ناقصة [ب، ق] / المسبع: مسبع [ب] / المتساوي: متساوي [ب] – 2 هو: ناقصة [ب] / المسبع المتساوي: مسبع متساوي [ب] – 3-2 في دائرة ا ب جـ: أثبتها في الهامش [ا] – 3 مثلا: مثلي [د] / محيط الدائرة: المحيط [ق] – 3-4 ا ب ا جـ: ا ح ا ب [د] ا جـ ا ب [ب] – 4 ا جـ ب: ا ب جـ [ا، د، ق] / ب ا جـ: ا جـ ب [ا، د، ق] / القوس (الأولى): مكررة في بداية السطر التالي [د] – 5 إذا: ناقصة [ب] / على: ناقصة [د] / ويبقى: فيبقى [ب] – 6 ومثلي قوس ا ب: ناقصة [ب، د] / أيضًا: ناقصة [ا، ق] – 7-8 وقد كانت ... ب جـ ا: وقد كان تبين أنها مثلا زاوية ا جـ ب [ا، د، ق] – 7 مثلي: مثلا [ب] – 8 منه: هي [ب] وهي [د] – 10 بنا التحليل [ق، ا] هذا بالتحليل [د] هذه بالتحليل [ب] / إحدى: احد [د] – 11 الباقية: الأخرى [ب] – 12 بَ: ناقصة [ب، ق] – 13 الباقية: الثلاثة [ا، ق] الأخرى [ب].

فعلى التحليل، ننزل أن مثلث ا ب جـ إحدى زواياه، وهي زاوية ا ب جـ، مثلا زاوية ب جـ ا وأربعة أمثال زاوية ب ا جـ الباقية.

فنجعل خط جـ د مساويًا لخط ا جـ وعلى استقامة ب جـ، ونصل خط ا د. فزاوية ب جـ ا مثلا زاوية ا د جـ، لأنها خارجة من مثلث ا جـ د، المساوية لزاويتي جـ ا د جـ د ا المتساويتين. وقد كانت أيضًا زاوية ا ب جـ مثلي زاوية ا جـ ب، فزاوية / ا ب جـ أربعة د-٦٦-ظ أمثال زاوية ا د ب. وقد كانت زاوية ا ب جـ أيضًا أربعة أمثال زاوية ب ا جـ، فزاوية ا د ب من مثلث ا د ب مساوية لزاوية جـ ا ب من مثلث جـ ا ب. وزاوية ا ب جـ مشتركة للمثلثين جميعًا، فالزاوية الباقية من أحد المثلثين مساوية للزاوية الباقية من المثلث الآخر. فمثلثا ا ب د ا ب جـ متشابهان، فنسبة د ب إلى ب ا كنسبة ب ا إلى ب جـ. فسطح د ب في ب جـ مساوٍ لمربع ب ا.



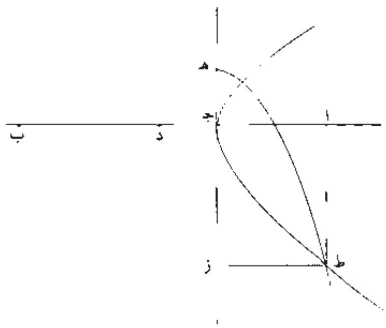
ونجعل خط ب هـ مساويًا لخط ا ب وعلى استقامة خط ب د، ونصل خط ا هـ. فسطح د ب في ب جـ مساوٍ لمربع ب هـ. وأيضًا، لأن زاوية ا ب جـ خارجة عن مثلث ا ب هـ، فهي مساوية لزاويتي ب ا هـ ا هـ ب المتساويتين، فزاوية ا ب جـ مثلا زاوية هـ ا ب. وقد كانت زاوية ا ب جـ / مثلي زاوية ا جـ ب، فزاوية ا جـ ب من مثلث ب-١٩-و ا جـ هـ مساوية لزاوية ب ا هـ من مثلث ا ب هـ. فإذا جعلنا زاوية ا هـ ب مشتركة، صارت الزاوية الباقية من أحد المثلثين مساوية للزاوية الباقية / من المثلث الآخر؛ فمثلثا ق-٢٢٣-ظ ا جـ هـ ا ب هـ متشابهان، فنسبة جـ هـ إلى هـ ا كنسبة ا هـ إلى هـ ب، فسطح جـ هـ في هـ ب مساوٍ لمربع هـ ا، وخط هـ ا مساوٍ لخط ا جـ، لأن زاوية ا جـ هـ قد كانت

3 ا جـ: جـ ا [ب، د] / ا د: ا ب [د] – 4 المساوية: وهي مساوية [ب] – 5 قد: ناقصة [ب] / أيضًا زاوية ا ب جـ: زاوية ا ب جـ أيضًا [ب] – 6 كانت زاوية ا ب جـ أيضًا: كان أيضًا زاوية ا ب جـ [ب] – 7 جـ ا ب (الثانية): ب ا جـ [د] ا ب جـ [ب] / مشتركة: مشترك [د] – 9 د ب: ب د [ب] – 11 خط (الثانية): ناقصة [ب، د] – 12 عن: من [ب، د] – 14 زاوية ا ب جـ: ناقصة [ا، د، ق] / مثلي: مثلا [ب] – 16 أحد: مكررة [د] / المثلث: ناقصة [د] – 17 ا هـ: هـ ا [ق].

مساوية لزاوية ا هـ جـ. لكن خط ا جـ مساوٍ لخط جـ د، فخط جـ د مساوٍ لخط ا هـ، فمربع خط جـ د مساوٍ لمربع خط ا هـ، فسطح جـ هـ في هـ ب مساوٍ لمربع خط جـ د. وقد كان تبيّن أن سطح د ب في ب جـ مساوٍ لمربع ب هـ. فخط هـ د مقسوم على نقطتي ب جـ، وسطح جـ هـ / في هـ ب مساوٍ لمربع جـ د وسطح د ب في ب جـ أيضًا مساوٍ لمربع ب هـ. ط-١٤٦

فقد انتهى عمل المثلث على ما وصفناه إلى وجود خط مستقيم، وليكن هـ د، مقسوم على نقطتي ب جـ. وسطح د ب في ب جـ مساوٍ لمربع ب هـ، وسطح جـ هـ في هـ ب مساوٍ لمربع جـ د. /

– جـ – فنريد أن نجده على جهة التحليل، وننزل أنه خط ا ب المستقيم، وهو مقسوم على نقطتي جـ د وسطح ب جـ في جـ د مساوٍ لمربع ا جـ وسطح د ا في ا جـ مساوٍ لمربع د ب. ب-١٩-ظ

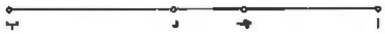


فنجعل خط هـ جـ عمودًا على خط ا ب ومساويا لخط جـ د وخطًّ جـ ز مساويًا لخط د ب وعلى استقامة خط هـ جـ، وكلَّ واحد من خطي ز ط ا ط موازيًا لكل واحد من

1 جـ د (الأولى): جـ ب [ق] – 2 خط (الأولى): ناقصة [ا، ق] فسطح: وسطح [ب] / خط: ناقصة [ب] – 6 انتهى: انتهى بنا العمل إلى [ا، ق] على ما: كما [ا، ق] / وليكن هـ د: ناقصة [ا، د، ق] – 7 ب هـ: هـ ب [ب] – 8 جـ د: كتب بعدها «وسطح د ا»، ثم ضرب عليها بالقلم [د] – 9 نجده على جهة: نجد على جهة [ا، ق] نجده على [ب، د] / وننزل: ننزل [ب، د] / أنه: ان [ا، ق] – 12 ومساويا: مساويا [د] / جـ ز: جـ ا، ثم أثبت الصواب فوقها [ا] / مساويا: مساوٍ [ا] – 13 خط: ناقصة [ب، د].

خطي ا جـ جـ ز. ولأن خط ز جـ مساوٍ لخط ب د وخطَّ جـ هـ مساوٍ لخط د جـ، فسطح ز هـ في هـ جـ مساوٍ لسطح ب جـ في جـ د. لكن سطح ب جـ في جـ د مساوٍ لمربع ا جـ، فسطح ز هـ في هـ جـ مساوٍ لمربع ا جـ، ومربع ا جـ مساوٍ لمربع ز ط، وخط هـ جـ مساوٍ لخط جـ د، فسطح جـ د في هـ ز مساوٍ لمربع ز ط، فنقطة طَ على محيط القطع المكافئ الذي سهمه خط هـ ز ورأسه نقطة هَ وضلعه القائم خط جـ د./ وأيضًا لأن سطح د-٦٧-و د ا في ا جـ مساوٍ لمربع د ب، ومربع د ب مساوٍ لمربع جـ ز، فسطح د ا في ا جـ مساوٍ لمربع ز جـ، ومربع ز جـ مساوٍ لمربع ا ط لأن سطح ا جـ ز ط متوازي الأضلاع، فسطح د ا في ا جـ مساوٍ لمربع ا ط، فنقطة طَ أيضًا على محيط القطع الزائد الذي رأسه نقطة جـ وسهمه وضلعه القائم جميعًا مساوٍ لخط / د جـ؛ وذلك أن نسبة سطح د ا في ا جـ إلى ب-٢٠-و مربع ا ط كنسبة القطر المجانب إلى ضلعه القائم في القطع الزائد. فإذا فرضنا خط جـ د، الذي هو سهم القطع الزائد ومساوٍ للضلعين القائمين للقطعين، معلومَ الوضع والقدر، صار كل واحد من محيطي القطع الزائد والمكافئ معلوم الوضع، فنقطة طَ التي هي الفصل المشترك بينهما معلومة؛ وخط طَ ا معلوم لأنه عمود على خط ا ب / المعلوم الوضع من ق-٢٢٤-و نقطة طَ المعلومة، فخط د ب معلوم لأنه مساوٍ لخط ا ط، وكل واحد من خطوط ا جـ جـ د د ب معلوم، فخط ا ب المستقيم مقسوم على نقطتي جـ دَ، وسطح بَ جـ في جـ د مساوٍ لمربع ا جـ، وسطح د ا في ا جـ مساوٍ لمربع د ب؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.

– دَ – نريد أن نبيّن إذا كان خط ا ب مقسومًا على نقطتي جـ دَ وكان سطح ا د في د جـ مساويًا لمربع د ب وسطحُ جـ ب في ب د مساويًا لمربع ا جـ، كما وصفنا، فإن كل قسمين منها أعظم من القسم الباقي.



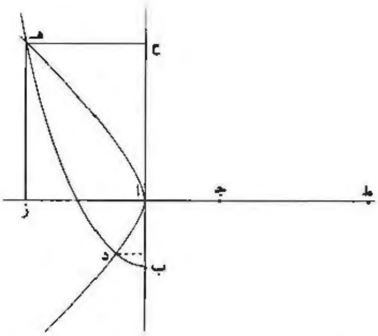
1 ولأن: فلأن [د] فلان [ب] – 7-8 لأن سطح ... لمربع ا ط: أثبتها في الهامش [ا] ناقصة [د] – 9 مساوٍ: أثبتها في الهامش [ا] / مساوٍ لخط: خط [ب] – 10 المجانب: ناقصة [ا، د، ق] / فإذا: وإذا [د] – 11 ومساوٍ: مساو [ا، ب، ق] / للقطعين: لقطعين [ب] – 12 هي: على [ق] – 13 بينهما: ناقصة [ا، د، ق] / معلومة: معلوم [د] / خط (الثانية): ناقصة [ا، ق] – 13-14 من نقطة طَ المعلومة: ناقصة [ب] – 14 لأنه مساوٍ لخط ا ط: ناقصة [ب] / وكل: فكل [ب] – 14-15 لأنه ... معلوم: أثبتها في الهامش [ا] – 16 نعمل: نبين [ب] – 17 دَ: ناقصة [ب، ق] / نريد أن نبين: ناقصة [ب] / مقسومًا: مقسوم [ب] المقسوم [ا، ق] – 18 مساويًا (الثانية): مساو [ا، ق] / كما وصفنا: ناقصة [ب].

برهانه: لأن سطح ا د في د جـ مساوٍ لمربع د ب، / فخط د ب وسط في النسبة بين خطي ا د د جـ. وا د هو قسمان من أقسام خط ا ب، وهو أعظم من قسمه د ب الباقي، لأن ا د أعظم من د جـ ود ب أعظم من د جـ. وأيضًا، لأن سطح جـ ب في ب د مساوٍ لمربع ا جـ، فخط ا جـ هو وسط في النسبة بين خطي جـ ب ب د، فخط جـ ب، وهو قسمان من أقسام خط ا ب، أعظم من خط ا جـ الباقي، لأن ب جـ الأول أعظم من جـ د الثالث. وأيضًا، لأن خطي ا جـ د ب أعظم من خط د ب، وقد كان خط د ب أعظم من خط جـ د، فخطا ا جـ د ب جميعًا أعظم من خط جـ د الباقي. فكل قسمين من أقسام خط ا ب، إذا كان مقسومًا على ما وصفنا، أعظم من القسم الباقي؛ وذلك ما أردنا أن نبين. ب-٢٠-ظ

– ه – نريد أن نجد خطًا مستقيمًا مقسومًا على ما وصفنا.

فعلى التركيب، نجعل كل واحد من خطي ا ب ا جـ مستقيمين متساويين معلومي القدر ‹و›يحيطان بزاوية قائمة، ونخرج كل واحد منهما على استقامة، ونرسم على سطح خطي ا ب ا جـ قطعًا مكافئًا ضلعه القائم خط ا جـ ورأسه نقطة ب وسهمه خط ب ا، وهو قطع ب د هـ. ونجعل على هذا السطح أيضًا قطعًا زائدًا سهمه خط ا جـ، وهو مساوٍ لضلعه / القائم، ورأسه نقطة ا، وليكن قطع د ا هـ. ونجعل كل واحد / من خطي هـ ز هـ ح موازيين لكل واحد من خطي ا ح ا ز، ونجعل خط ط جـ مساويًا لأحد خطي ا ح ز هـ. ب-٢١-و د-٦٧-ظ

1 لأن: أن [ب] – 2 وا د: فا د [ب] / هو: وهو [ب] / وهو أعظم من قسمه د ب: أعظم من د ب وهو القسم [ب] أثبت ناسخ [ا] «د ب» فوق «قسمه»، و«قسمه» ناقصة في [د، ق] – 3 لأن .. د جـ: ناقصة [ب] / ود ب: فـ ب د [د] / سطح: ناقصة [ق] أثبتها في الهامش [ا] – 4 هو (الأولى): ناقصة [ا، د، ق] – 5 خط ا جـ: القسم، وكتب «خط ا جـ» فوقها [ا] – 5-6 لأن ب جـ ... الثالث: ناقصة [ب] – 5 ب جـ: ناقصة [ا، ق] – 6 لأن: ناقصة [ب] فإن [د] / قد: ناقصة [ب، د] – 7 فخطا: فخط [ق] / خط: ناقصة [د] / الباقي: ناقصة [ب] / قسمين: قسم [ا، ق] – 8 إذا ... وصفنا: ناقصة [ب] / القسم: ناقصة [د] – 10 ه: ناقصة [ب، ق] / مقسومًا: ناقصة [ب] / ما وصفنا: مثل ما ذكرنا [د] – 11 مستقيمين: ناقصة [د] / متساويين: ومتساويين [ب] – 12 يحيطان: محيطان [ب، د] – 13 قطعًا مكافئًا: قطع مكافئ [ب] – 14 أيضًا: ناقصة [ب] / سهمه: سهم [د] / وهو: ناقصة [ب] – 15 د ا هـ: ه ا ه، ثم أثبت الصواب فوقها [ا] / ونجعل: نجعل [ا] – 16 مساويًا: موازيًا [د]



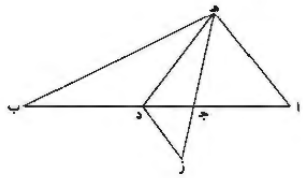
فأقول: إن خط ز ط مقسوم على نقطتي جـ ا وسطح ط ا في ا جـ مساوٍ لمربع ا ز وسطح جـ ز في ا ز مساوٍ لمربع ط جـ.

برهانه: أن خط ط جـ مساوٍ لخط ا ح وخط جـ ا مساوٍ لخط ا ب، فخط ح ب مثل خط ا ط، فسطح ط ا في ا جـ مساوٍ لسطح ح ب في ا جـ. ولكن سطح ح ب في ا جـ مساوٍ لمربع هـ ح، لأن ا جـ مساوٍ للضلع القائم لقطع ب د هـ المكافئ وخط هـ ح على الترتيب؛ فسطح ط ا / في ا جـ مساوٍ لمربع هـ ح، ومربع هـ ح مساوٍ لمربع ا ز لأن سطح ا-١٤٧-و ا ح هـ ز متوازي الأضلاع، فسطح / ط ا في ا جـ مثل مربع ا ز. ق-٢٢٤-ظ

وأيضاً، لأن قطع د ا هـ قطع زائد وسهمه خط ا جـ هو مساوٍ لضلعه القائم كما فرضنا، وخط هـ ز على الترتيب، فسطح جـ ز في ز ا مساوٍ لمربع هـ ز، لأن نسبة سطح جـ ز في ز ا إلى مربع هـ ز كنسبة قطر القطع الزائد إلى ضلعه القائم، كما بين أبلونيوس في شكل ك من مقالة ا من *المخروطات*. فسطح جـ ز في ز ا مساوٍ لمربع هـ ز، ومربع هـ ز مساوٍ لمربع ط جـ، فسطح جـ ز في ز ا مساوٍ لمربع خط ط جـ. وقد كان تبين أن سطح ط ا في ا جـ مساوٍ لمربع خط ز ا، فخط ط ز المستقيم / هو مقسوم على نقطتي جـ ا، ب-٢١-ظ وسطح ط ا في ا جـ مساوٍ لمربع خط ا ز، وسطح جـ ز في ز ا مساوٍ لمربع خط ط جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

2 ا ز: ز ا [ا، د، ق] – 3 برهانه: برهان ذلك [ب] / ا ح : جـ ا [د] حا [ب] / جـ ا: ا جـ [ق] – 3-4 فخط ... ا ط: ناقصة [ب، د] – 3 جـ ا: ا جـ [ق] / ح ب: ب ح [ق] – 4 ح ب: جـ ب [د] / ولكن: لكن [ا، د، ق] / ح ب: حـ ب [د] – 5-6 مساوٍ لمربع ... ومربع هـ ح: أثبتها في الهامش [ا] – 6 الترتيب: ترتيب [ب] / ا ز: ز ا [ب، د] – 6-7 سطح ... الأضلاع: أثبتها في الهامش [ا] – 7 ا ح هـ ز: ا جـ هـ ز [د، ب] / مثل مربع: مساوٍ لمربع [ب، د] – 8 وسهمه: وسهم [د] / هو: وهو [ا، د] – 8-9 كما فرضنا: ناقصة [ب، د] – 9 الترتيب: ترتيب [ب] / ز ا: ا ز [د] – 10-11 كنسبة ... لمربع هـ ز: أثبتها في الهامش [ب] – 10 قطر القطع: القطر المجانب للقطع [ب] – 10-11 كما ... *المخروطات*: ناقصة [ب] – 11 شكل ... ا من: كتاب [د] – 12-13 ط جـ (الثانية) ... لمربع: أثبتها في الهامش [ا] – 12 خط: ناقصة [ب] – 13 ز ا: ط جـ [د].

– وَ نريد أن نعمل مثلثًا مستقيم الخطوط على ما وصفنا.

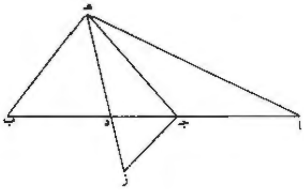


فعلى التركيب، نجد خط ا ب المستقيم مقسومًا على نقطتي جـ د، وسطح ب جـ في جـ د مساوٍ لمربع ا جـ وسطح د ا في ا جـ مساوٍ لمربع د ب. ونعمل من ثلاثة خطوط مساوية لخطوط ا جـ جـ د د ب مثلثًا، وعمله سهل قريب، لأن كل خطين منها أعظم من الباقي كما بينا؛ وليكن مثلث جـ د هـ، و د هـ مساوٍ لـ د ب، وجـ هـ مساوٍ لـ ا جـ.

فأقول: إن مثلث هـ جـ د زاويته التي هي هـ جـ د مثلا زاوية هـ د جـ، وهي أربعة أمثال زاوية جـ هـ د.

برهان ذلك: أنا نجعل خط جـ ز مساويًا لخط جـ د / ونصل خطوط د ز هـ ا هـ ب. فلأن سطح ب جـ في جـ د مساوٍ لمربع ا جـ ومربع ا جـ مساوٍ لمربع جـ هـ، فسطح ب جـ في جـ د مساوٍ لمربع جـ هـ. فنسبة ب جـ إلى جـ هـ كنسبة جـ هـ إلى جـ د؛ وزاوية ب جـ هـ مشتركة لمثلثي ب جـ هـ د جـ هـ جميعًا، فمثلثا ب جـ هـ د جـ هـ متشابهان. فزاوية جـ هـ د من

‹وَ› نريد أن نعمل مثلثًا مستقيم الخطوط على ما وصفنا.



فعلى التركيب، نجد خط ا ب المستقيم مقسومًا على نقطتي جـ د، وسطح ا د في جـ د مساوٍ لمربع د ب وسطح ب جـ في د ب مساوٍ لمربع ا جـ. ونعمل من ثلاثة خطوط مساوية لخطوط ا جـ جـ د د ب مثلثًا، وعمله سهل قريب، لأن كل خطين منها أعظم من الباقي كما بينا؛ وليكن مثلث جـ د هـ، و د هـ مساوٍ لـ د ب، وجـ هـ مساوٍ لـ ا جـ.

فأقول: إن مثلث هـ جـ د زاويته التي هي هـ د جـ مثلا زاوية هـ جـ د، وأربعة أمثال زاوية جـ هـ د.

برهان ذلك: أنا نجعل خط د ز مساويًا لخط جـ د ونصل خطوط جـ ز هـ ا هـ ب. فلأن سطح ا د في د جـ مساوٍ لمربع ب د ومربع ب د مساوٍ لمربع د هـ، فسطح ا د في د جـ مساوٍ لمربع د هـ. فنسبة ا د إلى د هـ كنسبة د هـ إلى جـ د؛ وزاوية ا د هـ مشتركة لمثلثي ا د هـ د جـ هـ جميعًا، فمثلثا ا د هـ د جـ هـ متشابهان. وزاوية جـ هـ د من أحد المثلثين مساوية

1 وَ: ناقصة [ب] – 3 المستقيم: المستقيم الخطوط [ب]، ثم ضرب على «الخطوط» بالقلم – 4 مقسومًا: مقسوم [ب] / ب جـ: جـ ب [ب، د] – 5 مساوٍ: مساويًا [د] / د ا: ز ا، وأثبت الصواب فوقها [ا] / مساوٍ: مساويًا [د] – 6-7 ثلاثة ... لخطوط ا جـ جـ د د ب: خطوط ا جـ جـ د د ب الثلاث [ب] – 7 جـ د: ا د [د] – 7-8 وعمله سهل قريب: أثبتها في الهامش [ا] – 8-9 لأن كل خطين ... كما بينا: لأنا قد بينا أن كل اثنين منها أعظم من الباقي [ب، د] – 9 ود هـ: ود ر، ثم أثبت الصواب فوقها [ا] / مساوٍ: مساويًا [د] – 12 هي: ناقصة [ا، د] – 13 جـ هـ د: جـ هـ ر [د] – 14 خط: ناقصة [د] – 15 جـ د: جـ و [د] / د ز: هـ ز [ا] – 16 جـ د: جـ ر [د] – 18 جـ د: جـ ر [د] – 19 جـ د: جـ ر [د] / ب جـ هـ: ب جـ ر [د] – 20 فمثلثا: ومثلثا [ب] – 21 جـ هـ د: جـ هـ ر [د].

أحد المثلثين مساوية لزاوية هـ ب د من المثلث الآخر. وزاوية هـ د جـ الخارجة من مثلث هـ د ب مساوية لزاويتي د هـ ب د ب هـ الداخلتين المتساويتين، لأن خط د ب مساو لخط د هـ. فزاوية هـ د جـ مثلا زاوية هـ ب د. وقد كانت زاوية هـ ب د مساوية لزاوية جـ هـ د. فزاوية هـ د جـ من مثلث هـ د جـ مثلا زاوية –و جـ هـ د. وأيضا / لأن زاوية هـ جـ د خارجة عن مثلث جـ ز د. فهي مساوية لزاويتي جـ د ز جـ ز د الداخلتين المتساويتين. لأن خط جـ ز مساو لخط جـ د، فزاوية هـ جـ د مثلا زاوية د ز جـ. وأيضا، لأن خط جـ هـ مساو لخط ا جـ وخط ز هـ مساو لخط د ا، وذلك أن خط جـ ز مساو لخط جـ د. فسطح ز هـ في هـ جـ مساوٍ لسطح د ا في ا جـ. لكن / سطح د ا في ا جـ مساوٍ لمربع د ب. فسطح ز هـ في هـ جـ مساوٍ لمربع د ب، ومربع د ب مساو لمربع د هـ، لأن خط د هـ مساوٍ لخط د ب، فسطح ز هـ في هـ جـ مساوٍ لمربع د هـ. فنسبة ز هـ إلى هـ د كنسبة هـ د إلى هـ جـ، وزاوية ز هـ د مشتركة لمثلثي ز هـ د جـ هـ د، فمثلث ز هـ د يشبه مثلث جـ هـ د، فزاوية هـ د جـ مساوية لزاوية هـ ز د. وقد كانت زاوية هـ جـ د مثلي زاوية د ز هـ. فزاوية هـ جـ د مثلا زاوية هـ د جـ. وقد كان تبين أن زاوية هـ د جـ مثلا زاوية جـ هـ د، فزاوية هـ جـ د أربعة أمثال زاوية جـ هـ د. فإذن إحدى زوايا مثلث هـ جـ د مثلا إحدى لزاويتين الباقيتين وهي أربعة أمثال الزاوية الباقية، وذلك ما أردنا أن نبين.

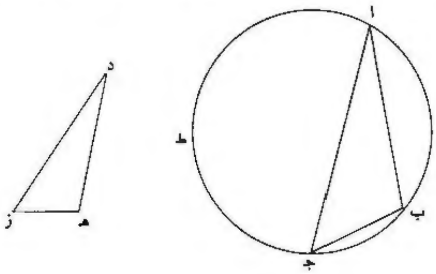
لزاوية هـ ا د من المثلث الآخر. وزاوية هـ جـ د الخارجة من مثلث هـ جـ ا مساوية لزاويتي جـ هـ ا جـ ا هـ الداخلتين المتساويتين، لأن خط جـ ا مساوٍ لخط جـ هـ، فزاوية هـ جـ د مثلا زاوية هـ ا جـ، وقد كانت زاوية هـ ا جـ مساوية لزاوية جـ هـ د، فزاوية هـ جـ د من مثلث هـ د جـ مثلا زاوية جـ هـ د. وأيضا، لأن زاوية هـ د جـ خارجة عن مثلث جـ ز د، فهي مساوية لزاويتي د جـ ز جـ ز د الداخلتين المتساويتين. لأن خط د ز مساو لخط جـ د. فزاوية هـ د جـ مثلا زاوية د ز جـ. وأيضا، لأن خط د هـ مساوٍ لخط ب د وخط ز هـ مساو لخط جـ ب، وذلك لأن خط د ز مساو لخط جـ د، فسطح ز هـ في هـ د مساو لسطح جـ ب في ب د. لكن سطح ب جـ في ب د مساو لمربع جـ ا. فسطح ز هـ في هـ د مساو لمربع ا جـ، ومربع ا جـ مساوٍ لمربع جـ هـ. لأن خط جـ هـ مساوٍ لخط ا جـ. فسطح ز هـ في هـ د مساو لمربع جـ هـ. فنسبة ز هـ إلى هـ جـ كنسبة هـ جـ إلى هـ د، وزاوية ز هـ جـ مشتركة لمثلثي ز هـ جـ جـ هـ د. فمثلث ز هـ جـ يشبه مثلث جـ هـ د، وزاوية هـ جـ د مساوية لزاوية هـ ز جـ. وقد كانت زاوية هـ د جـ مثلي زاوية جـ ز هـ، فزاوية هـ د جـ مثلا زاوية هـ جـ د. وقد كان تبين أن زاوية هـ جـ د مثلا زاوية جـ هـ د. فزاوية هـ د جـ أربعة أمثال زاوية جـ هـ د. فإذن إحدى زوايا مثلث هـ جـ د مثلا إحدى الزاويتين الباقيتين وأربعة أمثال الزاوية الثالثة، وذلك ما أردنا أن نبين. ق-٢٢٥-و

5 هـ د جـ: هـ ز جـ، ثم أثبت الصواب فوقها [ ] قد: ناقصة [ب] – 7 من: في [ب، د]، هـ د جـ: هـ جـ د [ب، د] – 8 خارجة: الخارجة [ب] عن: من [ب، د] – 9 جـ ز د (الثانية): جـ ز د [د] – 12 ا جـ: جـ [ب، د] – 16 ز هـ: د ه، ثم أثبت الصواب فوقها [ا] – 17 د ب: د ز [د] 18 ز هـ: د د، ثم أثبت الصواب فوقها [ ] – 21 يشبه مثلث: شبه مثلث [ب] – 22 هـ د جـ: هـ ز جـ [ب] قد: ناقصة [ب، د] – 23 مثلي: مثل، ثم أثبت الصواب فوقها [ا] – 24 هـ د جـ (الثانية): هـ ز جـ [ب] – 26 فإذن: فإذا [ب] فوق السطر [ا] – 27 إحدى: فوق السطر [ا] هي: ناقصة [ا، د] – 28 الباقية: الثالثة [ا].

– ز – نريد أن نجد ضلع المسبع المتساوي الأضلاع في دائرة ا ب جـ المفروضة.

فعلى التركيب، نعمل مثلثًا مستقيم الخطوط إحدى زواياه مثلا إحدى الزاويتين الباقيتين وأربعة أمثال الزاوية الأخرى، فليكن مثلث د هـ ز، زاوية د هـ ز منه مثلا / زاوية هـ ز د وأربعة أمثال الزاوية الباقية الأخرى. ونعمل في دائرة ا ب جـ مثلث ا ب جـ، وليكن كل واحدة من زواياه مساوية لكل واحدة من زوايا مثلث د هـ ز، أما زاوية ا ب جـ فلزاوية د هـ ز، وأما زاوية ا جـ ب فلزاوية د ز هـ، وأما الزاوية الباقية، فللزاوية الباقية.

ب-٢٣-و



فأقول: إن خط ب جـ ضلع المسبع المتساوي الأضلاع في دائرة ا ب جـ.

برهان ذلك: أن زاوية د هـ ز مثلا زاوية د ز هـ وأربعة أمثال زاوية هـ د ز، فزاوية ا ب جـ مثلا زاوية ا جـ ب وأربعة أمثال زاوية ب ا جـ، فقوس ا ط جـ مثلا قوس ا ب وأربعة أمثال قوس ب جـ، لأن نسبة / القوس إلى القوس من دائرة واحدة كنسبة الزاوية إلى الزاوية كانتا على المحيط أو على المركز. وقوس ا ب مثلا قوس ب جـ، فقوس جـ ط ا ب جملتها ستة أمثال قوس ب جـ، فمحيط الدائرة سبعة أمثال قوس ب جـ، فخط ب جـ ضلع المسبع المتساوي الأضلاع في دائرة ا ب جـ المفروضة، فقد عملنا في دائرة ا ب جـ المفروضة ضلع المسبع المتساوي الأضلاع؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

ا-١٤٧-ظ

تمت الرسالة.

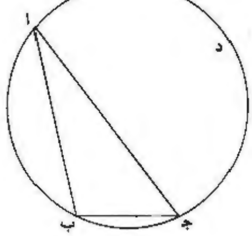
1 ز: ناقصة [ب، ق] – 2 مثلثًا ... زواياه: أثبتها في الهامش [ا] – 3 فليكن: وليكن [ب، د] / د هـ ز: د ز هـ [ا، ق] / زاوية د هـ ز منه: وزاوية د هـ ز [ب، د] – 4 الزاوية الباقية الأخرى: زاوية هـ د ز [ب، د] – 6 ا جـ ب: ا جـ ر [د] – 8 برهان ذلك: برهانه [د] – 9 ا جـ ب: ا جـ ر [د] – 10 من: في، وأثبت الصواب فوقها [ا] – 11 كانتا: كانت [د] كتب فوقها «كانت» [ا] / وقوس: فقوس [ب، د] – 12 جـ ط ا ب: جـ ط [ا] خط اب [د] / جملتها: ناقصة [ب] – 13 المفروضة: ناقصة [ب] – 15 تمت الرسالة: تمت المقالة ووافق الفراغ بكشك همذان في ه بجـ ز ثمد، قوبل من نسخة بخط أحمد بن محمد السجزي والحمد لله وحده [ب] تم استخراج ضلع المسبع لأبي سهل الكوهي والحمد لله وصلواته على محمد وآله. قوبل بنسخة بخط أبي علي الصوفي [ا] تمت الرسالة والحمد لله حق حمده والصلاة على النبي محمد وآله أجمعين الطيبين الطاهرين المعصومين المكرمين [د] تمت الرسالة بعون الله وتوفيقه في يوم الاثنين التاسع والعشرين من ذي القعدة ١١٥٩ [ق].

١٣٠ - و

رسالة لأبي سهل الكوهي
في استخراج ضلع المسبع المتساوي الأضلاع في الدائرة*

‹آ› قال: نريد أن نعمل في دائرة ا ب جـ د مسبعًا متساوي الأضلاع.

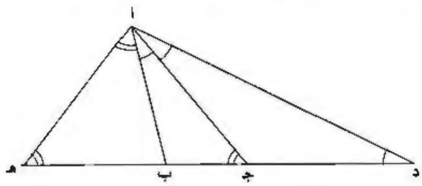
فعلى التحليل، ننزل أن ب جـ ضلعه، ونأخذ قوس ا ب مثلي قوس ب جـ ونصل ا ب ا جـ، فزاوية جـ مثلا زاوية آ، لأن القسي تتناسب تناسب الزوايا، مركزية كانت أو محيطة، وبالعكس. ويبقى قوس ا د جـ أربعة أمثال قوس ب جـ ومثلي قوس ا ب، لأن قوس ب جـ سُبع المحيط، فزاوية ب أربعة أمثال آ ومثلا جـ.



فقد انتهى بنا التحليل إلى عمل مثلث، إحدى زواياه مثلا إحدى الباقيتين وأربعة أمثال الأخرى.

‹ب› نريد أن نعمل مثلثًا كما وصفنا.

فعلى التحليل، ننزل أن زاوية ب من مثلث ا ب جـ مثلا جـ وأربعة أمثال آ.



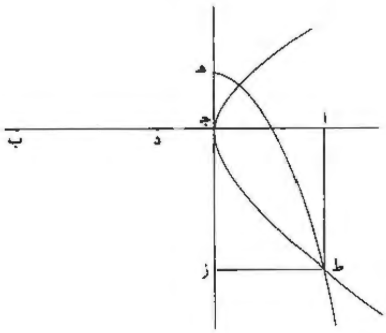
* هذه النسخة من النص السابق هي تحرير مختصر له مجهول المؤلف.

فنخرج جـ د كـ جـ ا، ونصل ا د. فـ ا ب جـ لكونها مثلي ا جـ ب، التي هي ضعف د لتساوي جـ د جـ ا، هي أربعة أمثال د، وكانت أربعة أمثال ب ا جـ. وا ب جـ مشتركة لمثلثي ا د ب ا جـ ب، فالباقية كالباقية، فهما متشابهان: د ب إلى ب ا كـ ب ا إلى ب جـ. فـ د ب في ب جـ كمربع ب ا.

ونجعل ب هـ كـ ب ا، ونصل ا هـ. فـ د ب في ب جـ كمربع ب هـ. ولأن خارجة ا ب جـ مثلا هـ ا ب لتساوي ا ب ب هـ، وكانت مثلي ب جـ ا، وهـ مشتركة لمثلثي جـ ا هـ ب ا هـ، فالباقية كالباقية، فهما متشابهان، فـ جـ هـ إلى هـ ا كـ هـ ا إلى هـ ب، فـ جـ هـ في هـ ب كمربع هـ ا، أعني مربع جـ ا، لتساوي زاويتي ا جـ ب ا هـ جـ، بل مربع جـ د، فـ جـ هـ في هـ ب كمربع جـ د، وكان د ب في ب جـ كمربع ب هـ.

فقد انتهى بنا العمل في عمل المثلث الموصوف، إلى قسم خط مستقيم كـ د هـ، بنقطتين كـ جـ ب، بحيث يكون د ب في ب جـ كمربع ب هـ، وجـ هـ في هـ ب كمربع د جـ.

‹ جـ › ونريد أن نجده على جهة التحليل: ننزل أن ا ب مقسوم على جـ د، وب جـ في جـ د كمربع ا جـ، ود ا في ا جـ كمربع د ب.



فنخرج عمود جـ هـ كـ جـ د، وجـ ز على استقامته كـ د ب، وا ط ز ط موازيين لـ جـ ز جـ ا. فلأن ز جـ كـ ب د وجـ هـ كـ جـ د، فـ ز هـ في هـ جـ كـ ب جـ في جـ د، أعني مربع جـ ا، بل مربع ز ط، وهـ جـ كـ جـ د، فـ ز هـ في جـ هـ كمربع

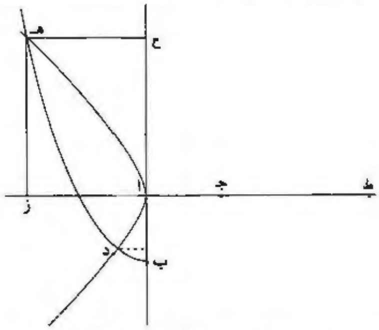
ز ط، فنقطة ط على محيط القطع المكافئ الذي سهمه هـ ز ورأسه هـ وضلعه القائم جـ د. وأيضاً، لأن د ا في ا جـ كمربع د ب، أعني مربع جـ ز، بل مربع ا ط، فنقطة ط أيضاً على محيط القطع الزائد الذي رأسه جـ، وكلٌّ من هـ جـ وسهمه وضلعه القائم مساوٍ لـ د جـ؛ لأن نسبة د ا في ا جـ إلى مربع ا ط كنسبة القطر إلى ضلعه القائم في الزائد. وإذا فرضنا جـ د، الذي هو سهم الزائد، مساوياً للضلعين القائمين للقطعين، معلومَ الوضع والقدر، صار كل واحد من محيطي القطعين معلوم الوضع، فنقطة ط التي هي الفصل المشترك معلومة؛ وا ط معلوم، لأنه عمود على ا ب المعلوم الوضع من نقطة ط المعلومة، فـ د ب المساوي له معلوم، وكل واحد من ا جـ جـ د د ب معلوم، فقد انقسم ا ب المعلوم على جـ د، وب جـ في جـ د كمربع جـ ا، ود ا في ا جـ كمربع د ب؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.

‹د› نريد أن نبيّن: إذا كان ا ب مقسوماً كما وصفنا، فإن كل قسمين منها أعظم من الباقي.



وذلك لأن ا د في د جـ كمربع د ب، فـ د ب وسط بينهما. وا د، الذي هو قسمان منه، أعظم من جـ د الثالث، فيكون أعظم من د ب الثاني؛ وبمثله فلأن ا جـ ‹وسط في النسبة بين جـ ب ب د، فـ جـ ب› الذي هو قسمان، أعظم من جـ ا؛ وأما أن ا جـ د ب أعظم من جـ د، فظاهر لأنهما أعظم من د ب، الذي هو أعظم من جـ د، فإذن إذا انقسم ا ب، على ما وصفنا، فكل قسمين منه أعظم من الباقي؛ وذلك ما أردنا بيانه.

‹ه› نريد أن نقسم خطاً على ما وصفنا.



9 نعمل: نعلم – هذا الشكل ليس في المخطوطة – 13 ا جـ: قد تقرأ «ا جـ ب».

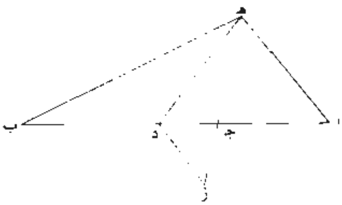
فعلى التركيب، نجعل اب اجـ المتساويين محيطين بقائمة، ونخرجهما على استقامة. ونرسم في سطحهما قطع ب هـ المكافئ على سهم اب، وضلع اجـ ‹القائم› ورأسه ب؛ وفيه أيضا قطع اهـ الزائد على سهم اجـ. المساوي لضلعه القائم. ورأسه ا. ونخرج هـ ز هـ ح موازيين لـ اح از، وط جـ كـ اح أو ز هـ.

فقد انقسم ز ط على جـ ا كما أردنا. لأن ط ا في اجـ كـ ح ب فيه. المساوي لمربع از. فـ ط ا في اجـ كمربع از.

ولأن اهـ قطع زائد. وهـ ز على الترتيب. وسهمه اجـ كضلعه القائم، فـ جـ ز في ز ا كمربع ز هـ. إذ نسبتها نسبة قطر القطع إلى ضلعه القائم. وهما متساويان. ومربع ز هـ كمربع اح. أعني مربع جـ ط. فـ جـ ز في ز ا كمربع جـ ط. وتبين أن ط ا في اجـ كمربع از. فقد قسمنا كما أردنا.

‹و› نريد أن نعمل مثلثًا كما وصفنا.

فعلى التركيب، نقسم اب على جـ د. بحيث يكون ب جـ في جـ د كمربع اجـ. ود ا في اجـ كمربع د ب. فنعمل من ثلاثة خطوط مساوية لـ اجـ جـ د د ب مثلثا، ١٣٠ - ظ إذ كل اثنين منها أعظم من الباقي؛ وليكن جـ هـ د، على أن جـ هـ كـ جـ ا ود هـ كـ د ب.

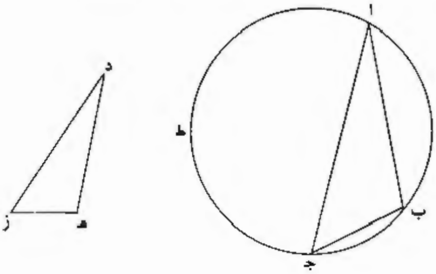


فقد عملنا. لأنا نخرج جـ ز ونصل اهـ هـ ب ز د. فلأن ب جـ في جـ د كمربع جـ ا، أعني مربع جـ هـ، فـ ب جـ إلى جـ هـ كـ جـ هـ إلى جـ د؛ وزاوية ب جـ هـ مشتركة بين مثلثي ب جـ هـ د جـ هـ. فهما متشابهان. فـ جـ هـ د كـ ب. وخارجة جـ د هـ – لكونها ضعف ب لتساوي د هـ د ب – فهي ضعف جـ هـ د. ولأن ز هـ في هـ جـ كـ د ا في اجـ. أعني مربع د ب. بل مربع د هـ، فـ ز هـ إلى هـ د كـ هـ د إلى

4 وط جـ: وط ح

هـ جـ، وزاوية ز هـ د مشتركة بين مثلثي ز هـ د جـ هـ د، فهما متشابهان، فـ هـ د جـ كـ ز، لكن خارجة هـ جـ د مثلا ز المساوية لـ هـ د جـ، التي هي مثلا جـ هـ د، فـ هـ جـ د مثلا جـ د هـ وأربعة أمثال جـ هـ د، وهو المطلوب.

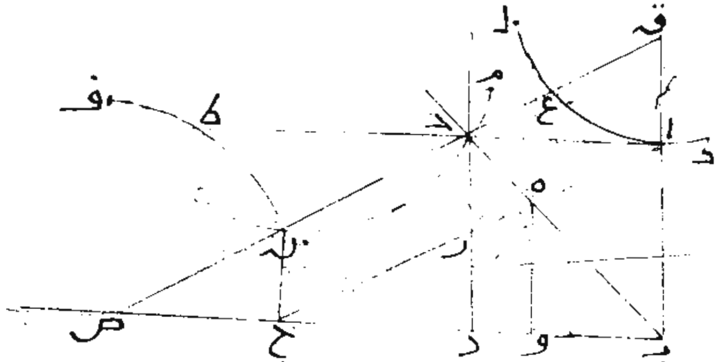
‹ز› نريد أن نجد ضلع المسبع المتساوي الأضلاع في دائرة ا ب جـ.



فعلى التركيب، نعمل مثلث د هـ ز بحيث تكون هـ مثلا ز وأربعة أمثال د؛ وفي الدائرة مثلث ا ب جـ، بحيث تساوي زواياه زوايا د هـ ز، مثلاً ب لـ هـ وجـ لـ ز والباقية للباقية.

فـ ب جـ ضلع المسبع، لأن ا ط جـ مثلا قوس ا ب وأربعة أمثال ب جـ، لأن القسي تتناسب تناسب الزوايا، فالمحيط سبعة أمثال قوس ب جـ، فـ ب جـ ضلع المسبع؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

المذكور ولكن دح مثل جز لانهما من القطعين
المتقابلين ومن زاويتيهما اللذين بينه ابلونيوس في الشكل
الحادي والثلثين من القول الاول من كتاب المخروطات وجز
مثل زح للتوازي فاذا ضرب از في اه مثل مربع زح واخرج
عمود ده وهو على بد فبين لما تقدم من بيانه ان ضرب وح في ود
مثل مربع بو وكذلك ضرب هح في هز مثل مربع اه وكذلك
انقسم زح لان نسبة اقسامه كنسبة اقسام بد فضرب
بد في بو مثل مربع دح وضرب وح في ود مثل مربع بو ثم
عمل مثلثا احد اضلاعه مثل بو والثاني مثل ود والثالث
مثل دح واخرج الضلع المساوي لود في جهتيه حتى صارت
الزيادتان كل منهما مثل الضلع الاخر الذي يليه من الضلعين
الباقيين وحصل المثلث المعلوم الذي عمله ارشميدس وغيره



المخطوطة الوطنيّة في باريس، رقم ٤٨٢١، الورقة ٤٠ و: «رسالة أبي الجود محمّد بن الليث إلى أبي محمّد عبد الله بن علي الحاسب في طريقي أبي سهل القوهي وشيخه أبي أحمد الصاغاني في عمل المسبّع المتساوي الأضلاع في الدائرة».

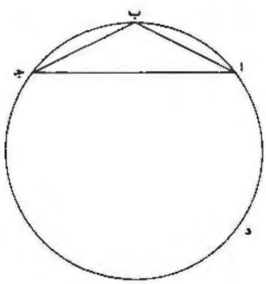
ب – ١ – ظ
ط – ١٨٢ – ظ

رسالة في عمل ضلع المُسبّع المتساوي الأضلاع في الدائرة
لأبي سهل القوهي

أما أصحاب التعاليم، فكلهم قائلون بفضل أرشميدس، ويقدّموه على غيره من قدمائهم، لِما رأوا من استنباطاته للأشياء الحسنة البعيدة والأشكال المستصعبة الغامضة من العلوم البرهانية النفيسة؛ وذلك ظاهر من كُتُبه الموجودة، مثل كتاب *مراكز الأثقال* وكتاب *الكرة والأسطوانة* وغيرهما من الكتب التي كل واحد منها في الغاية التي ليس ورائها نهاية، ولذلك ظنوا أن ما صعب عليه استخراجه، ولم يكمل له إتمامه، أنه لا سبيل لأحد عليه، ولا طريق لغيره إليه، كما ظنوا بعمل ضلع المسبّع المتساوي الأضلاع في الدائرة، لما ظهر من كتابه الذي عمله في ذلك، وهو كتاب لطيف، لم يتمم قصده، ولا أكمل غرضه في استخراجه من طريق واحد، فكيف من طُرق كثيرة، كما تمم الله لعبد مولانا أبي الفوارس / بن عَضُد الدولة / وخادمه وَيْجن بن رُستم وهو:

ب – ٢ – و
ط – ١٨٣ – و

– آ – نريد أن نجد في دائرة ا ب جـ د المعلومة ضلع المسبع المتساوي الأضلاع.



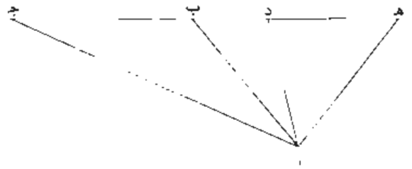
1 البسملة: ناقصة [ط] – 3 القوهي: الكوهي [ط] – 8 ولذلك: وكذلك، وأثبت الصوب في الهامش [ب] – 12 رستم: وستم [ب].

فعلى التحليل، ننزل أن كل واحد من خطي ا ب ب جـ هو ضلع المسبع المتساوي الأضلاع في دائرة ا ب جـ د. فكل واحد من قوسي ا ب ب جـ سبع محيط دائرة ا ب جـ د. فإذا فصّلنا، كان كل واحد من قوسي ا ب ب جـ خمس قوس ا د جـ، فقوس ا د جـ خمسة أمثال كل واحد من قوسي ا ب ب جـ. فزاوية ا ب جـ خمسة أمثال كل واحدة من زاويتي ب ا جـ ب جـ ا، لأن نسبة القوس إلى القوس في الدائرة كنسبة الزاوية إلى الزاوية، على محيطها كانت الزاوية أو على المركز. فمثلث ا ب جـ متساوي الساقين وزاوية ا ب جـ خمسة أمثال كل واحدة من زاويتي ب ا جـ ب جـ ا الباقيتين. فنرجع ذلك إلى عمل مثلث متساوي الساقين، وإحدى زواياه خمسة أمثال / كل واحدة من الزاويتين الباقيتين. ب-٢-ظ

‹ب› فنريد أن نعمل مثلثًا متساوي الساقين، وإحدى زواياه خمسة أمثال كل واحدة من الزاويتين الباقيتين. ط-١٨٣-ظ

فعلى التحليل، ننزل أن مثلث ا ب جـ متساوي الساقين وزاوية ا ب جـ منه خمسة أمثال كل واحدة من زاويتي ب ا جـ ب جـ ا، وخط جـ ب د هـ مستقيم، وزاوية ب ا د مساوية لكل واحدة من زاويتي ب ا جـ ب جـ ا وخط د هـ مساوٍ لخط د ا.

فلأن زاوية ا جـ د مساوية لزاوية ب ا د وزاوية ا د ب مشتركة لمثلثي ا جـ د ا ب د، فالزاوية الباقية مساوية للزاوية الباقية، ومثلث ا جـ د شبيه بمثلث ا ب د. فنسبة خط جـ د إلى خط د ا كنسبة خط د ا إلى خط د ب. فضرب جـ د في د ب مساوٍ لمربع خط د ا، وخط د ا مساوٍ لخط د هـ. فضرب جـ د في د ب مساوٍ لمربع خط د هـ.

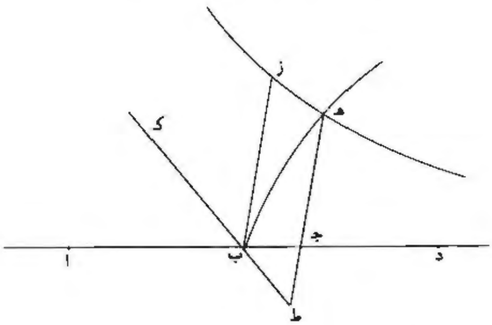


وأيضًا، لأن زاوية ا ب جـ خمسة أمثال زاوية ب جـ ا / وزاوية ب جـ ا مساويةٌ لزاوية ب-٣-و ب ا د، فزاوية ا ب جـ خمسة أمثال زاوية ب ا د. ولكن زاوية ا ب جـ مساوية لزاويتي

1 ننزل: ينزل [ظ] – 6 المركز: مركزها [ظ] – 8 فنرجع: فيرجع [ظ] وحدى: واحد [ب] – 10 فنريد: نريد [ب] واحدى: واحد [ب] – 12 ننزل: ينزل [ظ] – 18 وخط د ا: ناقصة [ظ] مسو (الأولى): مساوي [ب].

ب ا د ب د ا، فزاويتا ب د ا ب د ا ب ا د خمسة أمثال / زاوية ب ا د. فإذا فصلنا، كانت [ط-١٨٤-و] زاوية ب د ا أربعة أمثال زاوية ب ا د؛ وزاوية ا ب د مثلا زاوية ب جـ ا، لأن مثلث ا ب جـ متساوي الساقين وزاوية ا ب د خارجة عن مثلث ا ب جـ. وزاوية ب جـ ا مساوية لزاوية ب ا د، فزاوية ا ب د مثلا زاوية ب ا د، وزاوية ا د ب أربعة أمثال زاوية ب ا د. فلهذا، زاوية ا د ب مثلا زاوية ا ب د، وزاوية ا د ب مثلا كل واحدة من زاويتي د ا هـ د هـ ا، لأن مثلث ا د هـ متساوي الساقين، وزاوية ا د ب خارجة منه، فزاوية ا ب د مساوية لكل واحدة من زاويتي د ا هـ د هـ ا. ولأن زاوية ا ب د مساوية لزاوية د ا هـ، وزاوية ا هـ د مشتركة لمثلثي ا ب هـ ا د هـ، فالزاوية الباقية مساوية للزاوية الباقية، ومثلثا ا هـ ب ا د هـ متشابهان. فنسبة ب هـ إلى هـ ا كنسبة ‹خط› هـ ا إلى خط هـ د، فضرب ب هـ في / هـ د مساوٍ لمربع خط هـ ا، وخط هـ ا مساوٍ لخط ا ب، لأن زاوية [ب-٣-ظ] ا هـ ب مساوية لزاوية ا ب هـ؛ وخط ا ب مساوٍ لخط / جـ ب، لأن مثلث ا ب جـ [ط-١٨٤-ظ] متساوي الساقين. فضرب ب هـ في هـ د مساوٍ لمربع خط ب جـ؛ وقد كان ضرب جـ د في د ب مساويًا لمربع د هـ. فينبغي أن يكون خط ما مستقيمًا مقسومًا على نسبة جـ ب ب د د هـ حتى يكون ضرب جـ د في د ب مساويًا لمربع د هـ، وضرب ب هـ في هـ د مساويًا لمربع ب جـ. فنرجع إلى وجود خط مستقيم مقسوم على هذه النسبة.

‹جـ› فنريد أن نجد خطًا مستقيمًا مقسومًا على هذه النسبة.



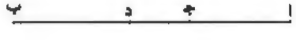
1 فزاويتا: فزاويتي [ب، ط] / فصلنا: فضلنا [ط] – 2 مثلا: مثلي [ب، ط] – 3 عن: من [ط] – 4 مثلا: مثلي [ب، ط] – 5 مثلا (الأولى والثانية): مثلي [ب، ط] – 7 ولأن: أما لأن [ب] – 8 مثلثا: مثلثي [ب، ط] – 11 ا ب جـ: ا ب ح [ط] – 12 جـ د: ح د [ط] – 13 مساويًا: مساوٍ [ب، ط] / خط: ناقصة [ط] – 14 مساويًا: مساوٍ [ب] – 15-14 لمربع ... مساويًا: في الهامش مع «صح» و«ظ» فوقها [ب] – 14 ب هـ: ب د [ط] – 15 مساويًا: مساوٍ [ب] / فنرجع: فيرجع [ط] – 16 مقسومًا: ناقصة [ب] / النسبة: النسب [ب].

فعلى التحليل، ننزل أن خطوط ا ب ب جـ جـ د على هذه النسبة، أعني أن ضرب ا جـ في جـ ب مساوٍ لمربع جـ د وضربَ ب د في د جـ مساوٍ لمربع ا ب. ونفرض أن خط جـ هـ مساوٍ لخط جـ د وخطَّ ب ز مساوٍ لخط ا ب، وهما متوازيان ويحيطان مع خط جـ ا بزاوية معلومة، وزاويةَ ا ب ز مقسومة بنصفين بخط ك ب ط وخط هـ جـ ط مستقيماً.

فلأن ضرب خط ا جـ في خط جـ ب مساوٍ لمربع جـ د / ب - ٤ - و ومربعَ خط جـ د مساوٍ لمربع خط جـ هـ، فضرب ا جـ في جـ ب مساوٍ لمربع خط / ط - ١٨٥ - و جـ هـ. وزاوية هـ جـ ب معلومة، فنقطة هـ على محيط القطع الزائد – وهو ب هـ – الذي قطره المجانب خط ا ب وضلعه القائم مساوٍ لقطره المجانب – وهو خط ا ب – وزاوية ترتيبه هي زاوية هـ جـ ب.

وأيضاً، خط ب جـ مساوٍ لخط جـ ط، لأن زاوية جـ ب ط مساوية لزاوية ب ط جـ، وخطُّ جـ د مساوٍ لخط جـ هـ. فضرب ط هـ في هـ جـ مساوٍ لمربع ب ا، أعني مربع ب ز، لأن خطي ا ب ب ز متساويان. فضرب ط هـ في هـ جـ مساوٍ لمربع خط ز ب، فنقطة هـ أيضاً على محيط القطع الزائد – وهو ز هـ – الذي لا يلقيانه خطا ب د ب ك ويمرّ على نقطة ز. وإن جعلنا ا ب معلوم القدر والوضع، تكون الخطوط كلها معلومة الوضع، ونقطة ز معلومة، ويكون كل واحد من قطعي ب هـ ز هـ معلوم الوضع، فنقطة هـ / ب - ٤ - ظ معلومة، فنقطة جـ معلومة، لأن زاوية هـ ب جـ معلومة، فكل واحدة من نقط ا ب جـ د معلومة، وذلك ما أردنا أن نعلم.

<د> إذا كان خط ا ب مقسوماً على نقطتي جـ د على ما وصفنا، أعني أن يكون ضرب خط ب جـ في خط جـ د مساوياً لمربع خط ا جـ وضربُ خط د ا في خط ا جـ مساوياً لمربع خط د ب، فأقول: إن كل خطين من خطوط ا جـ جـ د د ب أعظم من الخط الباقي.



1 ننزل: ينزل [ط] – 2 مساوٍ (الأولى): مساوي [ب] / ونفرض: ويفرض [ط] – 3 جـ د ... لخط: مكررة [ط] – 4 هـ جـ ط: هـ ح ط [ط] – 5 جـ ب: ح ب [ط] / جـ د (الثانية): ح د [ط] / خط: ناقصة [ط] – 6 هـ جـ ب: جـ ب [ط] – 7 قطره: القطر [ط] – 9 مساوٍ: مساويًا [ط] / جـ ب ط: ح ب ط [ط] / ب ط جـ: ب ط ح [ط] – 10 فضرب ... ب ا: مكررة، كتب «ا ب» بدلاً «ب ا» في تكرار [ب] / هـ جـ: هـ ح [ط] – 10-11 ب ا ... لمربع: ناقصة [ط] – 12 خطا: خطي [ب، ط] – 14 معلوم: معلومة [ط] – 15 هـ ب جـ: هـ ب ح [ط] / واحدة: واحد [ب، ط] – 16 جـ: ح [ط] – 18 ب جـ: ب ح [ط] / مساويًا: مساو [ب، ط] / خط (الخامسة): ناقصة [ط] / ا جـ (الأولى والثانية): ا ح [ط] – 19 مساويًا: مساو [ب، ط].

ط-١٨٥-ظ

برهان ذلك: / لأن ضرب ب جـ في جـ د مساوٍ لمربع ا جـ، فنسبة ب جـ إلى جـ ا كنسبة جـ ا إلى جـ د. وخط ب جـ أعظم من خط جـ د، فخط ب جـ أعظم من خط جـ ا، ‹و›لأن خط جـ ا وسط بين خطي ب جـ جـ د في النسبة، فخط جـ ا أعظم من خط جـ د، وخط ب جـ هو قسمان من الأقسام الثلاثة، أعني خطي ب د د جـ، ‹فهو› أعظم من القسم الباقي، وهو ا جـ.

ب-٥-و

وأيضًا، لأن خط ا جـ أعظم من خط د جـ، فهو مع خط د ب أعظم بكثير من خط جـ د، فخطا ا جـ د ب أعظم من خط جـ د الباقي. / وأيضًا، لأن ضرب خط د ا في ‹خط› ا جـ مساوٍ لمربع د ب، فخط د ب وسط في النسبة بين خطي د ا ا جـ. فلهذا يكون خط د ا أعظم من خط د ب، وخط د ا هو قسمان من الأقسام الثلاثة، فقسما ا جـ جـ د أعظم من قسم د ب الباقي. فخط ا ب المقسوم بالأقسام على ما وصفنا، فكل قسمين منها أعظم من القسم الباقي؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

‹ه› نريد أن نجد خطًا ما مستقيمًا مقسومًا على هذه النسبة.

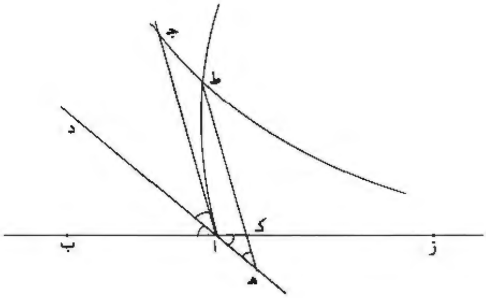
ط-١٨٦-و

ب-٥-ظ

فعلى التركيب، نجعل خط ا ب معلوم الوضع والقدر؛ وخطً ا جـ مساويًا لخط ا ب على زاوية معلومة، ونقسم زاوية جـ ا ب بنصفين بخط د ا هـ، وخطً ب ا ز مستقيمًا. ونجعل على نقطة ا قطعًا زائدًا يكون / قطره المجانب خط ا ب وضلعه القائم مساويًا لخط ا ب، فزاوية ترتيبه مساوية لزاوية جـ ا ب؛ وليكن محيط القطع ا ط. ونجعل على نقطة جـ أيضًا قطعًا زائدًا لا يلقيانه خطا ا د ا ز؛ وليكن القطع جـ ط؛ فيتقاطعان على نقطة ط. / ونجعل خط ط كـ هـ على الترتيب، ونجعل خط كـ ز مساويًا لخط كـ ط.

فأقول: إن أقسام خط ب ز على نقطتي ا كـ هي كما أردنا، أعني ‹أن› ضرب خط ب كـ في كـ ا مساوٍ لمربع كـ ز وضربَ خط ا ز في ز كـ مساوٍ لمربع خط ا ب.

1 ب جـ (الأولى): ب ح [ط] – 2 جـ د فخط ... من خط: مكررة [ب] – 3 جـ ا (الثانية): حـ د [ط] / وسط: وسطا [ب] / ب جـ جـ د: ب ح ح د [ط] / فخط: وخط [ب، ط] – 4 قسمان: قسمين [ب، ط] / الثلاثة: الثلث [ب، ط] / خطي: خط [ط] / د جـ: د ح [ط] – 5 ا جـ: ا ح [ط] – 6 ا جـ: ا ح [ط] / خط (الثالثة): ناقصة [ط] / د ب: ا ب [ط] / بكثير: بكثيرة [ط] – 7 فخطا: فخطي [ب، ط] – 8 وسط: وسطا [ب] – 9 قسمان: قسمين [ب، ط] / الثلاثة: الثلث [ب، ط] / فقسما: فقسمي [ب، ط] – 13 ا جـ: ا ح [ط] – 14 جـ ا ب: جـ د ب [ط] – 15 قطره: قطرة [ط] / مساويًا: مساو [ب، ط] – 16 جـ ا ب: ح ا ب [ط] – 17 جـ: ح [ط] / خطا: خطي [ب، ط] – 18 مساويًا: مساو [ب].



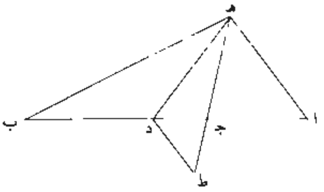
برهان ذلك: لأن قطع ا ط قطع زائد، وقطرَه المجانب خط ا ب وهو مساوٍ لضلعه القائم، ونسبةَ سطح ب ك في ك ا إلى مربع ك ط كنسبة قطره المجانب إلى ضلعه القائم، وهما متساويان، فضرب ب ك في ك ا مساوٍ لمربع ك ط. ومربع ك ط مساوٍ لمربع ك ز لأن خطي ك ط ك ز متساويان. فضرب ب ك في ك ا مساوٍ لمربع ك ز.

وأيضًا، خط ك ا مساوٍ لخط ك هـ لأن زاوية ك هـ ا مساوية لزاوية ك ا هـ وخط ك ز مساوٍ لخط ك ط، فخط ا ز مساوٍ لخط هـ ط. فضرب ا ز في ز ك مساوٍ لضرب هـ ط في ط ك. ولكن ضرب هـ ط في ط ك مساوٍ لمربع ا جـ، / لأن / قطع جـ ط الزائد لا ب-٦-و ط-١٨٦-ظ يلقيانه خطا ا د ا ز، وهو مارٌ على نقطة جـ، وخط جـ ا موازٍ لخط ط ك هـ. فضرب ا ز في ز ك مساوٍ لمربع ا جـ، ومربع ا جـ مساوٍ لمربع ا ب، لأنهما متساويان. فلهذا ضرب ا ز في ز ك مساوٍ لمربع ا ب. وقد كان ضرب ب ك في ك ا مساوٍ لمربع ك ز. فقد وجدنا خط ب ز المستقيم مقسومًا على نقطتي ك ا، وضرب ب ك في ك ا مساوٍ لمربع ك ز، وضرب ا ز في ز ك مساوٍ لمربع ا ب على ما وصفنا؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

⟨و⟩ نريد أن نعمل مثلثًا متساوي الساقين، وإحدى زواياه خمسة أمثال كل واحدة من الزاويتين الباقيتين، كما قلناه في التحليل.

فعلى التركيب، نجد خط ا ب المستقيم مقسومًا على نقطتي جـ د، وضرب ب جـ في جـ د مساوٍ لمربع جـ ا وضرب د ا في ا جـ مساوٍ لمربع د ب، كما بينا عمله قبل ذلك.

1 قطع زائد: قطعًا زائدًا [ب] / وقطره: كتب بعدها «الزايد» ثم ضرب عليها بالقلم [ب] وقطرة [ط] – 2 قطره: قطرة [ط] – 7 ا جـ: ا ح [ط] – 8 يلقيانه: يلتقيانه [ط] / خطا: خطي [ب، ط] / وهو: هو [ب، ط] / جـ ا: ح ا [ط] / موازٍ: موازي [ب] / ط ك هـ: ك ط [ط] – 9 ز ك: ز ب [ب] / ا ب: ا ز [ب] – 13 وإحدى: واحد [ب، ط] – 14 قلناه: قلنا [ط] – 15 ب جـ: ب ح [ط] – 16 جـ د: ح د [ط] / ا جـ: ا ح [ط].



فلأن كل خطين من خطوط ا جـ جـ د د ب أعظم من الخط الباقي، فنعمل من ثلاثة / خطوط مساوية لـ ا جـ جـ د د ب مثلثًا؛ وليكن مثلث جـ د هـ، ونصل خط ب هـ. ب-٦-ظ

فأقول: إن مثلث ب د هـ متساوي الساقين وزاوية ب د هـ خمسة أمثال كل واحدة من زاويتي / د هـ ب د ب هـ. ظ-١٨٧-و

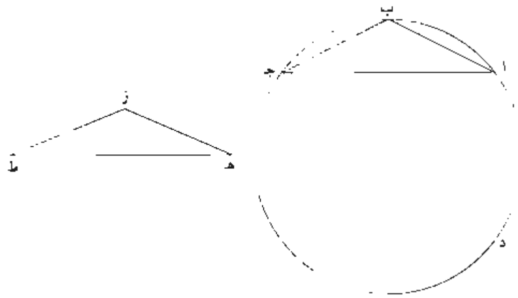
برهان ذلك: أنا نصل خط ا هـ، ونجعل خط د ط موازيًا لخط ا هـ وخطَّ هـ جـ ط مستقيما، فخط جـ ط مساوٍ لخط جـ د، لأن مثلث ا جـ هـ متساوي الساقين، فضرب ط هـ في هـ جـ مساوٍ لضرب خط د ا في ا جـ. ولكن ضرب خط د ا في ا جـ مساوٍ لمربع د ب، أعني مربع خط هـ د، لأن خطي د ب د هـ متساويان. فضرب ط هـ في هـ جـ مساوٍ لمربع هـ د، فنسبة ط هـ إلى هـ د كنسبة هـ د إلى هـ جـ؛ وزاوية د هـ جـ مشتركة، فزاوية هـ د جـ مساوية لزاوية هـ ط د؛ وزاوية هـ جـ د ضعف زاوية جـ ط د، لأن مثلث جـ ط د متساوي الساقين. فزاوية هـ جـ د ضعف زاوية هـ د جـ، وزاوية هـ د جـ ضعف زاوية هـ ب د، لأنها خارجة عن مثلث هـ د ب المتساوي / الساقين. وزاوية هـ ب د مساوية لزاوية د هـ جـ، فزاوية هـ د جـ ضعف زاوية د هـ جـ. فزاوية هـ جـ د أربعة أضعاف زاوية جـ هـ د. فإذا ركبنا، كانت زاويتي هـ جـ د جـ هـ د خمسة أضعاف زاوية جـ هـ د؛ وزاوية هـ د ب الخارجة من مثلث جـ هـ د مساوية لزاويتي هـ جـ د د هـ جـ، وزاوية جـ هـ د مساوية لزاوية هـ ب د؛ / فزاوية هـ د ب خمسة أضعاف زاوية ب-٧-و ظ-١٨٨-ظ

1 جـ: ح [ظ] – 2 ا جـ: ا ح [ظ] – 5 د ب هـ: د هـ ب [ظ] – 7 مستقيما: مستقيم [ب، ظ] / جـ ط: جـ د، ثم أثبت الصواب في الهامش [ب] ح ه [ظ] – 8 هـ جـ: هـ د [ظ] ؛ ولكن: وليكن [ظ] / ا جـ: ا ح [ظ] – 10 هـ جـ (الثانية): هـ ح [ظ] – 11 هـ د جـ: هـ د ح [ظ] – 12 هـ د جـ (الثانية): هـ د ح [ظ] – 13 هـ ب د: ب د [ظ] – 14 د هـ جـ (الثانية): د هـ ح [ظ] – 17 رسم الناسخ كل الأشكال الهندسية في صفحتي ١٨٧ظ–١٨٨و [ظ].

هـ ب د. وزاوية هـ ب د مساوية لزاوية د هـ ب، لأن مثلث هـ د ب متساوي الساقين. فمثلث هـ د ب متساوي الساقين الذي إحدى زواياه، وهي زاوية هـ د ب، خمسة أضعاف كل واحدة من زاويتي د هـ ب د ب هـ. فقد عملنا مثلثًا متساوي الساقين، وإحدى زواياه خمسة أضعاف كل واحدة من الزاويتين الباقيتين، وهو مثلث هـ د ب؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

‹ز› نريد أن نعمل في دائرة ا ب جـ د المعلومة ضلع المسبع المتساوي الأضلاع.

فعلى التركيب، نعمل / مثلث هـ ز ط متساوي الساقين وزاوية هـ ز ط خمسة أضعاف ب-٧-ظ كل واحدة من زاويتي ز هـ ط هـ ط ز الباقيتين، كما بيّنا قبل ذلك. ونعمل في دائرة ا ب جـ د مثلث ا ب جـ شبيهًا بمثلث هـ ز ط، وخط ا جـ نظير خط هـ ط.



فأقول: إن كل واحد من خطي ا ب ب جـ ضلع المسبع المتساوي الأضلاع في دائرة ا ب جـ د.

برهان ذلك: لأن زاوية هـ ز ط خمسة أضعاف كل واحدة من زاويتي ز هـ ط ز ط هـ، فزاوية ا ب جـ خمسة أضعاف كل واحدة من زاويتي ب ا جـ / ب جـ ا. ظ-١٨٩-و فقوس ا د جـ خمسة أضعاف كل واحدة من قوسي ا ب ب جـ، لأن نسبة القوس في الدائرة إلى القوس كنسبة الزاوية إلى الزاوية، سواء كانت الزاوية على المحيط أو على المركز. فإذا

1-2 لأن ... فمثلث هـ د ب: ناقصة [ظ] – 2 متساوي: المتساوي [ب] / إحدى: احد [ب، ظ] – 3 واحدة: واحد [ظ] – 4 وإحدى: احد [ب، ظ] 5 أردنا أن نبين: اردناه [ظ] – 7 هـ ز ط (الثانية): ز هـ ط [ظ] – 10 ب جـ: ز جـ [ظ] – 12 خمسة ... زاويتي: مكررة [ظ] – 13 ا ب جـ: ا ب ج [ظ] – 14 واحدة: واحد [ظ].

ركبنا، كان محيط دائرة ا ب جـ د كله سَبعة أضعاف كل واحدة من قوسي ا ب ب جـ؛ فكل واحدة من قوسي ا ب ب جـ سُبع محيط دائرة ا ب جـ د. فلهذا كل واحد من خطي ا ب ب جـ ضلع المسبع المتساوي الأضلاع في دائرة / ا ب جـ د. فقد عملنا في دائرة ا ب جـ د ضلع المسبع المتساوي الأضلاع، وهو ا ب ‹أو› ب جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبين. ب-٨-و

تمت الرسالة في عمل ضلع المسبع المتساوي الأضلاع في الدائرة.

1 واحدة: وحد [ط] - 2 واحدة: وحد [ط] - 3-4 فقد ... ب جـ د: ناقصة [ط] - 4 ضلع: ضلعي [ط]
6 تمت ... الدائرة: كتب بعدها والحمد لله رب العالمين قوبل به وصح من نسخة منقولة منها ولله الحمد [ب] تم تم تم [ط]

نصّ كتاب الصاغاني:

رسالة أحمد بن محمد بن الحسين الصاغاني

إلى الملك الجليل عضد الدولة بن أبي علي ركن الدولة

٢٣ ظ

رسالة أحمد بن محمد بن الحسين الصاغاني
إلى الملك الجليل عضد الدولة بن أبي علي ركن الدولة

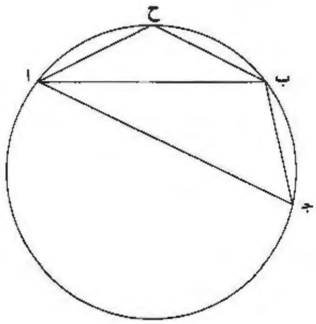
لما كان الخير هو الذي يطلب ويُرغب من أجل ذاته، فالخير هو المطلوب في الحقيقة و‹طالبه› هو السعيد مطلقًا. ومن خواص السعيد حُسن السيرة وكمال الأفعال. فإذا كان الأمر كما قلنا، وهذه هي صفة الخيّر والسعيد، فمولانا الملك الجليل المنصور عضد الدولة، أطال الله بقاءه، هو الخيّر والسعيد في الحقيقة، إذ خُبِرَتْ له الأفعال الجليلة والسيرة الفاضلة. وقد امتدت العيون إليه واجتمعت القلوب على طاعته.

ومن سعادة الملوك والرؤساء ظهور العلوم المشكّلة في أيامهم. وقد كان استخراج وتر المسبع مُعتاصا على المهندسين؛ فإن أرشميدس وضع مقدمة إذا حصلت هي، يحصل بحصولها وتر المسبع. وعلى هذه السبيل جرت هذه المسألة إلى زماننا هذا؛ فتأتّى استخراج هذه المسألة لأحمد بن محمد بن الحسين الصاغاني بالهندسة الثابتة، وتمت له بدولة الملك الجليل المنصور عضد الدولة أطال الله بقاءه وسعادة جده؛ وأيامه هي / التي بها يُفتَخَر ٢٤ - و ومناقبه التي فيها يُذكَر ويُنشَر، أسأل الله أن يمد أيامه ويديم أنعامه، ويُبلغ أهل العلم فيه آمالهم، ويعينهم على قضاء حقّه بالميسور من خدمتهم، لكل واحد بحسب طاقته.

وقد كنت أنفذت هذه المسألة وقت مقامي بالري إلى خزانته المعمورة بسعادة جده ويمن طائره. والآن فقد عبرتها صورة أخرى بينت كيفية رجوع المسألة إلى المقدمة، ثم رددتها إلى التركيب؛ وخدمت بها مولانا الملك السيد الأجل المنصور، أطال الله بقاءه. وبالله نستعين وعليه التعويل وهو حسبنا ونعم الوكيل.

2 الصاغاني: كتبها الصغاني، ولن نشير إليها فيما بعد – 5 ‹طالبه› هو: نجد علامة ٧ قبلها وفي الهامش، مما يوحي بأن ناسخ أراد كتابة كلمة ناقصة – 10 فإن أرشميدس: كررها ثم ضرب عليها بالقلم – 11 هذه (الثانية): كرر بعدها «السبيل جرت هذه»، ثم ضرب عليها بالقلم – 16 هذه: هي – 17 عبرتها: غيرتها، وتقرأ عبرتها كما أثبتنا يعني «عبر عنها بصورة أخرى»، وقد تقرأ غيرتها يعني «بدلتها بصورة أخرى». والمعنى قريب.

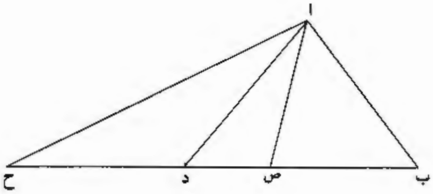
– آ – دائرة ا ب جـ معلومة، كيف نعمل فيها مُسبعًا متساوي الأضلاع والزوايا تحيط به؟



فلننزل على جهة التحليل أنه قد كان. ولتكن خطوط ا ح ب ح ب جـ من أضلاعه، ونتوهم ا ب ا جـ موصولين. ولأن قوس ا ب ضعف قوس ب جـ، يكون زاوية ا جـ ب ضعف زاوية ب ا جـ؛ ولأن قوس ا جـ ضعف قوس ا ب، فيكون زاوية ا ب جـ ضعف زاوية ا جـ ب. فإذًا، إذا عمل مثلث زواياه متناسبة على نسبة الضعف، فقد وجدت المسألة. /

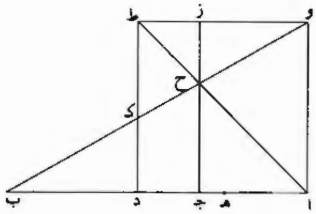
– ب – فننزل على جهة التحليل أن مثلث ا د ص زاوية ا ص د ‹فيه› ضعف زاوية ا د ص، وزاوية ا د ص ضعف زاوية د ا ص. ونتوهم كأنا أخرجنا د ص على استقامة إلى ح وإلى ب، ود ح مثل ا د، وص ب مثل ا ص، وا ح ا ب موصولين. فمن البيّن أن زاوية ا ص د مثلا زاوية ا ب ص، فزاوية ب ا ص مثل زاوية ا د ص، وزاوية ب مشتركة، فمثلث ا د ب يشبه مثلث ا ص ب، فنسبة د ب إلى ا ب كنسبة ا ب إلى ب ص؛ وا ب مثل ا د، لأن زاوية د مثل زاوية ب، وا د مثل د ح، فإذًا نسبة ب د إلى د ح كنسبة د ح إلى ب ص. وأيضًا، لأن زاوية ا د ص مثلا كل واحدة من زاويتي د ا ص ا ح ص، فزاوية ا ح ص مثل زاوية د ا ص. وزاوية ا ص د مشتركة، فمثلث ا ص د يشبه مثلث ا ص ح؛ فنسبة ص ح إلى ا ص، أعني إلى ب ص، كنسبة ا ص، أعني ب ص، إلى ص د. ٢٤-ظ

4-5 يكون، فيكون: كلاهما جائز – 6 مثلث: مثلثا – 11 ا ص د: ا د ص.



فقد أدانا تحليل هذه المسألة إلى وجود خط على هذه الأقسام.

– جـ – فلنضع خط ا ب، وعليه نقطتا د هـ، ولنفرض نسبة ا د إلى د ب ‹كنسبة د ب إلى ا هـ ونسبةَ ب هـ إلى ا هـ› كنسبة ا هـ إلى هـ د. ونعمل على ا د مربع ا ط، ونصل قطر ا ط ونصل و ب.

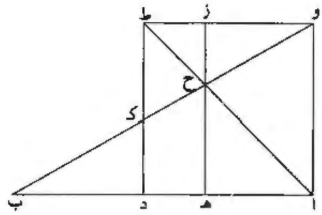


فأقول: إنا إذا / أخرجنا من نقطة ح عمودًا إلى ا ب، يقع على نقطة هـ. ٢٥-و

فإن أمكن غير ذلك، فليقع على نقطة جـ، ونخرجه إلى ز. فبيّن أن ز ط هو مثل ز ح، وكذلك جـ ح مثل ا جـ، فنسبة ب جـ إلى جـ ح، أعني إلى ا جـ، هي كنسبة و ز، أعني ا جـ، إلى ز ح، أعني إلى ز ط، أعني إلى جـ د، فإذًا نسبة ب جـ إلى ا جـ كنسبة ا جـ إلى د جـ. وإذا ركبنا وبدلنا، يكون نسبة ا ب إلى ا د كنسبة ا جـ إلى جـ د. ولأنا فرضنا نسبة ب هـ إلى ا هـ كنسبة ا هـ إلى هـ د، فإذا ركبنا وبدلنا، يكون نسبة ا ب إلى ا د، التي كانت كنسبة ا جـ إلى جـ د، هي كنسبة ا هـ إلى هـ د؛ فإذًا نسبة ا جـ إلى جـ د كنسبة ا هـ إلى هـ د؛ هذا خلف. فإذن العمود الذي يخرج من ح يقع على هـ؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

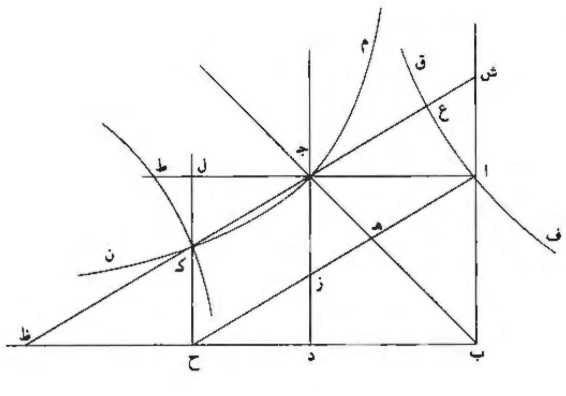
6 هو: كتبها فوق السطر – 11 اد: احـ – 13 هـ: اهـ.

– د – فلنضع الشكل بعينه، وليكن عمود ز ح هـ. ولأنا فرضنا نسبة ا د إلى ب د، أعني نسبة و ك إلى ك ب، كنسبة ب د إلى ا هـ، أعني نسبة ب ك إلى و ح، فإذًا نسبة و ك إلى ك ب كنسبة ك ب إلى / و ح؛ ونسبة و ك إلى ك ب هي كنسبة و ط ٢٥-ظ
إلى د ب، فنسبة ك ب إلى و ح هي كنسبة و ط إلى د ب؛ وزاوية ط و ح مثل زاوية ب، فمثلث ب د ك مثل مثلث و ط ح.



فقد أدانا تحليل هذه المسألة إلى شكل آخر، وهو هذا.

– هـ – مربع ا ب جـ د؛ أخرج خط ب د على استقامته من جهة نقطة د ووصل قطر ب جـ؛ ونريد أن نخرج خطًا من نقطة ا مثل خط ا ح ليكون مثلث ا هـ جـ مثل مثلث ز د ح.



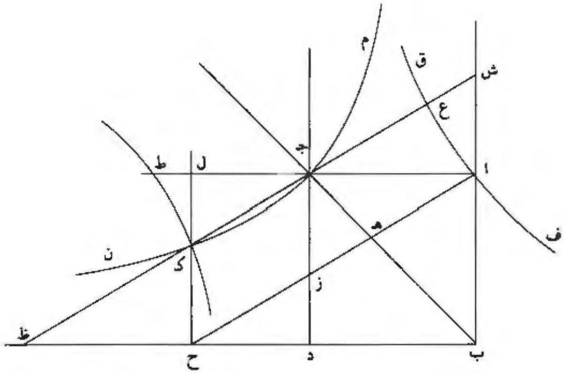
1 ا د: ا ب – 2 ب ك: ب د – 5 ب د ك: ب د ل.

فلننزل على جهة التحليل أنه قد كان. وأن خط ا ح قد عمل المسألة، ونتوهم كأنا تممنا سطح د ل المتوازي الأضلاع القائم الزوايا، ونتوهم خط ش ظ أخرج موازيا لخط ا ح، فـ ا جـ يكون مثل ظ ح، فيكون ش جـ مثل كـ ظ من تشابه مثلثي ا ش جـ كـ ظ ح. ولأن مثلث ا هـ جـ مثل مثلث ز د ح وزاوية هـ ا جـ مثل زاوية ز ح د، فأضلاعهما متكافئة، فنسبة ز ح إلى ا هـ كنسبة ا جـ إلى د ح. ونسبة ا جـ إلى د ح كنسبة ا ز إلى ز ح، فنسبة ا ز إلى ز ح كنسبة / ز ح إلى ا هـ، فضرب ا ز في ا هـ مثل ٢٦-و مربع ز ح. وضرب ا ز في ا هـ أقل من مربع ا جـ، لأن العمود الذي يخرج من نقطة جـ إلى ا ز يقع فيما بين نقطتي هـ ز، فـ ا جـ إذًا أطول من ز ح، أعني من جـ كـ؛ وش جـ أطول من ا جـ، فـ ش جـ إذًا أطول من جـ كـ بكثير. فلنتوهم ع جـ مثل كـ جـ، فيكون إذًا ضرب ا ز في ا هـ مثل مربع ع جـ. فنحن إذا جعلنا قطعًا زائدًا يمرّ بنقطة ا، ويكون الخطان اللذان لا يقعان عليه جـ ب جـ د، وهو قطع ف ق، يمر بنقطة ع كما بين أبلونيوس في الشكل السابع من المقالة الثانية من كتاب *المخروطات*، ويكون قطع ف ق معلوم الوضع. ولأنا بيّنا أن ش جـ مثل كـ ظ، فنحن إذا جعلنا قطعًا زائدًا يمرّ بنقطة جـ، ويكون الخطان اللذان لا يقعان على القطع ش ب ب ظ، يمرّ بنقطة كـ كما بين أبلونيوس في الشكل السادس من المقالة الثانية من كتاب *المخروطات*، ويكون معلوم الوضع. فليكن ذلك القطع م ن. وبيّنا أيضًا أن ا جـ أطول من ز ح، فهو إذًا أطول من جـ ل؛ فنجعل جـ ط مثل ا جـ. فنحن إذا جعلنا قطعا زائدًا مقابلاً لقطع ف ق على نقطة ط، يمرّ بنقطة كـ، كما بيّن أبلونيوس في الشكل الحادي والثلاثين من المقالة / الأولى من كتاب ٢٦-ظ *المخروطات*، ويكون أيضًا معلوم الوضع. فليكن ذلك القطع ط كـ، فقطع ط كـ معلوم الوضع، وقطع م ن كان كذلك، فنقطة كـ إذًا معلومة ونقطة جـ كذلك. فخط جـ كـ إذًا معلوم الوضع، ونقطة ا معلومة، وا ح يوازي جـ كـ، فـ ا ح معلوم الوضع؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

‹و› تركيب هذا التحليل: نضع مربع ا ب جـ د، ونخرج ب د على استقامة، ونصل ب جـ، ونجعل جـ ط مثل ا جـ، ونعمل قطعين متقابلين زائدين يمران بنقطتي ا ط ويكون الخطان اللذان لا يقعان عليهما ب جـ جـ د، وليكونا ف ق كـ ط. ونعمل قطعًا زائدا يمر بنقطة جـ ويكون الخطان اللذان لا يقعان عليه ا ب ب د، وليكن ذلك القطع م ن.

2 ش ظ: ش ط – 3 ظ ح: ط ح – 7 جـ: ب – 11 جـ د: جـ كـ – 12 أبلونيوس: سوبيوس – 14 كـ: ل
سونيوس: اللونيوس

فقطعا م ن ط كـ يتقاطعان ضرورة على نقطة فيما بين / ا ط ب ح، وذلك لأن خط ٢٧-و
ب د يقطع قطع ط كـ إذا أخرج؛ فيلتقاطعا على نقطة كـ. ونصل كـ جـ، ونخرج عمود كـ ح على ب د، ونصل ح ا.

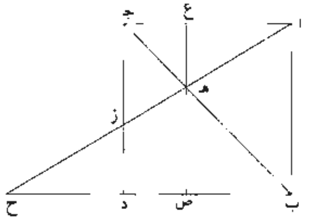


فأقول: إن مثلث ز د ح مثل مثلث ا هـ جـ.

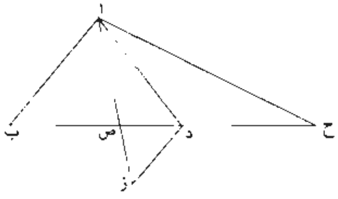
برهان ذلك: أن نخرج خط كـ جـ إلى نقطتي ش ظ. فبيّن أن ش جـ مثل كـ ظ، ومثلث ا ش جـ يشبه مثلث كـ ظ ح، فـ ظ ح مثل ا جـ وهما متوازيان، فـ ا ح يوازي ش ظ. ولأن نقطتي ع كـ على قطعي ف ق ط كـ المتقابلين، يكون ع جـ مثل كـ جـ كما بين أبلونيوس في الشكل الواحد والثلاثين من المقالة الأولى من كتاب *المخروطات*. ولأن خطي جـ ب جـ د لا يقعان على قطع ف ق وأخرج ا ز ع جـ متوازيين، يكون ضرب ز ا في ا هـ مثل مربع ع جـ كما بين أبلونيوس في الشكل السابع من المقالة الثانية من كتاب *المخروطات*، أعني مربع ز ح؛ فضرب ا ز في ا هـ مثل مربع ز ح. فيكون نسبة ا ز إلى ز ح كنسبة ز ح إلى ا هـ. ولكن نسبة ا ز إلى ز ح كنسبة ا جـ إلى د ح من تشابه مثلثي ا ز جـ ز ح د، فنسبة ا جـ إلى د ح كنسبة ز ح إلى ا هـ، وزاويتا هـ ا جـ ز ح د متساويتان، فمثلث ا هـ جـ مثل مثلث ز د ح؛ وذلك ما أردنا أن نبين. /

2 قطع: كتبها «خط» ثم أثبت الصواب فوقها – 5 ظ: ط، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد – 9 ا ز: ا ن / متوازيين: متوازيان.

‹ز› فمن بعد ما بيّنا هذا، فإنا نضع مربع ا ب جـ د مع خط ا ح، ونخرج عمود ع هـ ص. ٢٧-ظ



ولأن زاوية ع جـ هـ نصف قائمة وزاوية ع قائمة، يكون ع جـ مثل ع هـ. وكذلك هـ ص مثل ب ص. ولأنا قد بيّنا أن نسبة ا ز إلى ز ح كنسبة ز ح إلى ا هـ، يكون نسبة ب د إلى د ح كنسبة د ح إلى ب ص. وأيضا، فإن نسبة ح ص إلى ص هـ، أعني إلى ص ب، كنسبة ا ع إلى ع هـ، لتشابه مثلثي ا ع هـ هـ ص ح. ولكن ع هـ مثل ع جـ، أعني ص د. فنسبة ص ح إلى ص ب كنسبة ص ب إلى ص د. ولأنا بينا في الشكل المتقدّم أن ب د أطول من د ح، فمجموع ب ص ص د أطول من د ح. وأيضًا، فإنا بيّنا هاهنا أن ب ص وسطٌ بين ح ص ص د، فـ ب ص أصغر من مجموع د ص د ح؛ وب ص أطول من ص د. فمجموع ب ص د ح أطول من د ص؛ فخطوط ب ص ص د د ح الثلاثة كل اثنين منها / أطول من الثالث، فيمكن أن يُعمل منها مثلث. ٢٨-و وكذلك يمكن أن يعمل من خط ا ح مع نقطتي هـ ز مثلث أضلاعه مساوية لخطوط ا هـ هـ ز ز ح.



نضع خط ب ح مع نقطتي د ص. ونعمل مثلث ا ص د على أن يكون ب ص مثل ا ص وا د مثل د ح.

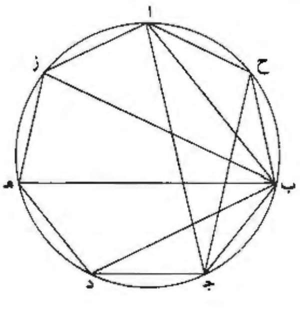
6 لتشابه: متشابه – 9 وسطٌ: وسطا

فأقول: إن مثلث ا ص د زواياه متناسبة على نسبة الضعف، أعني أن زاوية ص ا د نصف زاوية ا د ص، وأن زاوية ا د ص نصف زاوية ا ص د.

برهان ذلك: أن نصل ا ب ا ح، ونخرج ا ص إلى ز ليكون ز ص مثل د ص. فبيّن أن زاوية د ا ح مثل زاوية د ح ا، فزاوية ص د ا ضعف زاوية د ا ح. ولأن نسبة ص ح إلى ص ب، أعني إلى ص ا، كانت كنسبة ص ا إلى ص د، فمثلث ا ص ح يشبه مثلث ا ص د، فزاوية ص ا د مثل زاوية ا ح د؛ وكانت زاوية ا د ص ضعف زاوية ا ح د، فزاوية ا د ص ضعف زاوية د ا ص. وأيضاً، فإن نسبة ب د إلى د ح كانت، أعني ا ز إلى ا د، كنسبة د ح، أعني / ا د، إلى ب ص، أعني إلى ا ص؛ فمثلث ٢٨ - ظ ا د ز يشبه مثلث ا ص د، فزاوية ا د ز مثل زاوية ا ص د، وزاوية ا ص د مثل زاويتي ا ز د ص د ز. ‹و›لأن ص د مثل ص ز، فزاوية ا د ص مثل زاوية ا ز د، فزاوية ا ص د ضعف زاوية ا د ص؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وكذلك ‹زوايا› مثلث ا ص د ومثلث ا ص ح.

‹ح› فمن بعد ما بينا هذه المقدمات، فلنضع دائرة ا ب جـ، ونريد أن نعمل فيها مسبعاً متساوي الأضلاع والزوايا تحيط به.



فنعمل فيها مثلثاً شبيهاً بمثلث ا ص د، وهو مثلث ا ب جـ، على أن تكون زاوية ا ب جـ نظيرة زاوية ا ص د وزاوية ا جـ ب نظيرة زاوية ا د ص. ونقسم زاوية ا ب جـ بأربعة أقسام متساوية بخطوط ب ز ب هـ ب د، ونقسم زاوية ا جـ ب بنصفين بخط

6 ا ح د: ا د ح – 12 ا ص د: ا ب د – 13 هذه: بعده: ولا تصح مع السياق، وقد تقرأ «بعدة» وهي لا تصح أيضاً، ولعلها تصحيف «هذه».

جـ ح، ونصل خطوط ا ح ب ح ا ز ز هـ هـ د د جـ. ولأن زوايا ا جـ ح ب جـ ح ا ب ز ز ب هـ هـ ب د د ب جـ متساوية ‹ومساوية لزاوية ب ا جـ›، تكون القسي متساوية. فمسبع ا ز هـ د جـ ب ح متساوي الأضلاع[١] والزوايا، وذلك ما أردنا أن نعمل. ٢٩-و

تمت المسألة. ولله الحمد ‹و›شكرًا ‹له› وصلى اللّه على محمد وآله وسلم.

استخرجت هذه المسألة يوم السبت الثاني عشر من شوال سنة شمس؛ روز مُرْداد من ماه مُرْداد.

وافق الفراغ بكشك همذان في ز يه ز ثمد هجرية من نسخة بخط أحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي.

والحمد للّه وصلى اللّه على سيدنا محمد وآله وسلم.

[١] د حـ: هـ حـ.

نصّ كتاب الشّنّي:

كتاب كشف تمويه أبي الجود في أمر ما قدَّمه
من المقدّمتين لعمل المسبّع بزعمه
لأبي عبد الله محمد بن أحمد الشّنّي

ف – ١٢٩ ظ
ل – ١٦

كتاب كشف تمويه أبي الجود في أمر ما قدّمه من المقدّمتين لعمل المسبع بزعمه لأبي عبد الله محمد بن أحمد الشنّي

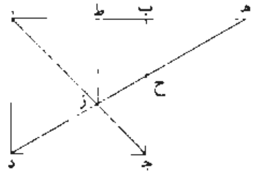
كما أن موقع علم الهندسة من بين العلوم في أعلى المرتبة، فإن المبرّزين فيه في أقلّ العدّة، وإن كان من يدّعيه لا يحصى كثرة. فقد قيل: إن العلماء في هذه الصناعة، أعني علم الهندسة، ثلاثة: أقليدس وأرشميدس ومانالاوس. أمّا أقليدس فإنه كان أوّل من جمع الأصول الهندسية، ورتّبها، وسهل الطرقَ إليها، وقرّبها حتى نشأ منه هذا العلم، وأمّا أرشميدس فإنه كان بلغ من اجتهاده في هذا العلم واستخراج غوامضه – مثل المخانيقونات وما يحتاج إليه فيها من الأدوات – غاية ‹حتى› سمّاه اليونانيون المهندس، ولم يستحق هذا الاسم أحدٌ من المتقدّمين والمتأخرين غيره لفضله [كان] وتقدّمه، وإنه بنى شكلاً وقدّمه / لعمل المسبّع المتساوي الأضلاع في الدائرة. فلمّا لم يتأت له إتمامه من ل – ١٧ الأصول الهندسية، تركه على حالته وبيّن أنه إن حصل فبحصوله عمل المسبّع، اقتداءً بأقليدس حيث لم يتهيأ له بالأصول التي جمعها وجود وتر المسبّع في الدائرة أو وجودَ ثُلث كل زاوية مستقيمة الخطين، الذي بوجوده يوجد وتر المسبع في الدائرة، ترك ذكر ذلك ولم يقدّم له قولاً، وحاشاه عجز عن ذلك، هو ولا أرشميدس، أو قلّد كل واحد منهما في شيء. وكما فعل أرشميدس أيضاً في كتابه في *الكرة والأسطوانة*، حيث أراد أن يقسم الكرة بسطح دائرة على نسبة مفروضة، واحتاج إلى قسمة قطر الكرة على النسبة

2-3 كتاب ... الشنّي: من حسبة مقالة أبي عبد الله محمد أحمد الشني في كشف تمويه أبي الجود في أمر ما قدمه من المقدّمتين لعمل المسبع بزعمه [ل] – 4 كما: كتب قبلها «قال رحمه الله» [ف] / في (الثانية): ناقصة [ل] – 5 كثرة: مكثرة [ق] – 6 أقليدس (الأولى والثانية): وقليدس [ل] / من: ما [ق، ل] – 9 المخانيقونات: عابيقونات [ق] – 10 [كان]: هنا سقطت جملة وربما كانت هي نفسها التي عند السجزي الذي أخذ عنه أبو الجود في هذا المقام ولعل العبارة هي «وأنه كان في غاية الاجتهاد...» وربما كانت «ومكانه» – 13 بأقليدس: باوقليدس [ل] وجود: ناقصة [ل] أو وجود: لوجود [ل].

المذكورة – وهو الشكل الرابع من المقالة الثانية من ذلك الكتاب – ولم يتهيأ له ذلك بأصول أقليدس، فأعطى النسبة وتخطّى العمل، حتى فسّر ذلك الكتاب بعده أوطوقيوس العسقلاني، فقسّم ذلك القطر على تلك النسبة بقطعين متقاطعين من قطوع المخروطات، زائدٌ ومكافئ.

وأما الشكل الذي قدّمه لعمل المسبّع فهو هذا:

مربع ا ب جـ د متساوي الأضلاع قائم الزوايا، أخرج قطره وهو ا جـ، وأخرج ضلع ا ب على استقامته إلى جهة ب بغير نهاية: كيف نخرج من نقطة د ‹خطا› كخط د ز ح هـ حتى يكون مثلث د ز جـ مساويًا لمثلث ح ب هـ؟

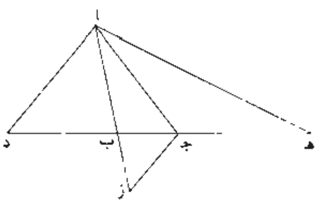


وإنما أراد أرشميدس أن يخرج عمود ز ط على ا ب، فيقسم خط ا هـ على نقطتي ط ب / انقساما يصير به ضرب ا ب في ا ط مثل مربع ب هـ وضرب هـ ط في ط ب مثل مربع ا ط. ف – ١٣٠ – و

برهان ذلك: أن في مثلث د ز جـ المساوي لمثلث ب ح هـ زاوية ز د جـ مثل زاوية هـ في مثلث ب ح هـ، فتكون / الأضلاع التي تحيط بالزاويتين المتساويتين متكافئة، فنسبة ب هـ إلى د جـ كنسبة د ز إلى هـ ح. لكن نسبة ب هـ إلى د جـ كنسبة هـ ح إلى د ح، فنسبة هـ ح إلى ح د كنسبة د ز إلى ح هـ. ولأن أقسام خط د هـ على نسبة أقسام خط ا هـ، فإن نسبة هـ ب إلى ب ا كنسبة ا ط إلى هـ ب، فضرب ا ب في ا ط مثل مربع ب هـ. وأيضًا، فإن نسبة هـ ط إلى ط ز، أعني ا ط، كنسبة ا هـ إلى ا د، أعني ا ب. وبالتبديل نسبة هـ ط إلى ا هـ كنسبة ا ط إلى ا ب؛ وبالتفصيل نسبة هـ ط إلى ا ط كنسبة ا ط إلى ط ب، فضرب هـ ط في ط ب مثل مربع ا ط. ل – ١٨

4 ومكافئ: ومكاف، ومكاف، ولن نشير إليها فيما بعد [ق] وكاف [ل] – 5 لعمل: ناقصة [ل] المسبّع: لمسبع [ل] – 7 استقامته: استقامة [ل] د: هـ [ق] كخط: لخط [ل] – 10 ب هـ: ب د [ل] – 13 فتكون: يكون [ق، ل] تحيط: يحيط [ق، ل] فنسبة: نسبة [ق] – 14 د ز ... د جـ كنسبة: ناقصة [ل] 15 د ح: د ز [ق، ل] – 18 هـ ب [ق، ل].

ولأن خط ب هـ موسّط بين خطي اب اط، يكون خط ب هـ أصغر من مجموع اط ط ب. وكذلك أيضا خط اط موسّط بين خطي ط هـ ط ب، يكون اط أصغر من مجموع خطي ط ب ب هـ. وخط ط ب أصغر من كل واحد من خطي اط ب هـ، يكون مجموع خطي اط ب هـ أعظم من خط ط ب. فيمكن أن يعمل من هذه الأقسام الثلاثة مثلث؛ فليعمل. وليكن مثلث اب جـ. وليكن ضلع اب مثل ضلع اط وضلع ب جـ مثل ط ب وضلع اجـ مثل ب هـ. فبيّنٌ أن زوايا مثلث اب جـ تتوالى على نسبة الضعف، أعني أن زاوية ب مثلا زاوية جـ وزاوية جـ مثلا زاوية ا.



برهان ذلك: أنا نخرج خط ب جـ على استقامته إلى جهتيه، إلى نقطتي د هـ، حتى يصير د ب مثل اب وهـ جـ مثل اجـ. ونخرج اب على استقامته من جهة ب إلى ز حتى يصير ب ز مثل ب جـ، ونصل اد اهـ جـ ز. / فبيّنٌ أن زاوية جـ اهـ مثل زاوية جـ هـ ا، فزاوية ب جـ ا ضعف زاوية جـ اهـ. ولأن نسبة هـ ب إلى ب د – أعني إلى ب ا – كانت كنسبة اب إلى ب جـ، فمثلث اهـ ب يشبه مثلث اب جـ، فزاوية ب اجـ من مثلث اب جـ مثل زاوية اهـ جـ، أعني زاوية هـ اجـ من مثلث اهـ ب، تكون زاوية اجـ ب مثل زاوية هـ اب، أعني ضعف زاوية جـ اب. وأيضا، فإن نسبة جـ د إلى جـ هـ، أعني نسبة از إلى اجـ، كنسبة جـ هـ، أعني اجـ، إلى ب د، أعني اب؛ فمثلث اجـ ز يشبه مثلث اب جـ: تكون زاوية اجـ ب من مثلث اب جـ مثل زاوية از جـ من مثلث از جـ. لكن جـ ب مثل ب ز: تكون زاوية اجـ ب مثل زاوية ب جـ ز. لكن زاوية اب جـ / ضعف زاوية ب جـ ز، أعني ضعف زاوية اجـ ب. وقد ل – ١٩ ق – ١٣٠ ظ

1 موسّط: وسط [ل] – 4 ط ب: اب [ل] يعمل: نعمل [ق] من: مجموع [ل] – 7 مثلا: مثني [ق، ل] مثلا: مثني [ق، ل] – 8 استقامته: استقامة [ل] جهتيه إلى: جهة [ل] – 13 من (الثانية): كررها في بداية السطر الثاني [ق] – 14-15 ضعف ... أعني (الأولى): ناقصة [ل] – 16 يشبه: يشبه [ل].

كان تبيّن أن زاوية ب جـ ا ضعف زاوية جـ ا ب: تكون زاوية جـ ا ب سبع جميع زوايا مثلث ا ب جـ. فنركّب زاوية جـ ا ب على محيط الدائرة. فيفصل منها ضلعا ا جـ ا ب سُبعَه.

ثم كان هذا الشكل على حالته حتى تهيّأ لأبي سهل ويجن بن رُسْتُم الكوهي وأبي حامد أحمد بن محمد بن الحسين الصاغاني، لكل واحد منهما، استخراجه بالقطوع المخروطية، وهما ممن يعترف لهما بالتقدم والمهارة والتبريز في هذه الصناعة، وخاصة أبو سهل الكوهي. وقد كان نسيج عصره، وبحذاقته ومهارته أعرض عن ذكر هذا المربع والمثلثين المتساويين وتخطاه إلى ما له عُملَ وبسببه شُكِلَ؛ وهو قسمة الخط بثلاثة أقسام وضرب مجموع القسمين الأول والثاني في الأول مثل مربع القسم الثالث، وضرب مجموع القسمين الثاني والثالث في الثاني مثل مربع القسم الأول؛ فحلّله بقطعين متقاطعين من قطوع المخروطات زائدٌ ومكافئ، ثم ركبه وبنى عليه المسبع.

وأما أبو حامد فإنه قد قصد الشكل، أعني هذا المربع والمثلثين المتساويين. فحلّله بثلاثة قطوع زائدة: قِطعان منها متقابلان وآخر مقاطع لأحدهما؛ ثم ركّبه وبنى عليه المسبّع.

وكلّ ما ذكرته من تقدّم أرشميدس وفضله – وإن كان أشهر من أن يشرع في وصفه – ثم ما كان بعده من الرجلين الحاذقين – أبي سهل الكوهي وأبي حامد الصاغاني – من اعترافهما بفضله، ووقوفهما عند قوله، وابتنائهما على ما أسسه، وتصحيحهما ما أشار إليه وقدّمه، فإن سياق ذلك كله إلى أبي الجود محمد بن الليث، فإنه كان بلغ من جرأته وظلمه، مع اليسير من بضاعته في علمه، أنه كان نسب أرشميدس فيما قدّمه من هذا الشكل إلى التقليد، إعجابًا منه بفهمه البليد، وادّعى لنفسه عمل المسبّع بمقدمات يسيرة من كتاب *الأصول* قريبة المأخذ والتحصيل.

أوّلها هذه: إذا أُدرت دائرة ببعد عمود على الخط، فإنها تماس الخط الذي قام عليه العمود.

1 تبيّن: بيّن [ل] – 2 ضلعا: ضلعي [ق، ل] – 4 ويجن: ريحن [ل] – 5 الصاغاني: الصغاني [ق، ل]. ولن نشير إليها فيما بعد – 6 يعترف: يعرف [ل] – 7 نسيج: شيخ [ق، ل] / أعرض: الأخير مطموس [ل] – عن: مطموسة [ل] 8 شكل: نهاية مخطوطة [ل] – 13 زائدة: زائد [ق] – 16 بفضله: لفضله [ق].

والثانية: نخرج من أحد أضلاع مثلث مفروض إلى ضلعه الثاني خطا موازيا للضلع الثالث ومساويًا لما يفصله منه خارج المثلث الأصغر.

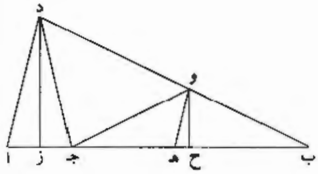
والثالثة: نجد خطًا نسبته إلى خط معلوم كنسبة معلومة.

والرابعة: نقسم خطًا معلومًا بقسمين، ضرب جميع الخط في أحد قسميه مثل مربع خط نسبته إلى القسم الآخر كنسبة مفروضة.

فاعتمد هذه النسبة، ثم استعمل في عمل المسبّع نسبة أخرى خلاف ما قدّمه، وهي قسمة الخط بقسمين، ضرب جميع الخط في أحد قسميه مثل مربع خط نسبته إلى القسم الآخر كنسبة جميع الخط إلى مجموعه والقسم الآخر. فظنّ بجهله وقلة تحصيله أن نسبة / ذلك الخط إلى مجموعه وذلك القسم كنسبة معلومة، فأرسل البرهان على ذلك واحدا وبنى عليه المسبّع، مع أن هذه القسمة هي التي قدمها أرشميدس بعينها لما أنا مبيّنه في آخر الكتاب. [ق - ١٣١ - و]

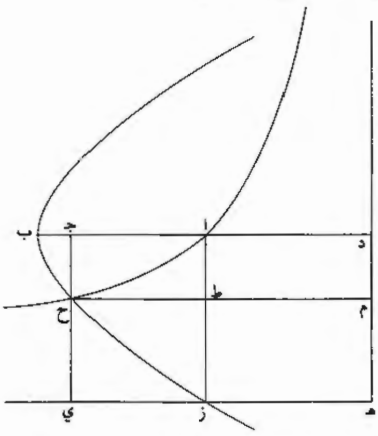
وإنما أراد أبو الجود تقسيم خط ا ب مثلا على هذه النسبة على نقطة جـ، ضرب ا ب في ا جـ مثل مربع خط نسبته إلى خط جـ ب كنسبة ا ب إلى مجموع ا ب ب جـ، ويكون مربع ذلك الخط من خط أصغر من خط ب جـ، لأن نسبته إلى ب جـ كنسبة ا ب إلى مجموع ا ب ب جـ. وليكن ذلك الخط ب هـ، فيمكن أن نعمل على خط ا جـ مثلث ا د جـ متساوي ساقي ا د د جـ، وليكن كل واحد منهما مثل خط ب هـ، ونصل ب د، ونخرج هـ و يوازي ا د، ونخرج و ح د ز عمودين على ا ب، ونصل و جـ؛ فلأن ضرب ا ب في ا جـ مثل مربع هـ ب، أعني مربع ا د، يكون نسبة ا ب إلى ا د من مثلث ا ب د كنسبة ا د إلى ا جـ من مثلث ا د جـ؛ وزاوية ا مشتركة للمثلثين، فيكونان متشابهين ويكون د ب مثل ا ب. ولأن ز جـ نصف ا جـ، وب جـ نصف ضعف ب جـ، يكون ز ب نصف مجموع ا ب ب جـ، ونسبة هـ ب، المساوي لـ ا د، إلى نصف ب جـ كنسبة ا ب إلى نصف ا ب ب جـ، أعني ز ب. لكن نسبة و ب، المساوي لـ هـ ب، إلى ب ح كنسبة د ب، المساوي لـ ا ب، إلى ز ب، أعني إلى نصف ا ب ب جـ. فنسبة هـ ب إلى نصف ب جـ وإلى ب ح واحدة، فـ ب ح نصف ب جـ. فخط و جـ إذن مثل و ب - أعني هـ ب - فخطوط ا د د جـ و جـ و ب كلها متساوية. لكن زاوية ا جـ د مثل زاويتي جـ د و و ب جـ؛ وزاوية د و جـ ضعف زاوية ب، فزاوية ا جـ د - أعني زاوية جـ ا د - ثلاثة أضعاف زاوية ب، ويكون جميع زوايا مثلث ا ب د سبعة أمثال زاوية ب.

1 نخرج: يخرج [ق] - 7 القسم: الخط [ق] 10 القسمة: القسم [ق] - 19 فيكونان: يكون [ق] - 21 نصف (الثانية): ضعف [ق]



ثم وقعت هذه الرسالة إلى أبي سعيد أحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي، فتبين له فساد قوله والمغالطة في عمله، ورام أبو سعيد السجزي أن يقسم الخط على النسبة التي أمر بها أبو الجود في عمل المسبّع، فتعذر ذلك عليه، ثم كتب إلى أبي سعد العلاء ابن سهل المهندس وسأله فيه عن قسمة الخط على النسبة المذكورة، فتهيأ للعلاء بن سهل تحليل الخط إلى تلك النسبة بقطعين متقاطعين من قطوع المخروطات زائد ومكافئ. فحلّله وأنفذه إلى أبي سعيد السجزي، فلما وصل إليه ركبه أبو سعيد السجزي وبنى عليه المسبع وادّعاه لنفسه، وهذا تركيبه:

نريد أن نقسم خط ا ب على النسبة المذكورة. فنخرج ب ا على استقامته إلى د، على أن يكون ا د مساويًا لـ ا ب، ونضيف إلى ا د / مربع ا د هـ ز، ونعمل على نقطة ق – ١٣١ – ظ
ا قطعًا زائدًا لا يلقيانه خطا هـ ز هـ د، وهو قطع ا ح ك؛ ونعمل أيضًا على سهم ب د قطعًا مكافئًا يكون ضلعه المنتصب مثل ا ب، وهو قطع ب ح ل. ونخرج من تقاطع القطعين، وهو نقطة ح، عمود ح جـ على ا ب.



1 السجزي: السنجري، ولن نشير إليها فيما بعد [ق] – 5 متقاطعين: متقابلين [ق] – 6 وبنى: وبنا، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد [ق].

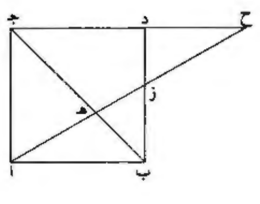
أقول: إنا قسمنا خط ب ا على نقطة جـ كما أردنا.

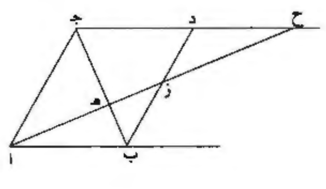
برهانه: أن نخرج هـ ز جـ ح على استقامتهما حتى يلتقيا على ي، ونخرج ح ط م يوازي ي هـ وا ط ز يوازي جـ ي. ولأن سطح م ي مساوٍ لمربع ز د، يكون ي ط مساوياً لـ ط د. فنأخذ سطح ط جـ مشتركاً: يكون سطح ي ا مساوياً لسطح جـ م. لكن سطح جـ م هو سطح جـ ح في جـ د، وي ا هو جـ ا في ا ز، أعني ا ب، فـ ا ب في ا جـ مساوٍ لـ جـ ح في جـ د. فنسبة جـ ح إلى ا جـ كنسبة ا ب إلى جـ د. لكن جـ ح يقوى على ا ب في ب جـ لأن ا ب كان الضلع المنتصب لقطع ب ح ل المكافئ؛ وجـ د هو ا ب مع جـ ا، فنسبة الخط القوي على ا ب في ب جـ إلى خط جـ ا كنسبة خط ب ا إلى ب ا ا جـ كخط واحد مستقيم. فقد عملنا ما أردنا.

ثم وقع بعد ذلك ما عمله العلاء بن سهل في قسمة الخط على هذه النسبة إلى أبي الجود. فغير فيه أدنى شيء، وهو أنه أعرض عن ذكر النسبة أصلاً وتخطاه إلى ما له عمل، وعلم أن نسبة جـ ح إلى ا جـ، أعني ط ا إلى ا جـ كنسبة ا ب – أعني د هـ – إلى د جـ. فأخرج في سطح جـ هـ القطر، فجاز لا محالة على نقطة ط، وبيّن أن ا ط مثل جـ ح، ولم يخرج فيه خط ح م، ثم بنى عليه المسبّع وادّعاه لنفسه كما ادّعى لنفسه ما عمله أبو سهل في قسمة الخط الذي احتاج إليه لعمل المسبّع الذي تقدم ذكره.

وذلك أن العلاء بن سهل ذكر فيما كتب به إلى أبي سعيد السجزي مجيباً عمّا سأله عن قسمة الخط الذي تقدّم ذكره تحليلَ شكل سأله عنه أيضاً وهو هذا:

سطح ا ب جـ د متوازي الأضلاع أخرج قطره وهو ب جـ، وأخرج ضلع جـ د على استقامته من جهة د بلا نهاية. كيف نخرج ‹خطًا› / كخط ا هـ ز ح حتى يكون نسبة ق – ١٣٢ – و
مثلث ب هـ ز إلى مثلث ز د ح نسبة مفروضة؟

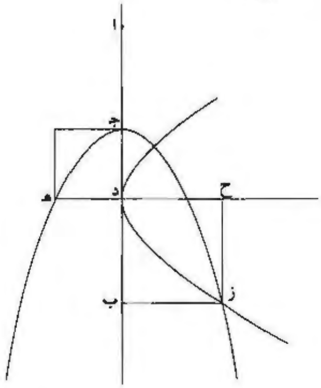




3 جـ ي: ح ي [ق] – 4 ط د: ط هـ [ق] / ي ا: ب ا [ق] / جـ م: جـ د [ق] – 5 جـ م: جـ د [ق] / وي ا: وب ا [ق] – 13 د جـ: هـ جـ [ق] – 17 سأله: ما له [ق].

فقال في آخر تحليله لهذا الشكل: فأما إعطاء نسبة ما بين مثلثي ا هـ ب ز د ح فلا سبيل إلى ذلك، ولو وجدنا مساغًا لتوصّلنا إلى ذلك، في كلام له يطول ويهول. ولا أدري كيف تعذّر عليه هذا حتى استبعده وحسن الظن بنفسه فيما أورده، لأن بين المسألتين نسبة ما، ويمكن الوصول إلى ذلك، لأنه إذا كان سطح ا ب جـ د مربعًا وكان مثلث ا هـ ب مساويًا لمثلث ز د ح، فهو الشكل الذي قدّمه أرشميدس لعمل المسبّع، وسلك أبو سهل الكوهي فيه طريق تقسيم الخط على النسبة التي تقع فيه، وهذا تركيبه.

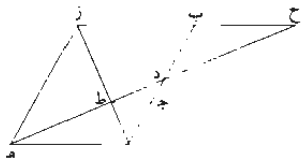
قال أبو سهل الكوهي في رسالته: نريد أن نجد خطًا منقسمًا بثلاثة أقسام، ضرب مجموع القسمين الأول والثاني في الأول مثل مربع القسم الثالث، وضرب مجموع القسمين الثاني والثالث في الثاني مثل مربع القسم الأول. ففرض خطي جـ د د هـ متساويين، وكل واحد منهما قائم من صاحبه على زوايا قائمة، ورسم قطعًا مكافئًا رأسه نقطة جـ وضلعه القائم مثل جـ د وسهمه على استقامة جـ د، وهو قطع جـ ز؛ ورسم قطعًا زائدًا – رأسه نقطة د وقطره المجانب وهو سهمه د هـ – ومساويًا لضلعه القائم، فهو لا محالة يقطع القطع المكافئ، مثلاً على نقطة ز، وأخرج ز ب عمودًا على جـ د وز ح موازيًا لـ د ب ومساويًا له، وزاد في جـ ب ا جـ مثل ز ب، فبيّن أن خط ا ب قد انقسم بنقطتي جـ د على النسبة المذكورة.



ثم قال أبو الجود في مجموعاته التي سمّاها *الهندسيات* بعد ذكره ما قاله العلاء بن سهل في ذلك: وقد وجدت أنا ما قاله العلاء بن سهل إنه ممتنع؛ يعني إعطاء النسبة بين مثلثي ا هـ ب ز د ح من الشكل المتقدّم.

6 تقع: يقع [ق] – 10 قائم من صاحبه: نجد هذه العبارة أكثر من مرة، ولهذا تركناها.

ثم قال: وهذه مقدّمته، فإذ بهذا الشكل الذي عمله أبو سهل بعينه إلاّ أنه لما علم أن نسبة مربع ح ز إلى السطح الذي يحيط به ح هـ ح د كنسبة الضلع القائم من القطع الزائد إلى قطره المجانب ‹الذي› فرض خطًا ما مثل خط ك وجعل نسبته إلى خط د هـ كالنسبة المفروضة. ثم رسم قطع د ز على أن يكون ضلعه القائم مثل ك وقطره المجانب د هـ، فصار خط ا ب منقسماً بنقطتي جـ د، وضرب ب جـ في جـ د مثل مربع ا جـ ونسبة مربع ب د إلى السطح الذي يحيط به د ا ا جـ كالنسبة المفروضة. وفرض سطح ا هـ ز ب المتوازي الأضلاع مثلاً وأخرج فيه قطر ا ز وقسّم ضلع / ا ب منه على هذه ق - ١٣٢ - ظ النسبة على نقطتي جـ د. وأخرج جـ ط موازيا لـ ا هـ ووصل هـ ط ط د وأخرجه على استقامته وضلع ز ب حتى التقيا على نقطة ح. فبيّن أن خط هـ د ح مستقيم وأن نسبة مثلث هـ ط ا إلى مثلث ب د ح كالنسبة المفروضة.



وكما ادّعى لنفسه أيضًا ما عمله مانجمس في استخراج خطين بين خطين حتى تتوالى الأربعة متناسبة، فأثبته في ذلك الكتاب الذي سمّاه *الهندسيات*، بعد أن ذكر ما عمله ثابت في ذلك.

ثم قال: وأما ما عملته أنا بما هو أقرب وأنور. ويشهد على ذلك كتاب أوطوقيوس الذي جمع فيه أقاويل القدماء في استخراج خطين بين خطين حتى تتوالى الأربعة متناسبة. فحكى فيه لمانجمس طريقين، استعمل في أحدهما قطعين من قطوع المخروطات – زائد ومكافئ – وفي الآخر قطعين مكافئين، وهو هذا.

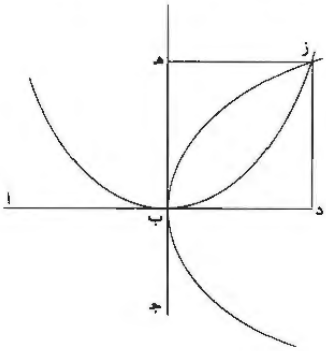
ولأن نريد لحاله وضوحًا فإني أثبتها هنا، ‹و›ما غيّره منه فاعله، وعمل مانجمس الذي عمله.

قال مانجمس: نفرض خطي ا ب ب جـ، وليكن كل واحد منهما قائماً من صاحبه على زاوية قائمة. ونخرج كل واحد منهما على استقامته إلى غير النهاية. ويعمل بارابولي

1 فإذ: فاذ [ق] – 2-3 القطع الزائد: النسبه [ق] – 15 فيه أقاويل: هنا تبدأ الصفحة الأولى من مخطوطة كامبردج [جـ] حتى: ناقصة [جـ] – 17 مكافئ: مكاف [جـ] / مكافئين: متكافئين [جـ] – 18 أثبتها: اثبته [جـ] / هنا: هاهنا [جـ] – 19 قائما: قائم [جـ] / من: على [جـ]، انظر التعليق في الصفحة 847 – 20 النهاية: نهاية [جـ] / ويعمل: ونعمل [جـ، ق].

يكون محوره ب جـ وضلعه المنتصب ب جـ، وبارابولي آخر يكون محوره ا ب وضلعه المنتصب ا ب. فهذان البارابوليان يتقاطعان على نقطة ز. ونخرج ز هـ ز د موازيين ‹لخطي ا ب وب جـ›، فيكونان موسطين بين خطي ا ب ب جـ.

وأما أبو الجود، فإنه وضع خطي ا ب ب جـ المعلومين هكذا: أحدهما قائم من صاحبه على زاوية قائمة، وعمل قطعًا مكافئًا محوره ا ب وضلعه القائم ا ب، وعمل قطعًا آخر مكافئًا محوره ب جـ وضلعه القائم ب جـ؛ فتقاطعا على نقطة ز وأخرج ز د ز هـ موازيين لـ ا ب ب جـ، وبيّن أنهما موسطان بين خطي ا ب ب جـ في النسبة.



ولست أستجيز أن أحمل ذلك منه على سبيل الإيجاز، كما يعرض ذلك للناس في كثير من الأعمال، لما قد تقرر عندنا من حاله وتمويهه في كثير من أعماله.

ولما بلغ أبا سعيد السجزي ما كان منه في هذا الشكل الذي بناه العلاء بن سهل، من ادعائه لنفسه، بالغ في شتمه ونقضه والكشف عن حاله وصورته، وضمّن ذلك في رسالته. ثم لم يردع المتحلف ما لحقه من عوار المِخْلَط وطرقه من السنار المفرط، بل صلّب عينيه، وعرض عرضه لما يساق إليه، فكتب بعد / ذلك إلى أبي محمد عبد الله بن علي ق – ١٣٣ – و
الحاسب يدّعي فيه عمل المسبّع لنفسه. فبدأ فيه يدل على طريقي الأستاذين أبي سهل الكوهي وأبي حامد الصاغاني، ويستنقص عملهما، ويقول إن كل واحد من هذين قصد

1 محوره: مطموسة [جـ] – 1-2 وضلعه ... المنتصب ا ب: ناقصة [جـ] – 4 من: على [جـ] – 5 وعمل: ونعمل [جـ، ق] / قطعًا: ضلعًا [جـ] – 6 مكافئًا: هنا تبدأ الصفحة الثانية من مخطوطة كامبردج [جـ] / زَ: نَ [ق] – 8 أحمل: اعمل [جـ] / ذلك منه: منه ذلك [جـ] – 11 شتمه: شته [جـ] / ونقضه: وبعضه [جـ] / والكشف: وللكشف [جـ] – 12 المتحلف: يعني حلّف اللسان، فهو حَليفٌ ومتحلف / المِخْلَط: وهو المخلاط الذي يخلط الأشياء ويُلبسها على السامعين والناظرين بحذقه ومهارته – 12-13 صلّب عينيه: أي شحذ نظره وحَدَّده بمعنى أصر على رأيه – 15 حامد: نهاية مخطوطة [جـ].

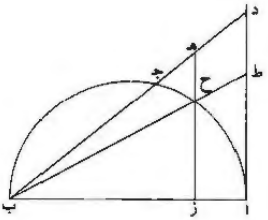
الشكل الذي قدمه أرشميدس، في رسالته في عمل المسبع، تقليدًا من غير أن عمله أو برهن عليه في تلك ‹الرسالة›، فرام كل واحد منهما بتصحيحه والبرهان عليه. وأما أنا فإني استقربت البعيد، واستذللت الصعب، فعملت كذا وكذا...، فذكر هذا العمل الذي تقدّم ذكره.

ثم قال: وأما ما عملته آنفًا، فإني به تفردت، والجميع إليه سبقت. لأن التحليل الذي أتى فيه إلى قسمة خط مفروض بثلاثة أقسام: ضرب جميع الخط في القسم الثالث مثل مربع القسم الأول، وضرب مجموع القسمين الثاني والثالث في الثاني مثل مربع القسم الأول.

قال وهو أسهل كثيرًا من قسمة الخط بثلاثة أقسام: ضرب مجموع القسمين الأول والثاني في الأول مثل مربع القسم الثالث، وضرب مجموع القسمين الثاني والثالث في الثاني مثل مربع القسم الأول، كما عمله أبو سهل وأبو حامد؛ وهو أيضا أسهل من قسمة الخط بقسمين، ضرب جميع الخط في أحد قسميه مثل مربع خط نسبته إلى القسم الآخر كنسبة ذلك الخط إلى مجموعه والقسم الذي تقدم ذكره، كما عملته أنا من قبل.

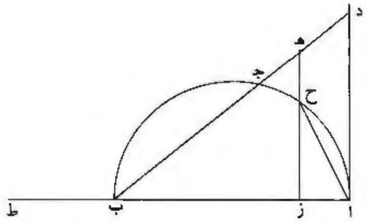
ثم قال: ولأن تلك الأعمال كلها إما بقطعين من قطوع المخروطات متقاطعين – زائد ومكافئ – وإما بثلاثة قطوع زوائد، وأما أنا فقد قسمت الخط على هذه الأقسام الثلاثة بقطع واحد، إلا أني لم أنفذ إليك العمل والرسالة المخصوصة به [و]حتى تسأل مَنْ بالحضرة الجليلة من المهندسين، هل عمل أحد المسبع بقطع واحد؟ حتى إذا أنفذت عملي فيه لم يسوء خلقهم فيَّ كما ساء مرات بقدحهم فيَّ ونسبهم ما أتيت به إلى غيري؛ يعني ما تقدّم من انتحاله ما عمله العلاء بن سهل وغير ذلك مما أشبهه من المخاريق. ولو ذكر المموِّه على نفسه، أعني أبا الجود، ذلك العمل في هذا الكتاب حيث نسب الرجلين الفاضلين إلى العجز والتقليد لكان ذلك أَوْلى به وبالموضع من كتابه. فإذ لم يفعل ذلك، فلقد بحث المسكين عن مُدْيَته. فقال في آخر رسالته: قد استعملت مع القطع الواحد من قطوع المخروطات فيما عملته آنفًا مقدمتين من كتاب *الأصول*؛ إحداهما: إذا أخرج من نقطة ب من خط ا ب، القطر، خط يقطع دائرة ا جـ ب على جـ، وأخرج من نقطة ا عمود على ا ب حتى يلقى ب جـ المخرج على د، كيف نخرج من خط جـ د ‹خطا› كخط هـ ز يوازي ا د، فيقطع المحيط على ح، وتكون نسبة هـ ح إلى ز ح كنسبة مفروضة. ق – ١٣٣ – ظ

12 ضرب: وضرب [ق] – 16 والرسالة: للرسالة [ق] 18 بقدحهم: فقدحهم [ق] أتيت: أتى [ق] 22 مُدْيَته: أي غايته 25 عمود: عمودا [ق].



قال: وذلك سهل بأن نقسم ا د بنقطة ط على النسبة المفروضة، ونخرج ب ط، فيقطع لا محالة الدور، فليقطعه على ح. ونجيز عليها هـ ز موازيًا لـ ا د، فيكون نسبة هـ ح إلى ز ح كالنسبة المفروضة.

والمقدمة الثانية: بأن نخرج هـ ز موازيًا لـ ا د العمود حتى يكون مثل الخط الواصل بين ا ح.



قال: وذلك أيضًا غير بعيد، بأن نخرج ا ب على استقامته إلى ط، ونجعل نسبة ا ب إلى ب ط كنسبة ا د إلى ا ب، ونجعل ضرب ا ب في ب ط مثل ط ز في ز ب، ونخرج من نقطة ز عمودًا على قطر ا ب كخط ز ح هـ يقطع المحيط على ح، ونصل ا ح. ‹و›زعم ولم يبرهن أن ا ح مثل هـ ز.

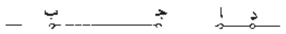
فرمت أنا إقامة البرهان على ما ادّعى فيه، ففتشت عن ذلك فإذ أنه قد غلط فيه؛ وإنما تهيأ له ذلك، إذا كان عمود ا د مساويًا لقطر ا ب. فخطر ذلك بباله أو لم يخطر، فأوهم بجهله وغفلته أنها تؤدي إلى مطلوبه وبغيته إذا كان ا د أطول أو أقصر من ا ب، فأرسل البرهان على ذلك واحدًا، أو قد عرف ذلك فتعامى عنه عجزًا، وأراد بذلك أن يخرق أو يلتمس شكلاً يلبي على نفسه أو على مثله ممن يرجع إلى قرب غوره ورداءة فهمه.

10 فإذ: فإذن [ق] – 11 بباله: باله [ق] – 12 تؤدي: يؤدي [ق] – 14 شكلاً يلبي: فكلا يلى [ق] / رداءة: رداء، الأولى من رَدُؤ أي عجز وضعف، والثانية من رَدِيَ،

فأثبت بيان فساد ما عمله في هذا الشكل، وأغفله بعد أن قدّمت شكلاً احتجت إليه في المعنى الذي قصدته، مستعيناً بالله في ذلك وهو حسبي ونعم المعين.

أقول: كل خط يقسم على نسبة ذات وسط وطرفين، ويضاف إلى قسمه الأصغر خط حتى يصير ذلك القسم الأصغر مثل القسم الأكبر، فإن القسم الأقصر مع الخط المضاف إليه مقسوم على نسبة ذات وسط وطرفين، وقسمه الأقصر ‹هو› ذلك الخط المضاف إليه.

وأبين ذلك في مثال: فليكن خط ا ب مقسوماً على نسبة ذات وسط وطرفين على نقطة جـ، وليكن قسمه الأقصر ا جـ، ونضيف إلى ا جـ ا د حتى يصير جميع جـ د مساوياً لـ جـ ب.

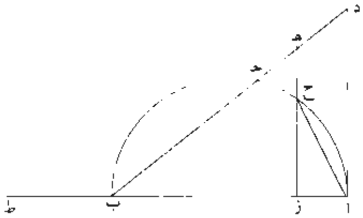


أقول: إن خط د جـ مقسوم على نسبة ذات وسط وطرفين على نقطة ا وقسمه الأقصر ا د.

برهان ذلك: لأن ضرب ا ب في ا جـ ‹مساوٍ لمربع ب جـ›، أعني مربع ا جـ وضرب ا جـ في جـ ب، أعني د ا في ا جـ ومربع ا جـ مرتين، ‹و›لأن د جـ مثل جـ ب، ومربعه مثل مربع جـ ب، أعني مربعي د ا ا جـ، وضرب د ا في ا جـ مرتين؛ / يسقط ضرب د ا ق - ١٣٤ - و في ا جـ مرة واحدة مشتركًا ومربع ا جـ مرّة واحدة مشتركا. يبقى ضرب د ا في ا جـ ومربع د ا، أعني ضرب د جـ في د ا مثل مربع ا جـ، فخط د جـ ينقسم على نسبة ذات وسط وطرفين على نقطة ا، وقسمه الأصغر ا د؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

فإذ قدمنا هذا، فإنا نرجع إلى المسألة، ونعيد صورتها. ونقول: إن ا د مثل ا ب ونجعل نسبة ا ب إلى ب ط كنسبة ا د إلى ا ب، فيكون ب ط مثل ا ب؛ ونجعل ضرب ا ب في ب ط، أعني مربع ب ط، مثل ضرب ط ز في ز ب، فيصير خط ا ب مقسوماً على نسبة ذات وسط وطرفين على نقطة ز، وقسمه الأقصر ا ز لما قدمنا. ونخرج عمود هـ ح ز يقطع المحيط على نقطة ح، ونصل ا ح. فلأن ضرب ا ب في ا ز مثل مربع ا ح، لتشابه المثلثات التي في نصف الدائرة ‹ومثلث ا ز ح› - لكن ضرب ا ب في ا ز مثل مربع ز ب - فخط ز ب مثل خط ا ح. لكن ا د يساوي ا ب وهـ ز يوازي ا د، يكون هـ ز مثل ز ب، أعني ا ح؛ وذلك ما أردنا بيانه.

11 لأن: لـ [ق].



وأقول: إنه إذا كان عمود ا د أطول أو أقصر من خط ا ب، وجُعلت نسبة ا ب إلى ب ط كنسبة ا د إلى ا ب، وجعل ضرب ط ز في ز ب مثل ضرب ا ب في ب ط، وأخرج ز ﻫ موازيًا لـ ا د ووصل ا ح، فإن ا ح لا يكون مثل ﻫ ز أبدًا.

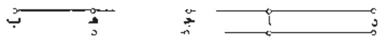
برهان ذلك: أنه لا يمكن أن يكون كذلك، فإن أمكن فليكن ا ح مثل ﻫ ز. فلأن نسبة ا د إلى ا ب كنسبة ا ب إلى ب ط، وضرب ا ب في ب ط كضرب ط ز في ز ب، يكون نسبة ا ب إلى ب ز كنسبة ز ط إلى ط ب. وإذا فصلنا، كانت نسبة ا ز إلى ز ب كنسبة ز ب إلى ب ط، ونسبة ا د إلى ا ب كنسبة ﻫ ز إلى ز ب، فنسبة ﻫ ز إلى ز ب كنسبة ا ب إلى ب ط. وإذا بدلنا، كانت نسبة ﻫ ز، أعني ا ح، إلى ا ب كنسبة ا ب إلى ب ط، أعني نسبة ا ز إلى ز ب، لما قدمنا. فنسبة ا ح إلى ا ب كنسبة ا ز إلى ز ب. وإذا عكسنا، كانت نسبة ا ب إلى ا ح، أعني نسبة ا ح إلى ا ز، كنسبة ب ز إلى ا ز، يكون ا ح، أعني ﻫ ز، مثل ز ب، فيكون ا د مثل ا ب؛ وقد جعلناه أطول أو أقصر، هذا خلف لا يمكن.

فإذ قد بيّنتُ فساد ما عمله في هذا الشكل، فقد تبيّن به فساد ما بنى عليه، وإن كان لم يقع إليّ.

وإنما أراد أبو الجود أن يقسم الخط على هذه النسبة التي هي تلك القسمة الأولى بعينها لو تأتى له ذلك، ثم يبني عليه المسبع كما بناه على ذلك العمل، ويُظهر أنها نسبة أخرى، خلاف ما عمله العلاء بن سهل، مع أن هذه القسمة أيضًا هي القسمة التي / قدّمها أرشميدس لعمل المسبع؛ فاعتمدها حسب ما أنا مبيّنه: ق - ١٣٤ - ظ

3 فإن: أن [ق] – 6 ب ز: ح ز [ق]

فليكن خط اب مقسوماً بنقطة جـ، وضرب اب في اجـ مثل مربع خط، وليكن ب هـ، ونسبة ب هـ إلى ب جـ كنسبة اب إلى مجموع اب ب جـ.



فأقول: إن خط اب قد انقسم أيضا على نقطتي جـ هـ، وضربَ اب في اجـ مثل مربع ب هـ وضربَ اهـ في هـ جـ مثل مربع ب هـ أيضاً.

برهان ذلك: أن نسبة اب إلى مجموع اب ب جـ كنسبة ب هـ إلى ب جـ. وبالتفصيل نسبة اب إلى جـ ب كنسبة ب هـ إلى جـ هـ، وبالتبديل نسبة اب إلى ب هـ كنسبة جـ ب إلى جـ هـ، وبالتفصيل نسبة اهـ إلى هـ ب كنسبة هـ ب إلى هـ جـ، فضرب اهـ في هـ جـ مثل مربع ب هـ، وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ثم نخرج اب على استقامته إلى د من جهة آ حتى يصير اد مثل ب هـ.

فأقول: إن خط هـ د قد انقسم على النسبة المنسوبة إلى أرشميدس، وهي ضرب اهـ في هـ جـ مثل مربع اد وضرب د جـ في جـ ا مثل مربع هـ جـ.

برهان ذلك: أن ضرب د هـ في اجـ مثل ضرب اهـ في هـ جـ، يكون نسبة هـ د إلى هـ ا كنسبة هـ جـ إلى جـ ا، وبالتبديل نسبة هـ د إلى هـ جـ كنسبة هـ ا إلى اجـ، وبالتفصيل نسبة د جـ إلى هـ جـ كنسبة هـ جـ إلى جـ ا. فضرب د جـ في جـ ا مثل مربع هـ جـ، وقد كان ضرب اهـ في هـ جـ مثل مربع اد، وذلك ما أردنا بيانه.

وليس العجب من هذا الرجل أنه قد غلط في شيء عمله، أو عملٌ لغيره ادّعاه لنفسه فانتحله، لكن العجب فيما خُيل إليه فاعتقده، وحسن الظن بنفسه، خاصة فيما أورده وادّعاه من قسمة الخط على هذه النسبة بقطع واحد، مع ما قد علم أنه لم يتهيأ ذلك لأحد من هؤلاء المحدثين مثل العلاء بن سهل وأبي سهل الكوهي وأبي حامد الصاغاني مع تقدّمهم في هذا العلم، وتدربهم وتبريزهم على سائر أقرانهم في زمانهم، إلا بقطعين من قطوع المخروطات. دع أنه يستبعد أعمالهم، وينسب إلى التقليد تدبيرهم

12 د هـ، د جـ [ف] 14 د جـ (ثانية): ب جـ [ف] – 18 مع ما: معما [ف]

وتحصيلهم. نعوذ باللّه من ادّعاء ما لا نعلم. ونسأله التوفيق لشكر ما يفهم. إن ذلك بيده. ولا حول ولا قوّة إلا به ومن عنده.

تمت المقالة. والحمد للّه وحده، والصلاة والسلام على من لا نبي بعده.

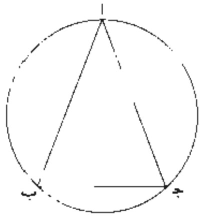
في يوم الأحد الحادي والعشرين من جمادى الأولى لسنة ثلاث وخمسين ومائة وألف.

نصّ كتاب نصر بن عبد اللـه:

رسالة نصر بن عبد اللـه في استخراج وتر المسبّع

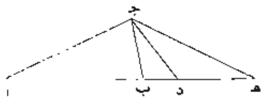
رسالة نصر بن عبد الله ١٣١ ر
في استخراج وتر المسبع

قال: دائرة ا ب جـ مفروضة، ونريد أن نخط فيها وتر المسبع المتساوي الأضلاع.



فلننزل على طريق التحليل أنا خططناه، وهو ب جـ، وننصف ب ا جـ على ا، ونصل ب ا جـ ا، فهما متساويان. ولأن قوس ب جـ سبع الدائرة، تكون كل واحدة من قوسي ب ا ا جـ ثلاثة أسباعها. وكل واحدة منهما ثلاثة أمثال قوس ب جـ. فعلى ما بيّنه أقليدس، تكون كل واحدة من زاويتي ب جـ ثلاثة أمثال زاوية ا.

فقد أدى التحليل إلى عمل مثلث متساوي الساقين فيه كل واحدة من زاويتي قاعدته ثلاثة أمثال زاوية رأسه.

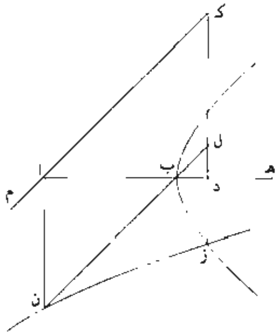


فلننزل على طريق التحليل أنا وجدناه، وهو مثلث ا ب جـ. وكل واحدة من ب جـ ثلاثة أمثال ا. فنعمل ب جـ د كـ ا، وجـ د ا مشتركة بين مثلثي ا جـ د ب جـ د. فـ ا د

8 فيه: فيها.

إلى د جـ ك د جـ إلى د ب. فـ ا د في د ب كمربع د جـ. ونجعل د هـ مثله، فـ ا د في د ب كمربع د هـ. ونصل جـ هـ. ولأن جـ ب ا ك ب د جـ ب جـ د وهي ثلاثة أمثال ا، أعني ب جـ د، تكون ب د جـ ضعف ب جـ د، وهي أيضًا ضعف كل واحدة من د هـ جـ د جـ هـ، وهـ مشتركة، فـ ا هـ إلى هـ جـ ك هـ جـ إلى هـ د. فـ ا هـ في هـ د كمربع هـ جـ، أعني جـ ا، لتساوي زاويتي هـ ا، بل ب ا. فـ ا هـ في هـ د كمربع ا ب، وكان ا د في د ب كمربع د هـ.

فقد أدى التحليل إلى وجود ثلاثة خطوط كـ ا ب ب د د هـ مركبة كخط واحد يكون سطح جميع الخط في القسم الذي في أحد الطرفين كمربع قسم الطرف الآخر وسطح مجموع قسمي الطرف الآخر والأوسط في الأوسط كمربع قسم الطرف الآخر.



فليكن ا ب معلوم الوضع والقدر.

ونتزل على طريق التحليل أنا وجدنا الباقيين، وهما ب د د هـ على أن ‹يكون› ا هـ في هـ د كمربع ا ب، وا د في د ب كمربع د هـ. ونخرج من ا عمود ا ن كـ ا ب. ‹ونخرج من د عمود د ز كـ د هـ›. ونصل ن ب ونخرجه إلى ل. وهو معلوم الوضع، و‹نخرجه› على استقامة من الجهة الأخرى إلى ك، ومن ا م ا ك موازٍ لـ ن ب ل ‹و›هو أيضًا معلوم الوضع، فـ ز د إلى ل ك مساوية / لـ د هـ إلى ب ا. فـ ك ز في ز د كمربع ١٣١ – ظ
ا ب، أعني ا ن. وهو موازٍ لـ ز ك. وم ا ا هـ معلوما الوضع. فـ ن ز على محيط قطع زائد وم ا ا هـ هما الخطان اللذان لا يقعان عليه، ون معلومة. فالقطع المار بـ ن ز معلوم

4 د هـ جـ: مطموسة – 6 د هـ: ا هـ – 15 مساوية: يعود الضمير إلى كلمة «النسبة»، وهي مستترة – بى: كتبها د ب.

الوضع والقدر. وأيضًا، ا د في د ب كمربع د هـ، أعني د ز، فـ ب ز على محيط قطع زائد قطره المجانب وضلعه القائم ا ب، وسهمه ب هـ المخرج على استقامته. وا ب معلوم الوضع والقدر، وب معلومة. فالقطع المار بـ ب ز معلوم الوضع والقدر. فنقطة تقاطع القطعين، وهي ز، معلومة. وز د كـ معلوم الوضع لأنه على زاوية معلومة؛ قد لقي ا د هـ المعلوم الوضع وم ا كـ المعلوم الوضع. فـ كـ معلومة، ود ل أيضًا معلومتان، وكل واحد من ز د د ل معلوم؛ وكذا كل واحد من د هـ د ب، فـ د هـ أيضًا معلومتان؛ وذلك ما أردناه.

تركيب هذه المسألة هكذا: خط ا ب معلوم الوضع والقدر، ونريد أن نجد خطين مستقيمين مركبين على استقامته كما وصفنا.

فنخرج من ا عمود ا ن كـ ا ب ونصل ن ب. ومن ا م ا كـ موازيا لـ ن ب، ونجيز على ن قطع ن ز الزائد بحيث لا يلقاه م ا ا ب، وعلى ب قطع ب ز الزائد حتى يكون قطره المجانب وضلعه القائم ا ب وسهمه ب هـ المخرج على استقامته. ونخرج من ز، نقطة تقاطع القطعين، عمود ز د إلى ا ب وعلى استقامته إلى كـ ونجعل د هـ كـ د ز.

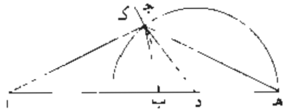
فأقول إن: ب د د هـ هما ما أردنا.

برهانه: فلأن ن ز قطع زائد وم ا ا هـ لا يقعان عليه. وأخرج من المركز إلى القطع ا ن وكـ ل د ز موازيًا له قاطعا للزاوية التي تلي زاوية الخطين اللذين لا يقعان عليه. يكون كـ ز في ز د، أعني ا هـ في هـ د، كمربع ا ن، أعني مربع ا ب. ولأن ب ز قطع زائد قطره المجانب وضلعه القائم ا ب وسهمه ب هـ المخرج على استقامته، يكون ا د في د ب كمربع د ز، أعني مربع د هـ؛ وذلك ما أردناه.

نريد أن نعمل مثلثا كما وصفنا.

فنجد ثلاثة خطوط مستقيمة مركبة على ما بينا. ونرسم على ا وببعد ا ب دائرة كـ جـ، وعلى د ببعد د هـ دائرة هـ جـ، ونصل ا جـ.

فأقول ‹إن›: مثلث ا ب جـ كما أردنا.



2 المجانب: لمحانب – 5 المعلوم (الثانية): معلوم – 6 معلوم: معلومان – 13 كـ: كـد.

برهانه: أنا نصل د جـ هـ جـ. فلأن ا د في د ب كمربع د هـ، أعني مربع د جـ، فـ ا د إلى د جـ كـ د جـ إلى د ب. فمثلثا ا د جـ ب د جـ متشابهان، فـ ب جـ د كـ ا. ولأن ا هـ في هـ د كمربع هـ جـ، يكون ا كـ هـ جـ د، فـ هـ جـ د كـ ب جـ د، وب د جـ مثلا هـ جـ د، فهي مثلا ب جـ د، وا ب جـ كـ ب جـ د ب د جـ، فـ ا ب جـ المساوية لـ ا جـ ب ثلاثة أمثال ب جـ د، أعني ب ا جـ. فقد عملنا المثلث كما أردنا.

نريد أن نخط في دائرة معلومة الوضع والقدر وتر المسبع المتساوي الأضلاع والزوايا.

فنعمل مثلثًا كما ذكرنا. ونخط في الدائرة مثلثا شبيها به. فلأن كل واحدة من زاويتي القاعدة ثلاثة أمثال زاوية الرأس، يكون كل واحدة من قوسي زاويتي القاعدة ثلاثة أمثال قوس زاوية الرأس؛ فالقوس المركبة عليها زاوية الرأس سُبع المحيط، فوترها هو ضلع المسبع المتساوي الأضلاع؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

وبالله الحول والقوة.

2 ا د جـ: ا د ب ب جـ د: يعني زاوية.

نصّ كتاب مؤلّف مجهول:

تركيب لتحليل مقدمة المسبّع المتساوي

الأضلاع في الدائرة

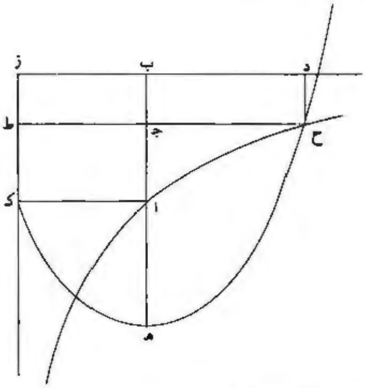
١٠٠ - ظ

تركيب لتحليل مقدمة المسبع المتساوي الأضلاع في الدائرة

نريد أن نقسم خطًا مستقيمًا بقسمين حتى يكون ضرب جميع الخط في مجموعه وأحد القسمين مثل مربّع خط معلوم، نسبتُه إلى الخط كلّه كنسبة القسم المذكور منه إلى القسم الباقي.

فنفرض خطًا مستقيمًا معلومًا عليه ا ب وعمود ز ب مثله، ونتمم مربّع ا ك ز ب؛ ونجيز على نقطة ا قطعًا زائدًا، ويكون أقربَ الخطين اللذين لا يلقيانه خطا ك ز ز ب على ما بيّن عمله أبلونيوس في شكل ‹د› من قول ب من كتاب *المخروطات*؛ وليكن قطع ا ح. ونخرج خط ا ب على استقامته من جهة ا إلى نقطة هـ حتى يكون ا هـ مثل ا ب؛ ونخرج خط ز ب على استقامته من جهة ب بغير نهاية، ونعمل قطعًا مكافئًا رأسه نقطة هـ وقطره المجانب، وهو سهم، على استقامة هـ ب، وضلعه القائم مثل خط هـ ا وزاوية لخط ترتيب قائمة، فهو لا محالة يقطع القطع الزائد؛ فليقطعه على نقطة ح، وهو قطع هـ ح. ونخرج من نقطة ح عمود ح جـ على ا ب.

فأقول: إن نقطة جـ هي المطلوبة.

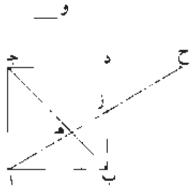


11-10 لخط ترتيب، هكذا في المخطوطة، والأفصح «خط الترتيب».

برهان ذلك: أنا نخرج عمود ح د على خط ب ز. ونخرج ح جـ على استقامته حتى يلقى خط ك ز على نقطة ط. فلأن نقطتي ا ح على القطع الزائد، وقد خرج منهما خطا ا ك ح ط ‹وخطا ا ب د ح› إلى الخطين اللذين لا يلقيانه موازيين لهما، فعلى ما تبين في شكل ‹يب› من قول ب من كتاب *المخروطات*، يكون سطح ا ز، أعني مربع ا ب، أعني ضرب ا ب في ا جـ وفي ب جـ، مثل سطح ح ز، أعني ضرب جـ ب في ز ب وفي ب د. وز ب مثل ا ب. فيسقط ضرب ا ب في ب جـ، أعني ضرب ز ب في ب جـ لتساويهما، فيبقى ضرب ا ب في ا جـ مثل ضرب ب د في ب جـ، ويكون نسبة ب د، أعني ح جـ المساوي له، إلى ا ب كنسبة ا جـ إلى ب جـ. ولأن / ضرب ١٠١-و
خط ح جـ في نفسه مثل ضرب هـ جـ في هـ ا لأجل القطع المكافئ، لكن هـ ا مثل ا ب، فيكون مربع ح جـ مثل ضرب مجموع ا ب ا جـ في ا ب. وقد تبين أن نسبة خط ح جـ إلى ا ب كنسبة ا جـ إلى جـ ب. فقد قسمنا خط ا ب بقسمين على نقطة جـ، وضرب مجموع ا ب ا جـ في ا ب مثل مربع ح جـ، ونسبة ح جـ إلى ا ب كنسبة ا جـ إلى جـ ب؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.

فإذ وطّأنا هذا، فإنّا نفرض مربع ا ب جـ د مخرجا قطره ب جـ وضلع جـ د على استقامته من جهة د بغير نهاية. ونقسم ضلع ب د على نقطة ز، وضرب ب د في مجموع ب د ب ز مثل مربع خط، وليكن خط و؛ ونسبة خط و إلى خط ب ز د كنسبة ب ز إلى ز د. ونصل خط ا ز ونخرجه على استقامته حتى يلقى ضلع جـ د المخرج على استقامته على نقطة ح.

فأقول: إن مثلث ا هـ ب مثل مثلث د ز ح.



برهان ذلك: أن نسبة خط و إلى ب د كنسبة ب ز إلى ز د؛ وكذلك أيضا نسبة مربع خط و إلى مربع خط ب د كنسبة مربع خط ب ز إلى مربع خط ز د. لكن نسبة

1 ب ز: ب د – 6 أعني: على – 15 ونقسم: ونقسه

مربع خط و إلى مربع ب د كنسبة مجموع ب د ب ز إلى ب د من أجل أن ضرب مجموع ب د ب ز في ب د مثل مربع خط و. وإذا كانت ثلاثة أقدار متناسبة، فإن نسبة الأول منها إلى الثالث كنسبة مربع الثاني إلى مربع الثالث. لكن ب د مثل ا ب، ونسبة مربع خط و إلى مربع ب د كنسبة مربع ب ز إلى مربع د ز، يكون نسبة مربع ب ز إلى مربع د ز كنسبة مجموع ب ز ا ب إلى ا ب. لكن نسبة مجموع ب ز ا ب إلى ا ب كنسبة ا ز إلى ا هـ، لأن خط ب هـ قسم زاوية ا ب ز بنصفين؛ وقد تبين ذلك في شكل ‹جـ› من مقالة و من كتاب *الأصول*. فنسبة مربع ب ز إلى مربع د ز كنسبة ا ز إلى ا هـ. لكن نسبة مربع ب ز إلى مربع د ز مؤلّفة من نسبة ب ز إلى د ز ومن نسبة ا ز إلى ز ح. والنسبة المؤلفة من نسبة ب ز إلى د ز ومن نسبة ا ز إلى ز ح هي نسبة سطح ا ز في ب ز إلى سطح ز ح في د ز؛ ونسبة ا ز إلى ا هـ، إذا جعلنا ب ز مشتركًا، كنسبة سطح ا ز في ب ز إلى سطح ا هـ في ب ز، فنسبة سطح ا ز في ب ز إلى سطح ز ح في ز د كنسبة سطح ا ز في ب ز إلى سطح ا هـ في ب ز. فسطح ا هـ في ب ز مثل سطح ز ح في ز د. فنسبة ا هـ إلى ز ح كنسبة د ز إلى ب ز، أعني نسبة د ح إلى ا ب؛ فنسبة ا هـ إلى ز ح كنسبة د ح ، إلى ا ب. ففي مثلث ا هـ ب زاوية ب ا هـ مثل زاوية د ح ز ١٠١-ظ في مثلث د ز ح، والأضلاع التي تحيط بالزاويتين المتساويتين متكافئة، فمثلث ا هـ ب مساوٍ لمثلث د ز ح؛ وذلك ما أردنا أن نعمل.

تمت المقالة بعون الله وتوفيقه.

في يوم الاثنين الثاني والعشرين من جمادى الأولى

لسنة ثلاث وخمسين ومائة وألف.

نصّا كتابَي بن يونس:

١ـ رسالة المولى كمال الدين بن يونس

إلى خادمه محمد بن الحسين

في البرهان على إيجاد المقدمة التي أهملها أرشميدس

في كتابه في تسبيع الدائرة وكيفية ذلك.

٢ـ رسالة لمولانا كمال الدين أبي المعالي موسى بن يونس

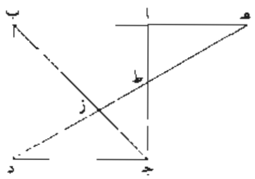
في البرهان على إيجاد المقدمة التي أهملها أرشميدس

في تسبيع الدائرة وكيفية ذلك.

ك – ١٣٨ – ظ
ظ – ١ – ظ

رسالة المولى كمال الدين بن يونس
– *أدام الله علوه* –
إلى خادمه محمد بن الحسين
في البرهان على إيجاد المقدمة التي أهملها أرشميدس
في كتابه في تسبيع الدائرة وكيفية ذلك

قال، حرس الله مجده: كنت أوصيتني – أدام الله علوك – في أمر المقدمة التي أهملها أرشميدس في كتابه في تسبيع الدائرة ولم يذكر عملها ولا برهانها. وهي هذه: مربع ا ب جـ د، أخرج خطُّ ا ب منه على استقامة إلى هـ وأخرج قطر ب جـ منه. ونريد أن نخرج من نقطة د خطًّا كخط د ز ط هـ حتى يكون مثلث جـ ز د مساويًا لمثلث هـ ا ط.



وذكرتَ أن أحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي عظم أمر هذه المقدمة حتى حكى في مبدإ كتابه في تسبيع الدائرة قول من قال: «لعلها أصعب عملاً وأبعد برهانًا مما له قدمها، / ولعل ذلك غير ممكن». وحكى أنه ركبه من تحليل العلاء بن سهل. ك – ١٣٩ – و

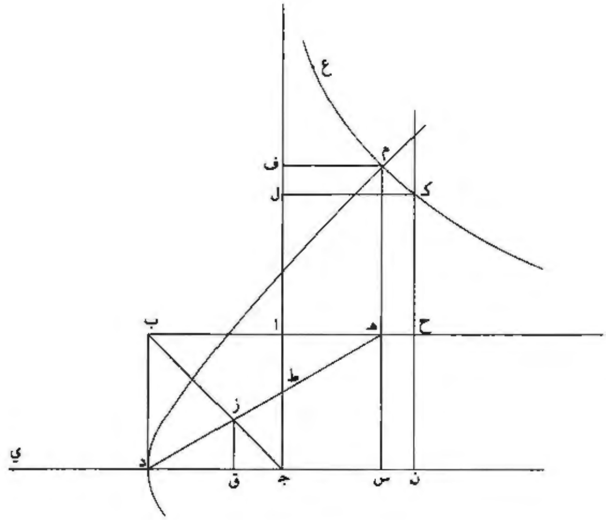
2 رب يسر: نجد بعدها وتمم بالخير في [ك] – 3 مولى: لمولانا [ظ] – 4 أدام الله علوه: رحمه الله [ظ] – 5 إلى خادمه ... الحسين: ناقصة [ظ] – 8-9 قال ... برهانها: ناقصة [ظ] – 15 له: ناقصة [ظ] ، العلاء: على [ظ] علا [ك].

وكَبُرَت ‹أن يكون› أرشميدس – مع جلالة قدره وعلو مرتبته في هذا العلم – أتى في بيان هذا المطلب بما يقف بيانه على تقديم المطلب له؛ وأحببتَ الوقوف على حقيقة ذلك. فأجبتك ممتثلاً.

وحين نظرتُ في ذلك لاح لي البرهان على كيفية إيجاد المقدمة من عدة وجوه. وتبين لي في خلال تأمّلي إمكان إقامة البرهان على إيجاد المقدمة ‹إمكانَ إقامة البرهان على إيجاد المقدمة› التي تتلوها من غير احتياج إلى تقديمها، ومَن نظرَ فيما أثبته وأحسن التصرف فيه، اهتدى إلى ذلك، بل هو ممكن من نفس المقدمة التي قدمها أحمد وركبها ‹من تحليل› العلاء بن سهل على ما سنبينه، وإن لم يكن تنبه له. وهذا حين أشرع في إيراد البرهان على وجه لا يلزم فيه أن يكون بيانُ أرشميدسَ دوريًا. مُخْلِفًا ظنَّ من حكى عند السجزي.

فأقول: لنعد الصورة المتقدمة. ونخرج جـ د على استقامة إلى ي، ونجعل د ي مساويا لـ جـ د. ونخرج ب ا إلى ح. ونجعل ا ح مساويا لـ ا ب. ونعمل على ا ح مربعا، وهو مربع ا ح كـ ل./ ونعمل على نقطة كـ قطعا زائدا لا يقع عليه خطا ا ل ا ح، وهو قطع ط-٢-و
كـ م ع. ونعمل قطعًا زائدًا كل واحد من ضلعه القائم وقطره المجانب مساوٍ لـ د ي ورأسه نقطة د وسهمه على استقامة جـ د وهو قطع د م، فهو يقطع قطع كـ م في جهة م: من قبل أنا إذا أخرجنا ح كـ إلى أن يلقى جـ د على ن، كان جـ ن مثل جـ د وكان ن كـ مثل ن د، فهو أصغر من خط الترتيب الخارج من نقطة ن، إذ مربع خط الترتيب المذكور يساوي سطح ي ن في ن د، وذلك أعظم من مربع ن كـ. فخط الترتيب الخارج من ن يلقى القطع وراء نقطة كـ بعد أن قطع قطع كـ م ع؛ وذلك أن خط ن كـ لا يلقى
قطع كـ م ع على نقطة غير نقطة كـ على ما بينه أبلونيوس في *المخروطات*. فنخرج من ك-١٣٩-ظ
نقطة م عمودا على ح ب وهو عمود م هـ. ونصل هـ د، يقطع ب جـ على ز وا جـ على ط.

2 المطلب (الثانية): مطلب [ط] – 7 التصرف: كتب "النظر"، ثم ضرب عليها بالقلم وأثبت "التصرف" في الهامش [ك] – 8 أشرع: شرع [ط، ك] – 15 في جهة م: في جهة كـ م في جهة م [ص] – 19 قطع: ناقصة [ص] – 20 ما: ناقصة [ص] – 21 هو: ناقصة [ط] / وحـ: ود [ط].



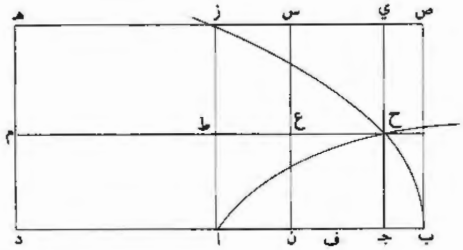
فأقول: إن مثلث جـ ز د مثل مثلث هـ ا ط.

برهانه: أنا نخرج م هـ على استقامة، يلقى ن د على س، ومن نقطة ز عمود ز ق على جـ د؛ فلأن مثلثي هـ س د ز ق د متشابهان، فنسبة هـ س، أعني د ي، إلى س د كنسبة ز ق، أعني جـ ق، إلى ق د. فإذا ركبنا، كانت نسبة ي س إلى س د كنسبة جـ د إلى د ق. لكن نسبة ي س إلى س د كنسبة مربع م س إلى مربع س د لِمَ كان زائد د م. ونسبة مربع م س إلى مربع س د كنسبة مربع هـ س إلى مربع س جـ، من قبل أنا نتمم سطح ا هـ م ف فهو مساوٍ لمربع كـ ا، أعني مربع ا د، لِمَ كان زائد كـ م ع؛ ونأخذ سطح هـ جـ مشتركًا، فيكون سطح م جـ مساويًا لسطح هـ د. فنسبة م س إلى س د كنسبة هـ س إلى س جـ؛ وكذلك مربعاتها تكون متناسبة، فنسبة / جـ د إلى د ق ط-٢-ظ كنسبة مربع هـ س، أعني جـ د، إلى مربع س جـ، فنسبة جـ د إلى س جـ، أعني هـ ا، كنسبة س جـ، أعني هـ ا، إلى د ق. لكن نسبة هـ ا إلى د ق كنسبة ا ط إلى ز ق لتشابه مثلثي ا هـ ط ز د ق، ‹فنسبة جـ د إلى هـ ا كنسبة ا ط إلى ز ق، فسطح جـ د في ز ق›، أعني ضعف مثلث جـ د ز، مساوٍ لسطح ا هـ في ا ط، أعني ضعف مثلث هـ ا ط؛ فمثلثا جـ ز د هـ ط ا متساويان؛ وذلك ما أردنا بيانه.

5 لم كان: لمكان [ط، ك] – 7 لم كان: لمكان [ط، ك] – 12 ز د ق: ا د ق [ط] – 12-13 ‹فنسبة ... ز ق›: هذه العبارة ناقصة في مخطوطتي [ط] و[ك]، ولكنها وردت في مخطوطة أكسفورد وهي النسخة المختزلة على النحو التالي: «فـ جـ د إلى هـ ا كـ ا ط إلى ز ق، فـ جـ د في ز ق» – 13 ا ط: هـ ط [ط، ك].

وحيث أتممنا ما أردناه، فلننبه الآن على ما غفل عنه أحمد بن عبد الجليل السجزي في مقدمته التي بنى عليها المسبع، ونبين أنه يمكن ‹بها› قسمة خط مفروض على الشريطة التي بنى عليها أرشميدس في أمر التسبيع في كتابه بأدنى سعي، لا على ما ظنه في قوله: لعل قسمته لذلك أصعب من قسمة الدائرة بسبعة أقسام متساوية، وإنما أوردنا ذلك لذهابه عليه واستصعابه إياه مع سهولة تحصيله من نفس مقدمته. أما نحن فقد قسمناه بعدة طرق. /

فلنرسم الصورة التي أوردها لبيان مقدمته برمتها، ونفصل جـ ن من ا جـ مساويًا لـ جـ ح، وب ف مساويًا له أيضًا. ك-١٤٠-و



فأقول: إن ا ب قد انقسم على الوجه المطلوب على نقطتي ف ن.

برهانه: أنا نخرج ن س موازيًا لـ ا ز، يقطع ح ط على نقطة ع وي ز على نقطة س. فلأن نسبة جـ ح، أعني جـ ن، إلى جـ ا كنسبة ا ب إلى ب ا ا جـ على ما وضح في مقدمته، فإذا فصلنا، كانت نسبة جـ ن إلى ن ا، أعني ا ط إلى ط ع، بل ز س، كنسبة ا ب إلى ا جـ، أعني ا ز إلى ز ي، وكنسبة الباقي إلى الباقي، أعني ز ط إلى ي س، أعني جـ ن؛ فسطح ا ط في جـ ن المساوي له، أعني مربع ب ف، مساوٍ لسطح ز ط في ط ع، أعني ف ا في ا ن. ولأن سطح ح ز مساوٍ لسطح ط د، أعني سطح ب ط، ونأخذ سطح ح ص مشتركًا، فيصير سطح ص ط مساويًا لسطحي جـ ص جـ ط. فإذا ألقينا منهما سطح جـ ص ومن سطح ص ط المساوي / لهما سطح ع ز المساوي لـ جـ ص لأنهما مساويان لمربع جـ ح – أما جـ ص فللمكافئ وأما ز ط فلما مرّ – يبقى ط-٣-و

1 الجليل: الحامد [ط، ك] – 3 التسبيع: السبع [ط] – 8 مساويًا: مساو [ك] – 11 وضح: وضع [ط] – 12 جـ ن: حـ ر [ط، ك] – 17 فإذا ألقينا: فاالقينا [ك] – 18 مساويان: مساويا [ط، ك].

جـ ط. بل ن ز. مساويا لـ ص ع. فنسبة ا ز، بل ا ب، إلى ص س، بل ب ن، كنسبة س ع، بل ا ف، إلى ا ن. فإذا فصلنا، كانت نسبة ا ن إلى ن ب كنسبة ف ن إلى ن ا، فسطح ب ن في ف ن مثل مربع ن ا؛ وذلك ما أردنا بيانه.

1 مساويا: مساو [ط، ك]

رسالة لمولانا كمال الدين أبي المعالي موسى بن يونس ج ١٨٤ ظ

– رحمه الله – ع – ١٢٨ ظ

في البرهان على إيجاد المقدمة التي أهملها أرشميدس في تسبيع الدائرة وكيفية ذلك

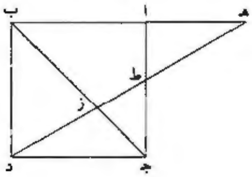
وهي هذه: أخرج ا ب من مربع ا د إلى هـ وقطر ب جـ. ونريد أن نخرج خطًّا كـ د ز ط هـ حتى يكون مثلث جـ ز د كمثلث هـ ا ط.

وذكرت أن أحمد بن عبد الجليل السجزي عظم أمر هذه المقدمة حتى قال في مبدإ كتابه في تسبيع الدائرة: لعلها أصعب عملاً وأبعد برهانًا مما له قدمها. ولعل ذلك غير ممكن دون *ما له قدمها ولعل ما له قدمها أصعب من تسبيع الدائرة زاريا على أرشميدس* وعادلا عن *طريقته إلى ما* حكى أنه ركبه من تحليل العلاء بن سهل.

فكبرت أن يكون أرشميدس – مع جلالة قدره وعلو مرتبته في هذا العلم – أتى في بيان هذا المطلب بما يقف بيانه على تقديم المطلب له. وأحببتَ الوقوف على ذلك *وأنه هل يمكن الوصول بالبرهان إلى إيجاد المقدمة وما له قدمها من غير لزوم الدور في بيانه؛ والتمست مساعدتي على ذلك.* فأجبتك *ممتثلاً لرسمك.*

وحين نظرت في ذلك، لاح لي البرهان على كيفية إيجاد المقدمة من / عدة وجوه، ج – ١٨٥ و وتبين لي في خلال تأملي إمكان إقامة البرهان على إيجاد المقدمة ‹إمكانَ إقامة البرهان على إيجاد المقدمة› التي تتلوها من غير احتياج إلى تقديمها؛ ومَن نظرَ فيما أثبته وأحسن التصرف به، اهتدى إلى ذلك، بل هو ممكن من نفس المقدمة التي قدمها أحمد على ما سنبينه، وإن لم يكن تنبه له. وهذا حين أشرع في إيراد البرهان على وجه لا يلزم فيه أن يكون بيان أرشميدس دوريًا. مُخَلِّفًا ظنّ السجزي *بأحد المآخذ الذي* سنحت *تقربا إلى عالي مجالسك.*

* هذه النسخة من النص السابق هي تحرير مختصر له مجهول المؤلف – 1-2 رسالة ... الله: رسالة له أيضا [ج] – 3 إيجاد: اتخاذ [ع] – 8 مما له قدمها: مما اقدمها [ع] – 10 من تحليل: من تحليل [ج] – 11 فكبرت: فاكبرت [ج، ع] / علمه: تعالمه [ج] – 12 له: ناقصة [ع] – 15 لي: ناقصة [ج] – 16 تأملي: متى [ج] – 19 تنبه له: تنبه عليه [ج] / فيه: منه [ج] – 20 الذي: ناقصة [ع].



فأقول: لنعد الصورة، ونخرج جـ د ب ا حتى يصير د ي ك جـ د وا ح ك ا ب. ونعمل على ا ح مربع ا ك وعلى ك قطعًا زائدًا لا يقع عليه ا ل ا ح، وهو ك م ع، وقطع د م الزائد على أن يكون رأسه د وسهمه على استقامة جـ د وكل واحد من ضلعه القائم وقطره المجانب كـ د ي، وهو يقطع ك م ع في جهة م، لأنا إذا أخرجنا ح ك يلقى جـ د على ن، ‹و›كان جـ ن كـ جـ د وكان ن ك كـ ن د، فهو أصغر من خط الترتيب الخارج من ن، إذ مربع خط الترتيب المذكور يساوي ي ن في ن د، وذلك أعظم من مربع ن ك، فخط الترتيب الخارج من ن يلقى القطع وراء نقطة ك بعد أن يقطع قطع ك م ع، لأن ن ك لا يلقى ك م ع على نقطة غير ك، على ما بينه أبلونيوس في *المخروطات*؛ فنخرج من م عمود م هـ على ح ب، ونصل هـ د، يقطع ب جـ على ز وا جـ على ط.

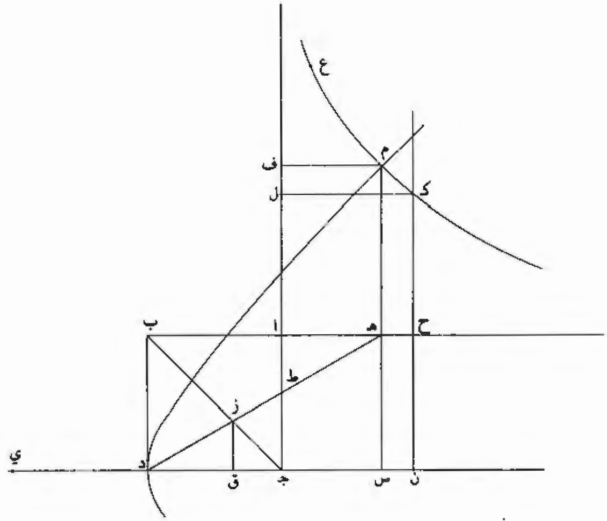
فأقول: إن مثلث جـ ز د كمثلث ا هـ ط.

برهانه: نخرج م هـ إلى س من ن د، ومن ز عمود ز ق على جـ د، فلتشابه مثلثي هـ س د ز ق د، يكون هـ س،/ أعني د ي، إلى س د كـ ز ق، إلى س د كـ ز ق، أعني جـ ق، إلى ق د. وبالتركيب ي س إلى د س كـ جـ د إلى د ق. لكن ي س إلى س د كمربع م س إلى مربع س د، لِمَ كان زائد د م، ومربع م س إلى مربع س د كمربع هـ س إلى مربع س جـ، لأنا نتمم سطح ا م المساوي لمربع ك ا، أعني مربع ا د، لِمَ كان زائد ك م ع. ونأخذ هـ جـ مشتركًا، فيكون م جـ كـ هـ د، فـ م س إلى س د كـ هـ س إلى س جـ؛ وكذا مربعاتها تكون متناسبة: جـ د إلى د ق كمربع هـ س، أعني جـ د، إلى مربع س جـ، فـ جـ د إلى س جـ، أعني هـ ا، كـ س جـ، أعني هـ ا، إلى د ق. لكن هـ ا

جـ – ١٨٥ – ظ

1-2 كـ ا ب ... عليه ا ل ا ح: مكررة [جـ] – 4 كـ م ع: كرر بعدها «وقطع د م الزائد على أن يكون رأسه»، ثم ضرب عليها بالقلم [جـ] – 6 مربع (الثانية): جـ ع [جـ] ح ع [ع] – 8 لأن ... كـ م ع: ناقصة [ع] – 9 ح ب: حـ د [جـ] – 11-12 نجد في هامش [ع]: «وذلك لأن زاوية جـ ق ن قائمة وزاوية ن جـ ز نصف قائمة، فيبقى زاوية جـ ز ق أيضًا نصف قائمة فيتساوى ن ق زن» – 13 لكن: قد تقرأ «لانه» [ع] – 14 لم كان: لمكان [جـ، ع] – 15 كـ ا: ز ب [ع] / لم كان: لمكان [جـ، ع] – 17 جـ د (الثانية): جـ هـ [ع] – 18 أعني هـ ا (الأولى): ناقصة [جـ].

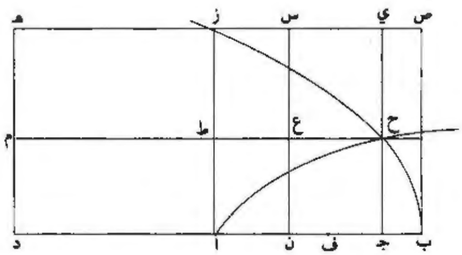
إلى د ق كـ ا ط إلى ز ق لتشابه مثلثي ا هـ ط ز د ق. فـ جـ د إلى هـ ا كـ ا ط إلى ز ق، فـ جـ د في ز ق، أعني ضعف مثلث جـ د ز، كـ ا هـ في ا ط، أعني ضعف مثلث هـ ط ا. فمثلثا جـ د ز هـ ط ا متساويان؛ وذلك ما أردنا أن نبين.



وحيث أتممنا ما أردنا، فلننبه الآن على ما غفل عنه أحمد بن عبد الجليل السجزي في مقدمته التي بنى عليها المسبع، ونبين أنه يمكن بها قسمة خط مفروض على الشريطة التي بنى عليها أرشميدس أمر التسبيع في كتابه بأدنى سعي، لا على ما ظنه في قوله: لعل قسمته لذلك أصعب من قسمة الدائرة بسبعة أقسام متساوية. وإنما أوردنا ذلك لذهابه عليه واستصعابه إياه مع سهولة تحصيله من نفس مقدمته. أما نحن فقد قسمناه بعدة طرق.

فلنرسم الصورة التي رسمناها لبيان مقدمته برمتها. ونفصل جـ ن كـ جـ ح وب ف مثله أيضاً.

1 إلى (الثالثة): أثبتها فوق السطر [جـ] – 2 ا ط: ه ط [ع، جـ] – 3 فمثلثا: فمثلث [جـ].



فأقول: إن ا ب قد انقسم على الوجه المطلوب على ف ن.

برهانه: أن نخرج ن س يوازي ا ز، يقطع ح ط على ع وي ز على / س. فلأن جـ ح، أعني جـ ن، إلى جـ ا كـ ب ا إلى ب ا ا جـ على ما وضح في مقدمته، فبالتفصيل جـ ن إلى ن ا، أعني ا ط إلى ط ع، بل ز س، كـ ا ب إلى ا جـ، أعني ا ز إلى ي ز وكـالباقي إلى الباقي، أعني ز ط،/ إلى ي س، أعني جـ ن، فـ ا ط في جـ ن المساوي له، أعني مربع ب ف، كـ ز ط في ط ع، أعني ف ا في ا ن. فلأن سطح ح ز كـ ط د، ونأخذ سطوح ب ي جـ ط ن ط مشتركة بعد تتميم مربع ب ز، فمربع ب ز وسطح ن ط كـسطح ب ي، أعني مربع جـ ح، وسطح جـ م وسطح ن ط، أعني ضعف سطح جـ ط، أعني ضعف سطح ن ز، أعني ضعف ا ب في ا ن وا م، أعني ب ط، أعني ا ب في ف ب، فـ ب ن في ف ن كمربع ا ن من قبل أن مربع ا ب وسطح ب ف في ا ن كـ ا ب في ب ف وا ب في ا ن. فيبقى ا ب في ف ن وب ف في ا ن، أعني ب ن في ن ا، وب ن في ن ف كـ ا ب في ا ن، أعني ب ن في ا ن ومربع ا ن. فإذا ألقينا المشترك وهو ف ن في ا ن، يبقى سطح ب ن في ن ف كمربع ن ا؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

جـ-١٨٦-و

ع-١٢٩-و

تمت الرسالة.

2-14 انظر التعليق في الصفحة التالية – 3 كـ ب ا إلى ب ا ا جـ: كـ ب ا ا جـ إلى ا جـ [جـ] كـ ب ا إلى ز جـ [ع] – 4 فبالتفصيل: وبالتفصيل [جـ، ع] – 5 ي ز: ز ي، غير واضحة، فكتبها فوقها [جـ] – 6-9 فلأن ... في ا ن: مكررة [جـ] – 9 ضعف (الثالثة): ناقصة [جـ]، وهي في التكرار / ا ب: ب ا، وهي ا ب في التكرار [جـ] – 15 تمت الرسالة: ناقصة [ع].

تعليق:

2-9 تحرير هذا البرهان ناقص ومضطرب، ولا يمكن إقامته إلا بإعادة كتابته من جديد؛ وربما يكون السبب هو الاختصار المخلّ ثم سقوط بعض العبارات عند النسخ. والفقرة الأولى من البرهان «برهانه ... مربع جـ ح» صحيحة، ولكن لم يتم البرهان على المساواة المدعاة، فكان عليه أن يذكر أن:

جـ ح ٢ = ا ب . ب جـ = جـ ي . ب جـ = سطح ب ي.

ثم كان عليه أن يبرهن على المساواة، ولكن لم يقم بهذا؛ والبرهان هو التالي [وسنرمز لسطح ما، وليكن ب ز بـ (ب ز)].

(ب ز) = (ب ي) + (جـ ز) = (ب ي) + (جـ ط) + (ح ز)،

ولكن

(ح ز) = (ط د) = (ا م)،

إذًا

(ب ز) = (ب ي) + (جـ م)

ومنه

(ب ز) + (ن ط) = (ب ي) + (جـ م) + (ن ط)؛

ولكن

(ب ي) = جـ ب . جـ ي = جـ ب . ا ب = جـ ح ٢،

ومنه

(٥) (ب ز) + (ن ط) = جـ ح ٢ + (جـ م) + (ن ط).

وبعد هذه الفقرة يزداد اضطراب النص، ويبدو أن محرره اقتصر على الطرف الأخير من المساواة (٥) ليعبر عن السطوح بضرب الأطوال؛ وكان عليه أن يكتب التالي:

(ب ز) = ا ب ٢، (ط ن) = ا ن . ن ع = ا ن . جـ ح = ا ن . ب ف،

ومنه الطرف الأول من المساواة

(ب ز) + (ن ط) = ا ب ٢ + ا ن . ب ف.

ومن جهة أخرى

جـ ح ٢ = (جـ ع)،

ومنه

جـ ح ٢ + (ن ط) = (جـ ط)،

(جـ م) = (جـ ط) + (ا م)،

ومنه الطرف الثاني من المساواة (٥)

جـ ح ٢ + (جـ م) + (ن ط) = ٢ (جـ ط) + (ا م) = ٢ (ا ب . ا ن) + ا ب . ب ف؛

وذلك لأن (جـ ط) = (ن ز)

و (ن ز) = ا ز . ا ن = ا ب . ا ن

و (ا م) = (ب ط) = ا ب . ا ط = ا ب . ب ف؛

فمن المساواة (٥) نحصل على

ا ب ٢ + ا ن . ب ف = ٢ (ا ب . ا ن) + ا ب . ب ف،

ومنه

ا ب (ا ن + ن ف + ف ب) + ا ن . ب ف = ا ب . ا ن + ا ن (ا ن + ن ب) + ا ب . ب ف،

ومنه

ا ب . ن ف + ا ن . ب ف = ا ن ٢ + ا ن . ن ب،

ومنه

(ا ن + ن ب) ن ف + ا ن . ب ف = ا ن ٢ + ا ن (ن ف + ب ف)

ونسقط المشترك من الطرفين، يبقى

ن ب . ن ف = ا ن ٢،

وذلك ما أراد بيانه.

الملحق الثاني

سنان بن الفتح والقبيصي:

المساحات المناظريّة

إنّ سنان بن الفتح غير مجهول، إذ إنّ النديم والقفطي بعده يكرِّسان له مقالة صغيرة. نورد فيما يلي ما كتبه النديم:

"سنان بن الفتح من أهل حران وكان مقدماً في صناعة الحساب والأعداد ، وله من الكتب: كتاب التخت في الحساب الهندي، كتاب الجمع والتفريق، كتاب شرح الجمع والتفريق، كتاب الوصايا، كتاب حساب المكعبات، كتاب شرح الجبر والمقابلة للخوارزمي."[١]

لا يُشير النديم إلى تواريخ سنان بن الفتح ولا إلى أعماله. كلُّ ما يمكن قوله هو أنَّه عاش بعد الخوارزمي وقبل النديم نفسه. يُشير سنان بن الفتح، بالفعل، في كتابه "في حساب المكعَّبات"[٢]، إلى "تفسير" جبر الخوارزمي.

وصل إلينا المؤلــَّف القصير لسنان بن الفتح "في المساحات المناظريّة" ضمن مخطوطة دار الكتب في القاهرة، مجموعة ريّاضة ٢٦٠، على الأوراق ٩١ظ-٩٤و. سنورد، فيما يلي النشرة الأولى المحقــَّقة لهذا المؤلَّف.

وتلي هذا النصّ فقرة من رسالة أبي صقر القبيصي "في أنواع الأعداد، وطرائف من الأعمال مما جمعه من متقدمي أهل العلم بهذه الصناعة". ولقد قدَّم عادل أنبوبا تحقيقاً نقديّاً لهذا المؤلــَّف بكامله (انظر الملاحظات حول النصوص).

---

[١] انظر: النديم ، كتاب الفهرست، نشر ر. تجدُّد (طهران ١٩٧١)، ص. ٣٣٩-٣٤٠.

[٢] وصل إلينا هذا الكتاب ضمن مخطوطة في القاهرة، دار الكتب، ريّاضة ٢٦٠، على الأوراق ٩٤ظ-١٠٥ظ. انظر: ر. راشد،
Entre arithmétique et algèbre/ Recherche sur l'histoire des mathématiques arabes, Collection « Sciences et philosophie arabes-Études et Reprises », (Paris 1984),
ص. ٢١-٢٢، والحاشية رقم ١١.

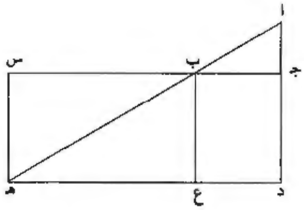
ومما استخرجه سنان بن الفتح في المساحات المناظرية ٩٢-ظ

قال سنان بن الفتح:

‹ا› إذا أردت أن تعرف بُعد خط د هـ من موضع د، فكأن الارتفاع خط د ا، ونخرج سمت النظر من نقطة ا إلى نقطة هـ، فتأخذ من خط د ا مقدارا من المقادير على أي قدر أردت، فكأنه خط ا جـ. ثم تخرج خطًا من نقطة جـ إلى سمت ا هـ، وهو خط جـ ب، فيخرج شعاع الناظر من نقطة ا إلى ب إلى هـ. فقد عرفت أن نسبة خط ا جـ من خط جـ ب كنسبة خط ا د من خط د هـ، لأن زاوية ا جـ ب مثل زاوية ا د هـ، وجميع زوايا مثلث ا د هـ مثل زوايا مثلث ا جـ ب، فقد تناسبت خطوط مثلث ا جـ ب ‹وخطوط› مثلث ا د هـ. وإذا كان نسبة الأول من الثاني كنسبة الثالث من الرابع، فإن ضربَ الأول في الرابع مقسوم على الثاني، فالذي يخرج هو الثالث؛ وكذلك إن قسمته على الثالث، خرج الثاني؛ وكذلك إن ضربت الثاني في الثالث، وقسمت ما بلغ على الرابع، خرج الأول؛ وإن قسمته على الأول، خرج الرابع. فإذا كان قدر ا جـ من جـ ب كقدر ا د من د هـ، وعرفت قدر ا جـ وجـ ب وا د هذه الثلاثة المقادير، كان قدر د هـ مفهوما، لأنك تضرب خط جـ ب في خط ا د، وتقسم ما بلغ على خط ا جـ، فيخرج خط د هـ. فهذا لمعرفة البعد من غير مساحة.

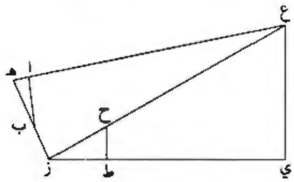
‹ب› وكذلك / معرفة الارتفاع من غير مساحة: كأن ارتفاع الحائط خط د هـ، وقد ٩٣-و خرج شعاع الناظر من نقطة ا، فأقمت عودًا من أي قدر أردت من بعد ا د، وهو قامة ب جـ، فكان قدر جـ ب لك مفهومًا، وقدر ا جـ مفهومًا، وقدر ا د مفهومًا، فصار ارتفاع د هـ مفهومًا؛ على مثال ما وصفنا من الضرب والقسمة.

1 المساحات المناظرية: مساحات الناظرية – 4 مقدارا: مقدار – 5 تخرج: اخرج – 13 د هـ (الثانية): جـ هـ – 14 مفهوما: مفهوم فيخرج: يخرج – 18 مفهوما (الأولى والثانية والثالثة): مفهوم – 19 مفهوما: مفهوم.



‹جـ› وكذلك معرفة عمق شيء من غير مساحة: كأن العمق ب ع وكأن عرض رأس البئر ب س، وهو مثل ع هـ، وكأن حرف البئر نقطة ب؛ فتنحيت من نقطة ب إلى نقطة جـ، وكأن القامة جـ ا. فخرج شعاع الناظر من ا إلى ب إلى هـ؛ ونسبة ا جـ من جـ ب كنسبة ب ع من ع هـ. وع هـ مثل ب س، وا جـ وجـ ب وب س الثلاثة الخطوط لك مفهومة، فخط ب ع مفهوم على ما ذكرنا من الضرب والقسمة./

‹د› فأما معرفة ارتفاع جبل من غير مساحة: فكأن ارتفاع جبل مثل خط ع ي. ووقفت ٩٣-ظ منه ‹في› موضع نقطة ز ليخرج شعاع الناظر ز ع. ثم أخرجت من نقطة ز عمودًا متصلاً بخط ز ع على زاوية قائمة، وهو ز هـ. فخرج شعاع الناظر إلى نقطة ع من موضع هـ، خطاً هـ ع. ثم أخذت من قدر هـ ز، أي قدر شئت وهو هـ ب؛ وأخرجت خط ب ا إلى شعاع هـ ع، فصار قدر هـ ا من ب ا كقدر هـ ز من ز ع. ومقادير هـ ب وب ا ‹و›هـ ز ثلاثة مقادير لك مفهومة. فقدر ز ع لك مفهوم، على ما ذكرنا من الضرب والقسمة.

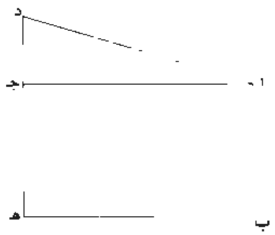


ثم أخرجت خط ط ح، وكان قدر ز ح من ح ط كقدر ز ع من ع ي، ومقادير ح ط وح ز وز ع ثلاثة مقادير لك مفهومة، فقدر ع ي لك مفهوم، على ما ذكرنا من الضرب والقسمة.

4 وب س: وب من – 10 هـ ا: هـ ب / ومقادير: وقدر – 11 ثلاثة: ثلاث / لك: مكررة في بداية السطر التالي – 12 ومقادير: وقدر – 13 ع ي: ز ع ي.

فهذه الأربعة الضروب التي ذكرت من التناسب تخرج كلّ بعد وكلّ ارتفاع وكلّ عمق مستوٍ كان أو غير مستوٍ. فافهم، إن شاء الله تعالى. /

‹هـ› فإن أردت أن تعرف عرض شيء في بحر لا يمكنك أن تمسحه: فكأن ب ا ٩٤-و
د هـ بحر، وشطه ب هـ؛ وأردت أن تعرف بعد ا د. عرفت من موضع ب بعد ب ا، على مثال ما وصفنا فوق. ثم وضعت العيار على نقطة ا من موضع ب حتى يقع على نقطة هـ. ثم تمسح من ب إلى هـ. ثم تضع العيار من موضع هـ حتى يقع على د. ثم تنظر بعد هـ د، على مثال ما وصفنا من فوق. فإن كان بعد ا ب مثل بعد د هـ، فبعد ا د كبعد ب هـ، وإن كان بعد أحدهما أكثر، فألق الأقل من الأكثر واضرب الباقي في مثله واضرب بعد ب هـ في مثله، واجمعهما وخذ جذر ما بلغ؛ فما بلغ فهو بعد ا د؛ فافهم ذلك، إن شاء الله تعالى.



تم قول سنان بن الفتح في المساحات المناظرية، والحمد لله رب العالمين.

6 د: د.

فقرة من رسالة أبي صقر عبد العزيز بن عثمان القبيصي

٨٨ - و

فأما معرفة ارتفاع شيء ما عن وجه الأرض، إذا لم نصل إلى أسفله، فهو معرفة أعمدة الجبال.

إذا أردت ذلك، فخذ ارتفاع رأس الجبل في أرض مستوية بقياس الأسطرلاب، كما تأخذ ارتفاع الكوكب، ثم تتأخر عن ذلك الموضع بمقدار ما يتغير الارتفاع درجا ما، ثم خذ ارتفاعه في ذلك الموضع الثاني ثانية.

واجعل الارتفاع الأول جيبًا، وهو الجيب الأول، ثم انقص الارتفاع من ص، واجعل الباقي جيبا، وهو الجيب الثاني. وكذلك فافعل بالارتفاع الثاني، فيخرج لك الجيب الثالث والجيب الرابع. ثم تضرب الجيب الثاني في الجيب الثالث، وتقسمه على الجيب الأول؛ فما خرج، نقصته من الجيب الرابع، وتحفظ ما بقي. ثم تضرب ما بين الموضعين اللذين أخذت منهما الارتفاع من الأذرع في الجيب الثالث، وتقسمه على ما كنت حفظته؛ فما خرج، فهو عمود الجبل وارتفاع الشيء المطلوب ارتفاعه.

فإذا أردت أن تعلم كم بين الموضع الذي أخذت فيه الارتفاع الأول ومسقط عمود الجبل من مستوي الأرض، فاضرب ما خرج من القسم، قبل أن تسقطه من الجيب الرابع فيما بين الموضعين من الأذرع، وتقسمه أيضًا على ما حفظته من الباقي؛ فما خرج، فهو ما بين الموضع الأول، الذي أخذت فيه الارتفاع، ومسقط عمود الجبل من مستوي الأرض.

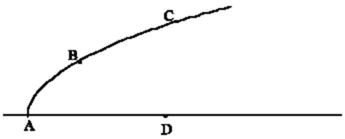
فإن أردت أن تعلم كم بين ناظرك في الموضع الذي أخذت فيه الارتفاع الأول وبين رأس الجبل، فاضرب ما بين الموضع ومسقط عمود الجبل في نفسه، واضرب عمود الجبل في نفسه، واجمعهما، ثم خذ جذر ذلك؛ فهو ما بين ناظرك ورأس الجبل؛ وذلك ما أردنا علمه.

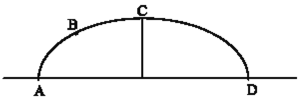
1 هذه فقرة من رسالة أبي صقر عبد العزيز بن عثمان القبيصي في أنواع الأعداد، وطرائف من الأعمال مما جمعه من متقدمي أهل العلم بهذه الصناعة – 10 خرج: كتب بعدها «فهو»، ثم ضرب عليها بالقلم.

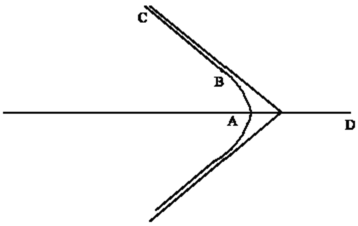
التعليقات الإضافية

١ـ "في تمام كتاب المخروطات"

[١، ص. ٢٠٢، س. ٢٣] لا يتناول ابن الهيثم، في القضايا ذات الأرقام ١ إلى ١١، سوى نصف القطع المحدود بمحوره في حالة القطع المكافئ، ونصف فرع في حالة القطع الزائد، وربع القطع الناقص.







[٢، ص. ٢٠٣، س. ٨] يتعلّق الأمر بالقضيّة ٥٠ ضمن نشرة هايبرغ (*Heiberg*).

[٣، ص. ٢٠٥، س. ١١] لقد شرحنا – في الحاشية ٢، ص. ٧٥- المعنى الذي يعطيه أبلونيوس لـِ "الخطّ الشبيه النسبة" في المقالة السابعة من كتاب "المخروطات"؛ انظر القضيّة الثانية من المقالة السابعة والقضايا التي تليها. لنأخذ، مثلاً، القطعَ الزائد ذا المحور المستعرض (أي السهم المجانب، وفقاً لمصطلحات ابن الهيثم) $A\Gamma$ وطوله d ، والضلع القائم c؛ وإذا كانت B نقطة اختياريّة على القطع الزائد، وكان BE العمود الساقط على السهم المجانب في النقطة E، وإذا كانت N نقطة على السهم بحيث يكون $\frac{d}{c}=\frac{\Gamma N}{AN}$، فإنّ "الخطّ الشبيه النسبة" هو AN. وهنا يظهر المقصود من العبارة "الشبيه النسبة". يُدخِل أبلونيوس، في القضيّة الثالثة من المقالة السابعة، مفهوم الخطّ الشبيه النسبة للقطع الناقص.

نورد، فيما يلي، نصّ أبلونيوس ، في حالة القطع الزائد (مخطوطة أيا صوفيا ٢٧٦٢، الورقة ٢٦٨ظ):

"إذا أخرِج سهمُ القطع الزائد على استقامة حتـّى يصير ما يقع خارج القطع هو القطر المجانب؛ وفُصِل مما يلي أحد طرفي القطر المجانب خطٌّ، فانقسم القطر المجانب بقسمين نسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة القطر المجانب إلى الضلع القائم، وكان الخطُّ الذي فُصل نظيرَ الضلع القائم؛ وأخرج من طرف القطر المجانب – الذي هو طرف الخطّ الذي فُصل – خطٌّ إلى القطع كيفما وقع، وأخرج من منتهاه عمودٌ على السهم، فإنّ نسبة مربّع الخطّ المخرج من طرف القطر المجانب إلى السطح الذي يحيط به الخطّان اللذان فيما بين مسقط العمود وطرفي الخطّ الذي فُصل كنسبة القطر المجانب إلى زيادته على الخطّ الذي فُصل. فليسمَّ الخطُّ الذي فُصل الشبيه النسبة ".

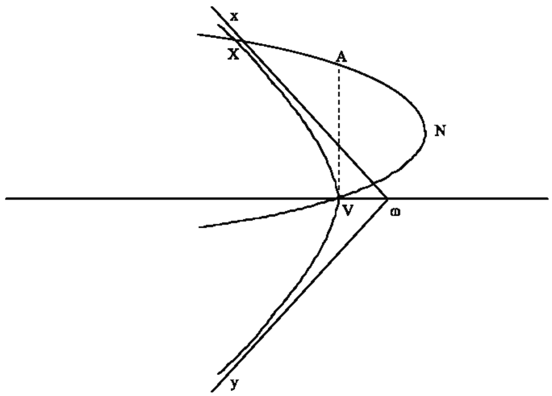
[٤، ص. ٢١٥، س. ٩] يتناول ابن الهيثم NX نصف القطع المكافئ $\mathcal{P}$ وَ VX نصف الفرع الزائد $\mathcal{H}_V$، ويعتبر أنّ wx وَ wy هما الخطّان المقارَبان. ويقوم باستدلال بالخُلْـف ليُبيِّن أنّ القوسين، اللتين حُدِّدتا بهذه الطريقة، تتقاطعان على نقطة وحيدة هي X.

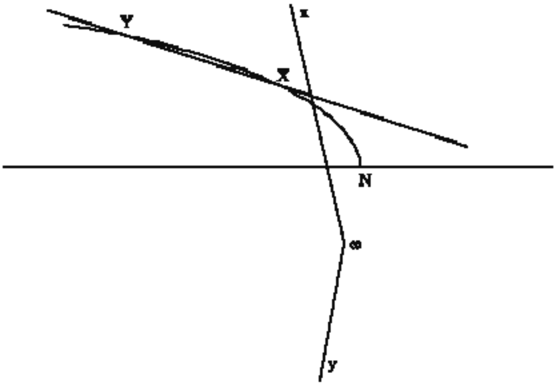
فلو كانت لهما نقطة تقاطع ثانية Y:

١) لَقَطَع الخطُّ XY، القاطع لـِ $\mathcal{H}_V$، نصفا المستقيم wx وَ wy (القضيَّة الثامنة من المقالة الثانية لكتاب المخروطات)

٢) لَخَرَج الخطُّ XY، القاطع لـِ $\widehat{NX}$ قوس $\mathcal{P}$ ، من $\mathcal{P}$ وقطع الخطّ المقارَب wx، ثمّ قطع محور $\mathcal{P}$ ما بعد N، فلا يمكنه أن يقطع نصف المستقيم xy.

لا تتقاطع هاتان القوسان، إذاً، إلا على نقطة وحيدة.





[٥، ص. ٢٣١، س. ١٤] يُستخدَم هنا جزءٌ فقط من القضيَّة، إذ إنَّ ابن الهيثم لا يكتب "كَما" بل "إما".

٢- رسم بالآلة (نيوسيس) لقسمة الخطّ الذي استعمله أرشميدس

يقدّم لنا التقليد المخطوطيّ لكتاب ابن الهيثم "في قسمة الخطّ الذي استعمله أرشميدس"، في نهاية هذا الكتاب، حلاً مُختلفاً يطرحه ريّاضيٌّ آخر. إنّ نسبة هذا النصّ، إلى كاتب مجهول، ضمنيّة، كما تشير إلى ذلك الجملة الأولى[1]. ويتعلّــق الأمر برسم بالآلة (نيوسِس).

يعطي المؤلّف رسماً آليّاً لمسألة أرشميدس. فهو يرسم الخطّين ΔA و ZE العموديّين على ΔZ في نصف المستوي نفسه؛ ثمّ ينقل $\Delta B = \Delta A$ وَ $Z\Gamma = Z\Theta$ على الامتداد المستقيم للخطّ ΔZ. يتخيّل، عندئذ، ثلاث قطع مستقيمة مُزوّدة بمفاصل XA، EX وَ ΓE، بحيث تدور القطعة الأولى حول النقطة الثابتة A، وتدور الثالثة حول النقطة الثابتة Γ وتبقى موازية للقطعة الأولى؛ ويتحرّك المفــصّلان X وَ E على ΔZ وَ ZE حسب الترتيب. ونحصل على الحلّ عندما تكون الزاوية $\widehat{AXE}$ قائمة.

تكون الزاويتان $\widehat{\Delta XA}$ وَ $\widehat{Z\Gamma E}$ متساويتين، لأنّ الخطّين XA وَ ΓE متوازيان. فيكون المثلّثان $X\Delta A$ وَ ΓEX متشابهين، فنحصل على النسبة $\frac{A\Delta}{\Delta X} = \frac{XE}{E\Gamma}$.

[1] نثبت فيما يلي هذا النصّ استناداً إلى المخطوطات التالية: مخطوطة إسطنبول، بشير آغا ٤٤٠، على الورقتين ٢٧٥ظ-٢٧٦و، ونرمز إليها بـ [ب]؛ مخطوطة إسطنبول، السليمانيّة، عاطف ١٧١٢، الورقة ١٤٧ظ ونرمز إليها بـ [ع]؛ مخطوطة إسطنبول، جار الله ١٥٠٢، الورقة ٢٢٣و، ونرمز إليها بـ [جـ]؛ مخطوطة لايدن(Leiden, Or. 14)، الورقتان ٤٩٩-٥٠٠، ونرمز إليها بـ [ل]. انظر ، بخصوص تاريخ النصوص، أعلاه الفصل الثالث، ص. ٤٦٠-٤٦٢. شرَح هذا النص ف. ويبك (W. Woepcke) ضمن *L'Algèbre d'Omar alkhayyâmi(Paris 1851)* الذي نشر وترجم مرفقاً بمقتطع من مخطوطات غير منشورة، ص. ٩٣ وما يليها.

وهكذا يكون $\frac{B\Delta^2}{\Delta X^2}=\frac{A\Delta^2}{\Delta X^2}=\frac{XE^2}{E\Gamma^2}=\frac{XZ^2}{ZE^2}$، بسبب التشابه بين المثلَّثين القائمَي الزاوية EZX وَ $\Gamma E X$. ونحصل، بما أنَّ $XZ.Z\Gamma = ZE^2$، على $\frac{B\Delta^2}{\Delta X^2}=\frac{XZ}{Z\Gamma}=\frac{XZ}{Z\Theta}$، كما أردنا.

يُذكِّر هذا الرسم بالرسم الذي ينسبه أوطوقيوس إلى أفلاطون بخصوص الوسطين المتناسبين[٢]، وبالرسم المشابه له الذي نجده عند بني موسى[٣]. ويختلف هذان الرسمان الأخيران عن الرسم الذي ندرسه، هنا؛ إذ إنَّ الزاويتين القائمتين ثابتتان، وينتقل أحد الرأسين على محور، فنحصل على الحلّ عندما يكون الرأس الثاني على محور آخر. أمّا هنا، وبعكس ذلك، فإنَّ الرأسين ينتقلان على محورين ثابتين، ونحصل على الحلّ عندما تكون الزاويتان قائمتين. نورد على الصفحة التالية النصَّ المحقَّق.

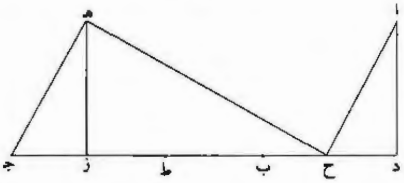
---

[٢] انظر شرح المقالة الثانية من كتاب أرشميدس في الكرة والأسطوانة، نشرة موغلر(*Mugler*)، ص. ٤٥-٤٦.
[٣] انظر القضيّتين ١٧ وَ ١٨ ضمن الفصل الأوّل من المجلّد الأوّل من هذه الموسوعة.

ب – ٢٧٥ – ظ
جـ – ٢٢٣ – و
ع – ١٤٧ – ظ
ل – ٤٩٩

وبوجه آخر لغيره بتحريك الخط: ليكن خط د ز، وتُعلم عليه نقطتا ب ط؛ ونريد أن نقسم خط د ب على ح بحيث يكون نسبة ح ز إلى ز ط كنسبة مربع ب د إلى مربع د ح. فنخرج من نقطتي د ز عمودي د ا ز هـ في جهة واحدة، ونفصل د ا ك د ب، ونخرج د ز إلى جـ، ونفصل ز جـ ك ز ط. ونتوهم على نقطتي ا ح خطين متحركين / في جهتين مختلفتين كخطي ا ح ح هـ، بحيث يكون ا ح قاطعًا لـ د ب وح هـ قاطعًا لـ ز هـ، وهما في حركتيهما متوازيان بشرط أن يكون الخط الواصل بين نقطتي التقاطع، أعني نقطتي ح هـ، يحيط مع كل واحد من خطي ا ح ح هـ بزاوية قائمة، وليكن خط هـ ح. فحينئذٍ يكون زاوية ا ح هـ قائمة وكذلك زاوية ح هـ جـ.

ب – ٢٧٦ – و



ل – ٥٠٠

فأقول: إن نسبة ح ز إلى ز ط كنسبة مربع ب د / إلى مربع د ح، لأن زاويتي ا د ح ح هـ جـ قائمتان وزاوية ا ح د كزاوية جـ لتوازي الخطين، تبقى زاوية ا كزاوية هـ ح ز؛ فمثلثا ا د ح ح هـ جـ القائما الزاويتين متشابهان؛ فنسبة ا د إلى د ح كنسبة ح هـ إلى هـ جـ، فنسبة مربع ا د، أعني مربع ب د، إلى مربع د ح كنسبة مربع هـ ح إلى مربع هـ جـ، أعني نسبة مربع ح ز إلى مربع ز هـ. لكن نسبة مربع ح ز إلى مربع ز هـ كنسبة ح ز إلى ز جـ، لأن ز هـ وسط في النسبة بين خطي ح ز ز جـ، وخط ز جـ كخط ز ط، فنسبة ح ز إلى ز ط كنسبة مربع ب د إلى مربع د ح؛ وذلك ما أردناه.

1 ليكن: ليكون [ل] / د ز: د و [جـ، ل] جـ د [ع] / ونريد: ويريد [جـ] – 2-3 إلى مربع د ح: أثبتها في الهامش [جـ] – 4 جـ: ح [جـ، ل] / ز جـ: ز ح [جـ، ل] / ونتوهم: ويتوهم [ل] وهو يتم [ع] / ا ح: ناقصة [ب] / ح: جـ [ع] – 5 ح هـ: جـ هـ [ع] – 6 وح هـ: وجـ هـ [ع] – 7 هـ: و [ع] / ح هـ: هـ ح [ب، جـ] هـ حـ [ع] – 8 ح هـ جـ: ح هـ ح، كتب الجيم حاءً، ولن نشير إليها فيما بعد [ب، جـ، ل] – 9 لأن: ولأن [ع] – 10 لتوازي: ليوازي [ل] – 11 فمثلثا: فمثلها [جـ] فمثلثا زاويتي [ع] / ا د ح: ا ح د [ع] / ا د: ا هـ [ع] / د ح: ز ح [ع] – 12 أعني: الى [ع] – 13 ح ز: حـ ز [ع] / ز هـ: هـ ز [ب] هـ ب [ع] – 14 ز هـ (الأولى): هـ ز [ع] / وسط: ناقصة [ع] – 15 ز ط (الأولى): ز د [ع].

٣- من كلام ابن الهيثم على مقدّمة أرشميدس في ضلع المسبّع

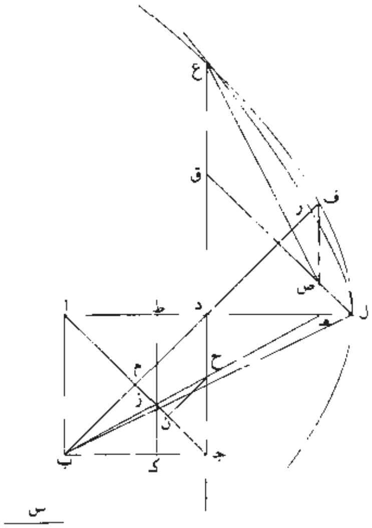
لقد شرحنا سابقاً (انظر ص. ٤٥٨-٤٥٩) أنّ لدينا، هنا، نُسخة مُختصَرَة للنصّ الأوّل لابن الهيثم، ذي العنوان "مقدّمة في ضلع المسبّع". إنّ ما يزيد من أهمّيّة هذه النسخة المُختصَرَة هو أنّ هذا المؤلّف الأخير وصل إلينا في عدد مُصغَّر من المخطوطات (في مخطوطتين فقط). فهذه النسخة تُمثّل عنصراً لا غنى عنه في كتابة تاريخ هذا النصّ ووسيلة جدّيّة للتأكّد من نسبة هذا النصّ إلى ابن الهيثم. توجَد مخطوطة هذه النسخة ضمن مجموعة ثرستون ٣ (*Thurston 3*)، في مكتبة بودليان في أكسفورد، على الورقتين ١٣٢و-١٣٢ظ؛ وهي منسوخة في سنة ٦٧٥ للهجرة.

من كلام ابن الهيثم
على مقدّمة أرشميدس في ضلع المسبّع

قال: فأما كيف نعمل المربع على الشريطة المذكورة، فنرسم مربّع ا ب جـ د، ونخرج ا جـ، و ا د إلى هـ، و ب ز ح هـ؛ ونفرض ح د هـ كـ ب ز جـ على جهة التحليل. ونخرج كـ ز ط يوازي ا ب. فـ د ا في ا ط كمربع د هـ، كما بيّن أرشميدس. ونصل ب د فينصف ا جـ، وليكن على م. فـ ب م جـ كـ ا م د. ولأن هـ د ح كـ ب ز جـ، يكون ب م جـ كـ هـ د ح مع ب م ز، و ب م جـ كـ ا م د، فـ ا م د كـ هـ د ح مع ب م ز. ونأخذ منحرف م د ح ز مشتركًا، فيكون ب د هـ كمنحرف ا د ح ز. وليكن ب هـ ل مثل جـ ز ح، فيكون ب د ل كـ ا د جـ، وهما بين متوازيين. فـ ا د كـ د ل، فنسبة ب د ل إلى ب هـ ل كـ ا د جـ إلى جـ ح ز. ونخرج عمود ح ن على جـ ز، ‹فيكون ح ن› في نصف ز جـ كـ ح ز جـ، و د م في نصف ا جـ كـ ا د جـ، لأن د م عمود على ا م. فنسبة ا د جـ إلى جـ ز ح مؤلفة من د م إلى ح ن – التي هي كنسبة د جـ إلى جـ ح – ومن ‹نصف› ا جـ إلى نصف جـ ز، أعني ا جـ إلى جـ ز. فـ ا جـ د إلى جـ ز ح مؤلفة من د جـ إلى جـ ح ومن ا جـ إلى جـ ز. و د جـ إلى جـ ح كـ هـ ب إلى ب ح. فـ ا جـ إلى جـ ز كـ هـ ب إلى ب ز. فـ ا جـ د إلى جـ ز ح مؤلفة من هـ ب إلى ب ح ومن هـ ب إلى ب ز. وكذلك يلزم – إذا كان المربع مختلف الطولين –

8 د ح ز: ا د ح – 11 ز جـ: د جـ / و د م: و جـ م – 12 د م: جـ م / ح ن: ح ر – 14 مؤلفة: مكررة

أن نخرج من د عمودًا على ا جـ. فيقوم مقام د م ويعود الحال إلى النسبتين المذكورتين. وا جـ د إلى جـ ز ح كـ ب د ل إلى ب هـ ل، أعني د ل إلى ل هـ، فـ د ل إلى ل هـ مؤلفة من هـ ب إلى ب ح، أعني هـ ا إلى ا د. ومن هـ ب إلى ب ز، أعني هـ ا إلى ا ط، فـ د ل إلى ل هـ مؤلفة من هـ ا إلى ا د ومن هـ ا إلى ا ط، أعني مربع هـ ا إلى د ا في ا ط المساوي لمربع د هـ. فـ د ل إلى ل هـ كمربع ا هـ إلى مربع هـ د. وا د كـ د ل.



فقد انحلّ المربع إلى قسمة، يكون د ل إلى ل هـ كمربع ا هـ إلى مربع هـ د. وهذه القسمة إنما تمكن بقطع المخروط.

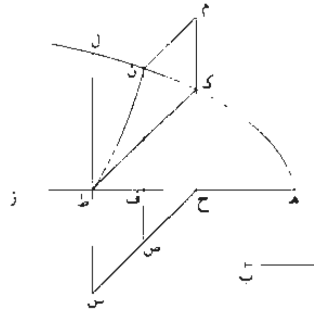
فنفرض على طريق التحليل أنه قد انقسم، ونخرج جـ د، ونجعل د ع كـ ا هـ. ونخرج عمود هـ ف كـ د هـ. فيكون د ل إلى ل هـ كمربع ع د إلى مربع ف هـ. وليكن د ل في س كمربع ع د. فالقطع المكافئ الذي سهمه د ل وقائمه س يمرّ بـ ع ف. أما بـ ع فلأن مربع د ع كـ د ل في الضلع القائم، وهذه خاصة المكافئ. وأما بـ ف فلأن د ل إلى ل هـ كمربع ع د إلى مربع ف هـ، لـ كـ ا من *المخروطات*. فليكن القطع ل ف ع. ونجعل د ق كـ د ل ونصل ل ق؛ وليقطع ف هـ على ص. فيكون ل د ق معلوم

1 أن: لأن – 3 ب ح: ب حـ – 10 ف هـ: ق هـ – 13 ف هـ: ق هـ / ل ف ع: كتب في الهامش «ا ف ع» مع «حد» فوقها.

الصورة، وتكون زاوية ع ق ص معلومة، وكذا نسبة ق ص إلى د هـ لأنها كـ ق ل إلى ل د المعلومة. ولأن ع د كـ هـ ا وق د كـ د ل، يكون ق ع كـ د هـ، فـ ع ق إلى ق ص معلومة، وزاوية ع ق ص معلومة. ونصل ع ص. فـ ع ق ص معلوم الصورة، فـ ص ع إلى ع ق معلومة؛ وع ق كـ د هـ. أعني هـ ف، فمربع ع ص إلى مربع ف هـ معلومة، ومربع ف هـ كـ هـ ل في س، فـ ل هـ في س إلى مربع ص ع معلومة؛ فـ هـ ل إلى ل ص معلومة، فـ ل ص في س إلى مربع ص ع معلومة. وزاوية ع ص ل معلومة؛ فالقطع المكافئ – الذي قطره ل ق ورأسه ل وزاوية ترتيبه ع ص ل وضلعه القائم خط نسبته إلى س نسبة معلومة – يمرّ بـ ع. فليكن ذا القطع ل رع.

فإذا كان ا د معلوم الوضع، وكانت ل معلومة، وكان س معلوم القدر. كان قطع ل ف ع معلوم الوضع وكان ل ق معلوم الوضع لأن زاوية د ل ق معلومة، ويكون الضلع القائم لقطع ل رع معلوم القدر وزاوية ع ص ل معلومة. فيكون قطع ل رع معلوم الوضع، فتكون ع معلومة وع د عمودًا؛ ول د معلوم الوضع، فـ ع د معلوم الوضع والقدر، وتكون د معلومة. ود ل معلوم القدر، فـ ع د إلى د ل معلومة، وع د كـ ا هـ ود ل كـ ا د، فـ هـ ا إلى ا د معلومة، ‹و›لأنا قد يمكننا أن نجد خطين مساويين لهما بالطريق الذي بيناه. وهما ع د د ل؛ / وا د معلوم فـ د هـ معلوم ود معلومة. وهي التي تجعل مربع ا ب جـ د على الصفة المذكورة. ظ-١٣٢

وأيضا، فإن أرشميدس فرض هذا المربع وحلّله إلى مقدمة هي التي احتاج إليها في عمل المسبع: وهو أن د ا في ا ط كمربع د هـ، وهـ ط في ط د كمربع ا ط، وكل واحد من ا ط هـ د أعظم من ط د. ففرض خطًا معلوما وقسّمه على هذه النسبة وبنى المسبع عليه. ويمكن قسمة خط على هذه النسبة بقطوع المخروط أيضا من غير حاجة إلى المربع.



1 د هـ: ر هـ – 2 د ل: د ا – 8 ل رع: ل ف ع – 9 ا د: ل د – 11 ل رع: ل ق ع ل رع: ل ف ع.

وليكن ا ب، ونريد أن نقسمه بثلاثة أقسام كـ ا جـ جـ د د ب حتى يكون د ا في ا جـ كمربع د ب، ويكون ب جـ في جـ د كمربع ا جـ، وكل واحد من ا جـ د ب أعظم من د جـ.

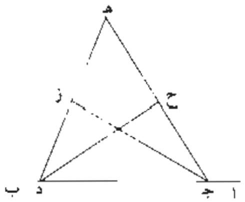
فنفرض هـ ز كيفما اتفق، ونفصل منه هـ ح كيفما اتفق، ونعمل قطعًا مكافئًا يكون سهمه هـ ز ورأسه هـ وضلعه القائم هـ ح، وليكن قطع هـ كـ ل. ونفصل ح ط كـ ح هـ ونخرج من ح ط عمودين ينتهيان إلى القطع كـ ح كـ ط ل، فيكون ح كـ كـ ح هـ لأن مربع كـ ح كـ هـ ح في الضلع القائم، فمربع كـ ح كـ ح هـ في نفسه، فـ كـ ح كـ هـ ح. ونخرج ل ط على استقامة ونجعل ط س كـ ط ح، ونصل ح س كـ ط فيتوازيان، لأن ط س كـ ح كـ ومواز له، فـ كـ ح س ط متوازي الأضلاع. فنخرج على ط القطع الزائد الذي لا يقع عليه كـ ح ح س، وليكن قطع ط ن؛ فيقطع قطعة كـ ل من قطع هـ كـ ل لتوازي ط ل ح كـ الذي لا يقع على القطع. فـ ط ل في داخل قطع ط ن الزائد. فإذا أخرج ط ل ‹ح كـ› إلى غير نهاية، كان البعد الذي بينهما أبدًا متساويا. وقطع ط ن إذا أخرج في جهة ن، كان كلما ازداد خروجًا ازداد قربا من ح كـ وما يتصل به. ولأن ط ل إذا أخرج إلى غير نهاية في جهة ل، يكون أبدا داخل قطع ط ن. ونقطة كـ هي أبدًا خارجة عن قطع ط ن لأنها على الخط الذي لا يقع عليه. فقطع ط ن إذا أخرج فإنه يقطع قطعة كـ ل من قطع هـ كـ ل، فليقطعها على ن. ونخرج ح كـ في جهة كـ، ومن ن ن م موازيًا لـ كـ ط، وعمودَ ن ف ص. فيكون ‹موازيا› لـ س ط ل، فيكون م ن في ن ص كـ ط كـ في ط س، فـ ن ح المتوازي الأضلاع مساو لمتوازي أضلاع س كـ ون ح هو من ن ص في ح ف لأن ح ف عمود على ن ص، وس كـ مساو لـ س ط في ط ح، أعني ح هـ، فمتوازي أضلاع س كـ كمربع هـ ح.

وتبين أن س كـ كـ ن ص في ح ف، فـ ن ص في ح ف كمربع هـ ح. ونجعل ف ز كـ ن ف؛ وف ص كـ ف ح لأن س ط كـ ط ح، فـ ح ز كـ ن ص، فـ ز ح في ح ف كمربع ح هـ. وأيضا، فإن ن ف من خطوط الترتيب لكونه عمودًا على سهم هـ ز، وهـ ح هو الضلع القائم لقطع هـ كـ ن المكافئ، فـ ف هـ في هـ ح كمربع ف ن، وف ن كـ ف ز، فـ ف هـ في هـ ح كمربع ف ز. وقد كان ز ح في ح ف كمربع هـ ح. فنقسم ا ب على جـ د على نسبة هـ ح ح ف ف ز، فيكون د ا في ا جـ كمربع د ب، وب جـ في جـ د كمربع جـ ا. وبقي أن نبين أن كل واحد من ا جـ د ب أعظم من جـ د.

11 لذي: للذي – ط ل: س ط ب – 21 ف ن ص: ف ن ح – 22 ن ص: ز ص – 24 هـ ك ن: هـ ك ز – 25 ف ز (الثانية): هـ ز.

فلأن ف هـ في هـ ح كمربع ف ز، يكون ف ن أعظم من هـ ح، فهو أعظم من ح ط لأن ح ط كـ ح هـ، فهو أعظم بكثير من ح ف، ون ف كـ ف ز، فـ ف ز أعظم من ف ح، وهـ ح أيضًا أعظم من ح ف لأن هـ ح كـ ح ط. فكل واحد من هـ ح ف ز أعظم من ف ح. فكل واحد من ا جـ د ب أعظم من جـ د، وا جـ جـ د د ب على نسبة هـ ح ح ف ف ز. فقد قسّمنا ا ب، كما أردنا.

ويمكن أن نعمل من أقسامه مثلثًا، وليكن هـ جـ د، وهو الذي عمله أرشميدس وعمل منه المسبع. ويمكن أن نعمل منه المسبع على غير الوضع الذي عمله أرشميدس، لأنا نعمل في الدائرة المطلوب ضلع مسبعها مثلثًا مساوية زواياه لزوايا هذا المثلث، فيكون القوس التي يوتر جـ د سبع الدائرة، والتي يوترها جـ هـ سبعيها والتي يوترها هـ د أربعة أسباعها، لأن زاوية د ضعف زاوية هـ وزاوية جـ أربعة أمثال هـ. فإذا قسمت قوس هـ جـ بنصفين وقوس هـ د بأربعة أقسام متساوية وأوترت القسي، يحصل مسبع، كما أردنا.



وبقي أن نبين أن زاوية د ضعف هـ وزاوية جـ أربعة أمثال هـ.

فننصف د بـ د ح وجـ بـ جـ ز، فيكون هـ ح إلى ح جـ كـ هـ د إلى د جـ. أعني ب د إلى د جـ. فبالتركيب هـ جـ إلى جـ ح كـ ب جـ إلى جـ د. أعني مربع ا جـ إلى مربع جـ د. لأن ب جـ في جـ د كمربع جـ ا. فـ هـ جـ إلى جـ ح كمربع ا جـ، أعني مربع جـ هـ إلى مربع جـ د، فـ هـ جـ إلى جـ د كـ د جـ إلى جـ ح، فـ د هـ جـ جـ د ح متشابهان، فزاوية د ح جـ، أعني زاويتي د هـ ح هـ د ح، كـ هـ د جـ. فـ د هـ ح كـ ح د جـ، وهـ د جـ ضعف جـ د ح. فزاوية د ضعف هـ. وأيضًا، د ز إلى ز هـ كـ د جـ إلى جـ هـ. أعني د جـ إلى جـ ا، فبالتركيب يكون د هـ إلى هـ ز كـ د ا إلى ا جـ،

1 ف ن: ف ز – 3 فكل: وكل 9 هـ د: هـ جـ – 16 جـ هـ: د هـ – 16-17 فـ د هـ جـ ... كـ هـ د جـ: أثبتها في الهامش 19 د : ز.

أعني مربع ب د إلى مربع جـ ا، فـ د هـ إلى هـ ز كمربع ب د إلى مربع جـ ا، أعني مربع د هـ إلى مربع هـ جـ، فـ د هـ إلى هـ ز كمربع د هـ إلى ‹مربع› هـ جـ، فـ د هـ إلى هـ جـ كـ هـ جـ إلى هـ ز. فـ هـ جـ د هـ جـ ز متشابهان، فزاوية جـ ز هـ، أعني زاويتي ز جـ د ز د جـ، كـ هـ جـ د، فـ هـ د جـ كـ هـ جـ ز وهـ جـ د ضعف هـ جـ ز، وهو ضعف هـ د جـ، فـ هـ جـ د أربعة أضعاف هـ، وهو المطلوب – وبالله التوفيق والعصمة.

1 هـ ز: هـ ب – 2 فـ د هـ (الأولى والثانية): فـ ز هـ – 3 هـ جـ ز: هـ د جـ.

٤ – القوهي ومقدّمة قسمة الخطّ لأرشميدس: الشرح الرياضيّ والنصّ

المقدّمة: لتكن معنا قطعتان AB وَ c من خطٍّ مستقيم؛ جِدْ على الخطّ AB، بين A وَ B أو بعد B، نقطة D بحيث يكون $\frac{AD}{c}=\frac{c^2}{BD^2}$ أو $c^3 = AD.BD^2$.

نتعرّف هنا على المسألة التي طرحها أرشميدس في القضيّة الرابعة من المقالة الثانية من كتاب "الكرة والأسطوانة"، مع فارق هو أنّ أرشميدس يتناول قطعة c من خطٍّ مستقيم ومساحة Γ لا علاقة لها بـِ c، في حين أنّ لدينا هنا $c^2 = \Gamma$. ليست معادلة القوهي أقلّ عموميّة، لأنّ من الممكن دائماً أن نعمل قطعة c' بحيث يكون $c'^3 = \Gamma.c$، إذا عرفنا كيف نـُدخل متوسّطين متناسبين بين مِقدارين معلومين.. ولنلاحظ أنّ الشكل الذي تبنّاه القوهي يسمح له بصياغة شرط قابليّة الحلّ للمسألة بواسطة تحديد من أعلى للقطعة c'، بينما يُعطي شرح أوطوقيوس تحديداً من أعلى للحجم $\Gamma.c$.

لنضع $c = BE$ ولتكن النقطة D من الجهة نفسها بالنسبة إلى النقطة B، ولنكمل رسم المربّع $BEGH$. ليكن $\mathcal{P}$ القطع المكافئ الذي له الرأس A والمحور AB والضلع القائم c، وليكن $\mathcal{H}$ القطع الزائد الذي له الرأس G والخطّان المقارِبان BE وَ BH.

لتكن النقطة I مشتركة بين $\mathcal{P}$ وَ $\mathcal{H}$، وليكن $ID \perp AB$ وَ $IK \perp BH$.

(١) $I \in \mathcal{P}$ ، فنحصل على $c.AD = ID^2$

(٢) $I \in \mathcal{H}$ ، فنحصل على $c^2 = ID.DB = BK.KI = BE.EG$.

ونستنتج من (١) وَ (٢) أنَّ $\frac{ID}{c} = \frac{AD}{ID} = \frac{c}{BD}$ ، فنحصل على $\frac{AD}{DC} = \frac{c^2}{BD^2}$ ، فنحصل على النتيجة.

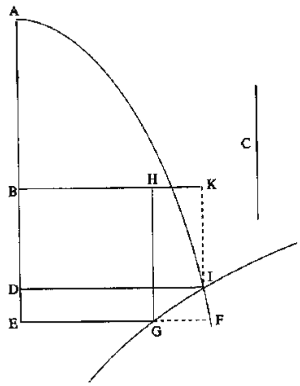
● **ملاحظة حول وجود النقطة I.**

تكون النقطة G رأسَ القطع الزائد، في حالة الشكل ١ - ب ، داخل القطع المكافئ لأنّ $AE = AB+ c$؛ وإذا كانت F نقطة القطع المكافئ التي تسقط عموديّاً في E على AB، يكون معنا $EF^2 = (c+AB)c$، فيكون $c < EF$، ويقطع $\mathcal{P}$ القطع الزائد $\mathcal{H}$ على نقطة I التابعة للقوس $\widehat{AF}$.

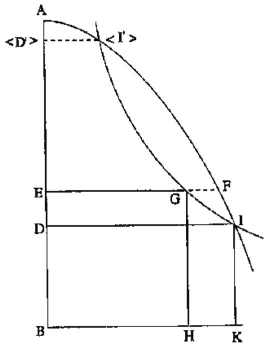
أمّا في حالة الشكل ١ - ا، فلا بدَّ من القيام بمناقشة؛ ولكنَّ المؤلّف أهملها، مع أنّه يُعطي الشرط اللازم لحصول التقاطع؛ وهذا ما يدلُّ على أنّه فكّر بالقيام بها.

ويُمكن، في الواقع، أن يكون لدينا ثلاث حالات:

١ - الحالة الأولى هي التي نراها في الشكل ١ - ا ضمن المخطوطة. يتقاطع القطع المكافئ والقطع الزائد، في هذه الحالة على نقطتين I وَ I'، فنحصل على حلّين D وَ D'.



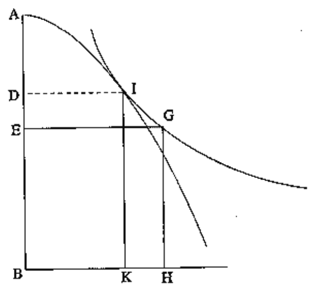
الشكل ١-ب



الشكل ١-ا

٢ - الحالة الثانية هي التي نراها في الشكل ١ - ج. يكون القطع المكافئ مماسّاً، في هذه الحالة،

للقطع الزائد، وتوافق نقطة التماسّ I النقطة D.



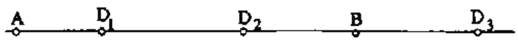
الشكل ١-ج

٣- الحالة الثالثة هي التي نراها، في الشكل ١- د. لا يتقاطع القطع المكافئ مع القطع الزائد، في هذه الحالة، فلا توجد نقطة D بين A وَ B.

ترجع مناقشة هذه المسألة إلى مناقشة حلول معادلة من الدرجة الثالثة. لنعتبر نصفَ المستقيم AB مِحوراً، ولنضع $AB = a > 0$ ، $AD = x > 0$ ، $BD = a- x$. ليكن c طول القطعة المعلومة C؛ يكون معنا: $\frac{c^2}{BD^2} = \frac{AD}{c} \Leftrightarrow c^3 = AD.BD^2 \Leftrightarrow x(a-x)^2 = c^3$.

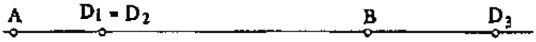
لنضع $f(x) = x(a-x)^2$. تبلغ هذه الدالّة حدَّها الأقصى في النقطة $x = \frac{a}{3}$، ويكون معنا: $M = f\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{4a^3}{27}$. تُكتَب المعادلة $c^3 = f(x)$، ويكون معنا:

١- $0 < c^3 < \frac{4a^3}{27}$ ، يكون للمعادلة ثلاثة جذور: $0 < x_1 < \frac{a}{3} < x_2 < a < x_3$.



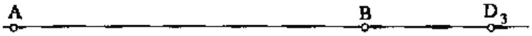
الشكل ٢-١

٢ - $c^3 = \frac{4a^3}{27}$ ، يكون للمعادلة جذران: $x_1 = x_2 = \frac{a}{3}$ وَ $a < x_3$.



الشكل ٢-٢

٣ - $c^3 > \frac{4a^3}{27}$، يكون للمعادلة جذر واحد $a < x_3$.



الشكل ٢-٣

ترجع طريقة ابن القوهي، في الواقع، إلى تناول نقطتين A و B، وإلى برهنة أنّ الدالة $AD.BD^2 = f(D)$ تبلغ حدّاً أقصى عندما تُحقّق D المعادلة $AD = \frac{AB}{3}$. لا يأخذ القوهي النقطة D على الامتداد المستقيم للقطعة AB ؛ ولكنّه يؤكّد، دون التباس، وجوب تحقّق المتباينة $c^3 \leq \frac{4a^3}{27}$ لكي تكون D بين A وَ B.

وهكذا نجد، بعد إثبات المقدّمة، النقطة D بحيث يكون

(١) $c^3 = AD.\ BD^2$ ، مع (٢) $AB \pm BD = AD$.

يُشير القوهي أنّه يجب في الحالة التي يكون فيها $AB - BD = AD$، أن تتحقّق المتباينة $c^3 \leq \frac{4AB^3}{27}$ ؛ وكان قد أشار إلى هذا الشرط في بداية النصّ.

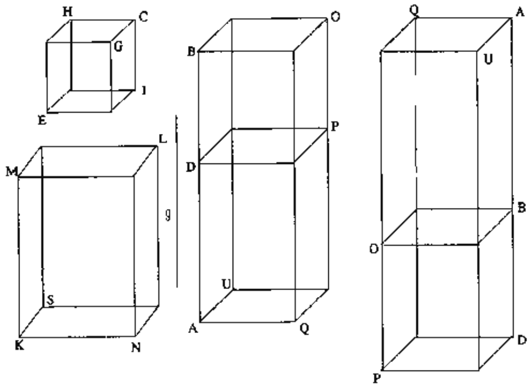
ونستخرج من (٢): $AB.\ BD^2 \pm BD^3 = AD.\ BD^2$ ، فيكون معنا، وفقاً لِـ (١):

$$c^3 = AB.\ BD^2 \pm BD^3.$$

وتكون القطعة BD معلومة وفقاً للمقدّمة، إذ إنّ القطعتين AB وَ c معلومتان. ولكنّ $AB.\ BD^2$ هو حجم متوازي المستطيلات (P) الذي له الارتفاع AB والقاعدة المؤلّفة من مربّع ذي ضلع مساوٍ للقطعة BD؛ و BD^3 هو، من ناحية أخرى، حجم المكعّب المبنيّ على هذا المربّع نفسه. فإذا كان c^3 حجمَ مجسّم معلوم، يكون بإمكاننا أن نحلّ المسألة

التالية: اِبنِ على AB متوازياً للمستطيلات ذا قاعدة مربّعة، بحيث إذا أضفنا إليه أو طرحنا منه مكعّباً له القاعدة نفسها، نحصل على حجم معلوم.

يتناول القوهي، لكي يُعمِّم هذه المسألة، نقطتين A وَ B ومتوازياً للمستطيلات (CE) معلوم الشكل، ثمَّ يُبدِل المُكعَّبَ ذا الحجم c^3 بمتوازٍ للمستطيلات مُشابِهٍ لِـ (CE) وذي حجمٍ معلوم. وليكن (KL) المجسَّم وليكن KM حرفاً له. إنَّ زاويتيْ ثلاثيّ السطوح (C, HIG) و (K, MNS) متساويتان. لنضع $V=(KL)$؛ ولنأخذ على الخطّ AB نقطة، D، بحيث يكون $\frac{KM^2}{BD^2}=\frac{AD}{KM}$. نبني على BD (في كلتا حالتي الشكل) المجسَّم (DO) المشابه لِـ (KL)؛ ونبني انطلاقاً من قاعدته (DP) المجسَّمَ (AP) ذا الحرف AD ونبيِّن أنَّ حجم (AP) مساوٍ لِـ V.



الشكل ٣

البرهان: لتكن g قطعة من خطّ مستقيم بحيث يكون $\frac{AD}{g}=\frac{g}{KM}$، يكون معنا

$$\frac{AD}{KM}=\left(\frac{g}{KM}\right)\left(\frac{AD}{g}\right)=\left(\frac{g}{KM}\right)^2=\left(\frac{AD}{g}\right)^2.$$

ولكنَّ $\frac{KM^2}{BD^2}=\frac{AD}{KM}$، فيكون $\frac{KM}{BD}=\frac{g}{KM}=\frac{AD}{g}$؛ فنستنتج من ذلك أنَّ

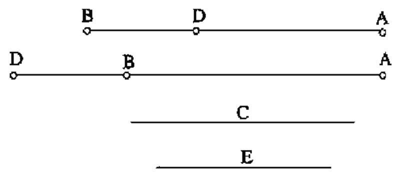
$$\frac{AD}{BD}=\left(\frac{KM}{BD}\right)\left(\frac{g}{KM}\right)\left(\frac{AD}{g}\right)=\left(\frac{KM}{BD}\right)^3.$$

ولكنَّ لدينا، من جهة أخرى، $\frac{AD}{BD} = \frac{\text{حجم}(AP)}{\text{حجم}(DO)}$ ، لأنَّ المجسَّمين لهما القاعدة نفسها، فيكون $\left(\frac{KM}{BD}\right)^3 = \frac{\text{حجم}(KL)}{\text{حجم}(DO)}$ ، لأنَّ المجسَّمين متشابهان؛ فنحصل على النتيجة:

$$\text{حجم}\ (AP) = \text{حجم}\ (KL) = V.$$

المجسَّم المبنيُّ على AB هو (AO)، فيكون V مساوياً لمجموع حجمي (AO) وَ (DO) أو للفرق بينهما، أيْ أنَّ حجم (AO) مساوٍ للفرق بين V وحجم (DO)، أو لمجموعهما.

يُقدِّم القوهي عرضاً أكثر بساطة لهذا البرهان. فهو يتناول القطعتين AB وَ c؛ ويأخذ نقطة D على AB أو على امتدادها المستقيم، بحيث يكون $\frac{AD}{c} = \frac{c^2}{BD^2}$ (لدينا على الشكل حالتان ممكنتان).



الشكل ٤

نعمل على BD متوازياً للمستطيلات P_1، وليكن $v(BD)$ حجمه؛ ونعمل على AD متوازياً للمستطيلات P_2، وليكن $v(AD)$ حجمه. وإذا عملنا على c متوازياً للمستطيلات P، مشابهاً لِـ P_1، وإذا كان V حجمه، يكون معنا $V = v(AD)$.

البرهان: لتكن e القطعة المعرَّفة بالمعادلة $\frac{AD}{e} = \frac{e}{c}$ ، فيكون $\frac{AD}{c} = \left(\frac{AD}{e}\right)^2 = \left(\frac{e}{c}\right)^2$ ؛ ولكنَّنا نعلم أنَّ $\frac{AD}{c} = \frac{c^2}{BD^2}$ ، فيكون معنا $\frac{AD}{e} = \frac{e}{c} = \frac{c}{BD}$ ، فنحصل على $\frac{AD}{BD} = \left(\frac{c}{BD}\right)^3$.

ولكنَّ P_1 وَ P_2 لهما القاعدة نفسها، فيكون معنا: $\frac{AD}{BD} = \frac{v(AD)}{v(BD)}$.

والمجسّمان P_1 وَ P_2، من جهة أخرى، متشابهان، فيكون $\left(\frac{c}{BD}\right)^3 = \frac{V}{v(BD)}$؛ يكون، إذاً، $v(AD) = V$، أو أيضاً: $V = v(AD) \pm v(BD)$.

وهكذا نرى أنّ بالإمكان وصف توسيع مسألة أرشميدس الذي يقترحه القوهي "كتطبيق على الحجم" شبيه، في الفضاء الثلاثيّ الأبعاد، بتطبيق المساحات المدروس في المقالة السادسة من كتاب "الأصول" لأقليدس. وذلك أنّنا، إذا فرضنا القطعة AB معلومة، نبحث عن كيفيّة تطبيق حجم معلوم V على طول هذه القطعة، مع زيادة أو نقصان لحجم معلومٍ مشابهٍ لمتوازٍ للمستطيلات.

نقدّم هنا، بدءاً من الصفحة التالية، التحقيق الأوّل لهذا النصّ، الذي لم يُحقّق من قبلُ، استناداً إلى مخطوطة لايدن (*Leiden, Or. 168/8*)، على الأوراق ٨٠ظ-٨٤ظ. وتوجَد أيضاً ترجمة فرنسيّة لهذا النصّ أنجزها ف. ويبك (*F. Woepcke*)، ضمن "الإضافات" في كتابه *Algèbre d'Omar alkhayyāmī (Paris 1951)* وقد أعيد نشر هذا الكتاب في:

Etudes sur les mathématiques arabo-islamiques, herausgegeben von Fuat Sezgin(Frankfort am Main, 1986), vol. I, Appendice B, p. 96-102.

لنلاحظ، أخيراً، أنّ عنوان هذه الرسالة لم يرد على أيّة قائمة من قوائم مؤلّفات القوهي التي ألّفها كُتّاب السِّيَر القدامى. نحن نعلم أنّ هذه القوائم ليست كاملة في أغلب الأحيان؛ ولكنّ عدم وجود عنوان مُعيَّن لا يُعطي حُجَّة ضدّ نسبة المؤلَّف إلى الكاتب المعنيّ بالأمر. لم يُساعدنا القوهي نفسه، في هذا الأمر، إذ إنَّه لم يُشر إلى هذه الرسالة في أيّ من مؤلّفاته الأخرى. ولكنّ غياب هذه الإشارة ليس له أهمّيّة تُذكر أمام القول الذي نجده في آخر الرسالة: "هذه المقدّمة من استخراج الأستاذ أبي سهل الكوهي، رضي الله عنه، وأنا أعطيت نسختها للشيخ أبي الجود، رحمه الله". هذه الشهادة مؤكّدة وليس لدينا أيّة حجّة تدفعنا إلى الشكّ بها. أمّا مراسل القوهي الذي أعطى نسخة إلى أبي الجود، فليس لدينا ، حتّى الآن على الأقلّ، ما يسمح بالتعرّف على هويّته. نحن نعرف أنّ القوهي كان يتبادل المراسلات العلميّة مع معاصريه، مثل المراسلة المشهورة التي تبادلها مع الصابئ.

٨١ - ظ

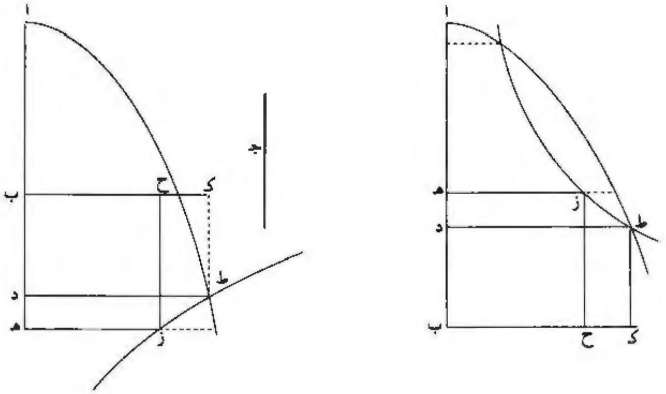
وقفت على ما ذكرته، أيها الأخ، من قول أبي عبد الله الماهاني المهندس في رسالة في شرح المقالة الثانية من كتاب أرشميدس في *الأسطوانة والكرة والمخروط*. إن الذي تهيأ له عمله من جملة تسعة أبواب هذه المقالة ثمانية أبواب. وتعذر عليه تصحيح الباب الرابع، وهو في قسمة الكرة بقسمين على نسبة مفروضة، لاعتياص مقدمة احتاج إليها؛ وحاول استنباطها بالجبر، فأداه إلى معادلة المكعب والأموال عددًا. وهذه الأصول غير متناسبة؛ وهي إضافة مجسم متوازي الأضلاع إلى خط مفروض، ينقص عنه مكعبا. وسألتَ الإبانة عن هذه المقدمة، فاحتجتُ لها إلى تقديم مقدمة أخرى تُسهل السبيل إليها، وهي هذه:

خطا ا ب جـ مفروضان، ونريد أن نقسم ا ب على د حتى تكون نسبة ا د إلى جـ كنسبة مربع جـ إلى مربع ب د. وهذا ما يُحتاج إليه للمقدمة ‹التي› اعتاصت على الماهاني.

وإنما يمكن ذلك إذا لم يكن خط جـ أصول من الخط القوي على المجسم المضاف إلى ثُلث ا ب الناقص مكعبا، ضلعه ثلثا ا ب، أعني الخط القوي على أربعة أتساع ثلث مكعب ا ب. ولكنّا أردنا أن تكون هي، وهذه أعم من ذلك؛ فنضع ا ب في موضعين: ٨١ - و
ونريد أن نفصل من أحدهما ب د ونزيد في الآخر ب د، حتى تكون نسبة ا د إلى جـ كنسبة مربع جـ إلى مربع ب د.

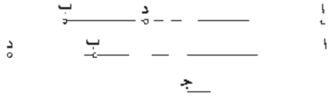
3 وقفت: وقعت – 7 عددا: ربما كانت في الأصل «معادلة المكعب والأموال والعدد» – 14 أصول من: مطموسة – إلى: اليه – 15 ثلث: مكررة في الصفحة التالية – مكعبا: مربعا

فنجعل ب هـ مثل جـ، ونتمم مربع ب هـ ز ح، ونعمل قطعًا مكافئًا، رأسه نقطة آ وقطره ا ب وضلعه القائم خط جـ؛ وليكن قطع ا ط. ونعمل قطعًا زائدًا يمر على نقطة ز ولا يلقاه خطا ب هـ ب ح؛ وليكن قطع ز ط. فالقطعان لا محالة يتقاطعان، فليتقاطعا على ط. ونرسل من نقطة ط عمودًا على ا ب، وليقع على د. وقد بيّن أبلونيوس في كتابه في *المخروطات* أن مربع العمود الواقع من القطع المكافئ على قطره مثل ضرب ما يفصله من القطر مما يلي رأس القطع في الضلع القائم؛ فسطح ا د في جـ مثل مربع ط د، فنسبة ا د إلى ط د كنسبة ط د إلى جـ.



وأيضًا، نخرج من نقطة ط خط ط ك موازيًا لـ ب د، ونخرج خط ب ح حتى يلقاه على ك. فخط هـ ز قد وقع على القطع الزائد / من الخط الذي لا يلقاه موازيًا للخط ٨١-ظ الآخر الذي لا يلقاه؛ وكذلك خطوط ز ح ك ط ط د. فعلى ما بيّنه أبلونيوس، ضرب ب هـ في هـ ز مثل ضرب ب ك في ك ط. ولكن كلاً من ب هـ هـ ز مثل جـ، وب ك مثل ط د وك ط مثل ب د؛ فضرب ط د في ب د مثل مربع جـ، فنسبة ط د إلى جـ كنسبة جـ إلى ب د. فقد تبيّن أن نسبة ا د إلى ط د كنسبة ط د إلى جـ وكنسبة جـ إلى ب د، فنسبة ا د الأول إلى جـ الثالث كنسبة مربع جـ الثالث إلى مربع ب د الرابع؛ وذلك ما أردنا بيانه. /

3 فليتقاطعا: فيلتقاطعا – 4 ط (الثانية): فوق السطر.

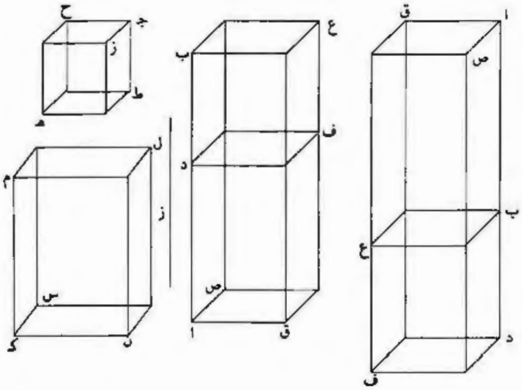


وإذ قدمنا هذه المقدمة، فليكن لنا ا ب في موضعين؛ ونريد أن نضيف إليه مجسمًا ٨٢-و متوازي السطوح مساويًا لمجسم مفروض، يزيد عليه أو ينقص عنه مكعبًا. فليكن خط جـ ضلع مكعب يساوي المجسم المفروض؛ ونفصل من ا ب في أحد الموضعين ب د، ونزيد عليه في الموضع الآخر ب د، حتى تكون نسبة ا د إلى جـ كنسبة مربع جـ إلى مربع ب د. وهو غير محدود في الزيادة، ويجب أن يكون محدودًا في النقصان. وهو ألا يكون خط جـ أطول من الخط القوي على مكعب، وهو أربعة أتساع ثُلث مكعب ا ب وهو المضاف إلى ثلث ا ب الزائد مكعبًا، ضلعه ثلثا ا ب. فضرب ا د في مربع ب د هو مجسم متوازي الأضلاع يحيط به مربعا ب د وأربعة سطوح ا د ب د؛ وضرب جـ في مربع جـ هو المكعب المساوي للمجسم المفروض. فالمجسم المضاف إلى ا ب ينقص في الوضع الأول عن ا ب مكعبًا، ضلعه ب د، ويزيد على ا ب في الوضع الآخر أيضًا بمكعب ضلعه ب د؛ وذلك ما أردنا بيانه./

وإذ قد عملنا ذلك، فإني أريد هذا الشكل كُليًا، وهو أن يكون المضاف إلى ا ب ٨٢-ظ مساويًا لمجسم متوازي السطوح مفروض، وزائدًا عليه أو ناقصًا منه مجسم شبيه بمجسم متوازي السطوح معلوم الصورة.

فليكن المجسم المعلوم الصورة مجسم جـ هـ، وزاويته هي التي تحيط بها خطوط جـ ز جـ ح جـ ط. ولنعمل مجسمًا شبيهًا به مساويًا للمجسم المفروض، كمجسم كـ ل، وزاويته المساوية لزاوية جـ من مجسم جـ هـ هي التي تحيط بها خطوط كـ م كـ ن كـ س. ولنفصل من ا ب المفروض في أحد الموضعين، ولنزيد عليه في الموضع الآخر ب د، حتى تكون نسبة ا د إلى كـ م كنسبة مربع كـ م إلى مربع ب د على الشريطة المذكورة في المقدمة، كما بيناه في الشكل الأول من هذه الرسالة. ونعمل على ب د مجسمًا شبيهًا بمجسم جـ هـ؛ وليكن مجسم د ع. ونتمم مجسم ا ف في طول ا د وفي عرض وسمك د ع. ولتكن زاويته المساوية لزاوية جـ ‹و›لزاوية د من مجسمي جـ هـ د ع هي التي تحيط بها خطوط ا د ا ص ا ق؛ فأقول: إن مجسم ا ف يساوي مجسم كـ ل.

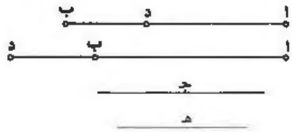
2 مكعبا: مكعب – 7 مكعبا: مربعا – 9 ب. د – 10 مكعبا: مكعب – 11 ب د: مطموسة – 22 مجسمي: مجسم.



برهان ذلك: أن نخرج بين خطي ا د كـ م خط / ز وسطًا في النسبة، فتكون نسبة ٨٣-و ا د إلى كـ م كنسبة ا د إلى خط ز مثناة؛ وقد كانت ‹نسبة ا د إلى كـ م كنسبة› مربع كـ م إلى ‹مربع› ب د، فنسبة ا د إلى ‹ز كنسبة كـ م إلى ب د، ونسبة› ا د إلى ز كنسبة ز إلى كـ م وكنسبة ‹كـ م إلى ب د، فنسبة ا د› إلى ب د كنسبة كـ م إلى ب د مثلثة. لكن نسبة ‹ا د إلى› ب د كنسبة مجسم ا ف إلى مجسم د ع، لأنهما على طول خط واحد وفي عرض وسمك واحد. ونسبة كـ م إلى ب د مثلثة كنسبة مجسم كـ ل إلى مجسم د ع، لأنهما متشابهان؛ فنسبة مجسم ا ف ومجسم كـ ل إلى مجسم د ع واحدة، فمجسم ا ف مثل مجسم كـ ل المساوي للمجسم المفروض. وقد أضيف إلى ا ب، فنقص عنه في أحد الموضعين وزاد عليه في الموضع الآخر بمجسم د ع الشبيه بمجسم جـ هـ المعلوم الصورة؛ وذلك ما أردنا عمله.

وأقرب من ذلك وأقل خطوطًا: إذا فرضنا خطي ا ب وجـ، وفصلنا من ا ب ب د في أحد الموضعين، ونزيد فيه ب د في الموضع الآخر؛ وجعلنا نسبة ا د إلى خط جـ كنسبة مربع خط جـ إلى مربع خط ب د، وعملنا على ضلع ب د مجسمًا متوازي السطوح معلوم الصورة، وعلى خط جـ مجسمًا / مشابهًا له، كان مساويًا للمجسم المعمول ٨٣-ظ على ا د في عرض وسمك وأمثال زوايا المجسم المعلوم الصورة المعمول على ب د.

1 خط: مكررة في الصفحة التالية – 3 فنسبة: ونسبة – 6 مثلثة: مثناه.



برهان ذلك: أن نخرج بين ا د وبين جـ خط هـ وسطًا في النسبة. فتكون نسبة ا د إلى جـ ‹كنسبة› ا د إلى هـ مثناة، ونسبة مربع جـ إلى مربع ب د كنسبة جـ إلى ب د مثناة، فنسبة ا د إلى هـ كنسبة جـ إلى ب د، ونسبة ا د إلى هـ كنسبة هـ إلى جـ، فخطوط ا د هـ جـ ب د الأربعة متوالية على نسبة واحدة. فنسبة ا د إلى ب د كنسبة جـ إلى ب د مثلثة بالتكرير. ونسبة ا د إلى ب د كنسبة المجسم المعمول على ا د في عرض وسمك وأمثال زوايا المجسم المعلوم الصورة المعمول على ب د إلى هذا المجسم المعمول على ب د، إذ كانا ‹في عرض وسمك واحد، ونسبة جـ إلى ب د مثلثة بالتكرير كنسبة المجسم المعمول على خط جـ إلى المجسم المعمول على ب د، إذ كانا› متشابهين؛ فالشبيه المعمول على جـ مثل المجسم المعمول على ضلع ا د في عرض وسمك وأمثال زوايا المعمول على ب د؛ وقد نقص عن ا ب في أحد الموضعين وزاد عليه في الموضع الآخر بالمجسم المعلوم الصورة الذي أحد أضلاعه ب د؛ وذلك ما أردنا. /

٨٤-و فإن نحن جعلنا خط جـ ضلع أي مجسم شئنا متوازي السطوح مساوٍ لمجسم مفروض مشابه لمجسم معلوم الصورة، كان مساويًا للمضاف المذكور إلى ا ب الناقص عنه أو الزائد عليه بمجسم شبيه بالمجسم المعلوم الصورة. ويجب ألا يكون ضلع المجسم، الذي تريد أن تضيف مثله إلى ا ب ينقص عنه مجسمًا شبيهًا بمجسم معلوم، أعظم من المضاف إلى ثُلث ا ب الذي ضلع المجسم الشبيه الناقص ‹مكعب› ثلثي ا ب. /

٨٤-ظ هذه المقدمة من استخراج الأستاذ أبي سهل الكوهي، رضي الله عنه، وأنا أعطيت نسختها للشيخ أبي الجود، رحمه الله.

7 إذ: اذا – 10 بالمجسم: فالمجسم – 11 الذي: الى – 13 المذكور: المذكوره – 14 الذي: الذي عليه، ثم ضرب على «عليه» بالقلم – 16 نجد تحت السطر «والحمد لله وحده».

ملاحظات حول النصوص

أ– "في تمام كتاب المخروطات"

١– ص. ٢٠١، س. ١٣–١٤: يتعلَّق الأمر بالقضيّة ٥٠، الخاصّة بالقطوع الثلاثة من المقالة الثانية من كتاب "المخروطات".

٢– ص. ٢٠٢، س. ١–٢: يتعلَّق الأمر بالقضيّة ٥١ (الخاصّة بالقطع المكافئ والقطع الزائد) وبالقضيّتين ٥١ وَ ٥٢ (الخاصّتين بالقطع الناقص) من المقالة الثانية من كتاب "المخروطات".

٣– ص. ٢٠٢، س. ٢–٤: يتعلَّق الأمر هنا بالمسألة الخاصّة بالقطع الناقص والقطع الزائد (بالقضيّتين ١٣ وَ ١٤ من المقالة الثانية من كتاب "المخروطات").

٤– ص. ٢٠٢، س. ٢٣–٢٥: انظر التعليق الإضافيّ [١].

٥– ص. ٢٠٣، س. ٧–٨: انظر التعليق الإضافيّ [٢].

٦– ص. ٢٠٥، س. ١٠: القطر المجانب هو المحور $\overline{\text{اد}}$. وإذا أخذنا بعين الاعتبار الأشكال المرافقة للنصّ نستنتج أنَّ ابن الهيثم يتناول المحور الأعظم في حالة القطع الناقص.

٧– ص. ٢٠٥، س. ١١: انظر الحاشية ٢ ص. ٧٥.

٨– ص. ٢٠٥، س. ١١–١٢: نستنتج هذا من القضية ٣٧ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات".

٩– ص. ٢١٢، س. ١–٢: يكون معنا $\frac{\overline{\text{جـم}}}{\text{مهـ}} < \frac{\bar{\text{ز}}^2}{\bar{\text{ح}}^2}$؛ ولكنَّ $\frac{\overline{\text{غم}}}{\text{مهـ}} = \frac{\bar{\text{ز}}^2}{\bar{\text{ح}}^2}$، فنحصل على:

$\overline{\text{غم}}$ > $\overline{\text{جـم}}$.

١٠- ص. ٢١٢، س. ٧-٨: يستخدم ابن الهيثم خاصّة الخطّ القاطع للقطع الزائد، بالنسبة إلى الخطّين المُقارَبين.

١١- ص. ٢١٥، س. ١١-١٢: انظر التعليق الإضافيّ [٤].

١٢- ص. ٢١٨، س. ١: انظر التعليق الإضافيّ [٥].

١٣- ص. ٢١٨، س. ٨: المفروض ضمنيّاً أن يتقاطع القطعان في نقطتين.

١٤- ص. ٢١٩، س. ١٣: المقصود هو أنّ نقطة م خارج القطع الزائد لأنّ س م > س ا.

١٥- ص. ٢٢٠، س. ٢: لا يُبَيِّن ابن الهيثم أنّ الدائرة المُعرَّفة بهذه الطريقة تقطع بالضرورة القطع الزائد على النقطة جـ، ولكنّ هذا يحصل بفضل المتباينة س م > س ا التي أثبِتَت في التحليل.

١٦- ص. ٢٢٢، س. ٢: تختلف النقطة ط، هنا، عن النقطة ط المُستخدَمة في التحليل.

١٧- ص. ٢٢٢، س. ٣: يقوم ابن الهيثم بمناقشة وجود النقطة كـ لاحقاً.

١٨- ص. ٢٢٣، س. ١١: الخطُّ ح ب قطرٌ، ولكنّ القطعة ح ب نصفُ قطر؛ ولذلك يُرفِق ابن الهيثم به نصف الضلع القائم الخاصّ بالقطر.

١٩- ص. ٢٢٣، س. ١٣: انظر الحاشية ٢ في الشرح الرياضيّ (الفصل الأوّل).

٢٠- ص. ٢٢٤، س. ٢: انظر الملاحظة ١٥.

٢١- ص. ٢٢٤، س. ٤: إذا كان Σ هذا المربّع، يكون معنا: $\Sigma = k.\overline{\text{ط ا}}^2$، ويكون:

$\frac{\overline{\text{ح ن}}}{\overline{\text{ط ا}}} = \frac{\overline{\text{ح ب}}^2}{\Sigma}$، فلا يكون المربّع Σ معلوماً.

٢٢- ص. ٢٢٤، س. ٦: انظر الملاحظة السابقة.

٢٣- ص. ٢٢٤، س. ٦: إذا وضعنا $Q = \Delta^2 = \frac{\overline{\text{حب}}^2}{k}$ ، يكون Q وَ Δ معلومين ويكون معنا $\frac{Q}{\overline{\text{اط}}^2} = \frac{\overline{\text{نح}}}{\overline{\text{طا}}}$، فنحصل على $\overline{\text{نح}}.\overline{\text{طا}} = Q$.

٢٤- ص. ٢٢٤، س. ٨: انظر الملاحظة السابقة.

٢٥- ص. ٢٢٤، س. ١١: نستنتج من الملاحظتين ٢١ وَ ٢٣ أنَّ $\frac{\overline{\text{نح}}}{\overline{\text{طا}}} = \frac{Q}{\overline{\text{اط}}^2} = \frac{\overline{\text{حب}}^2}{\Sigma}$، فنحصل على $\frac{\overline{\text{نح}}.\overline{\text{طا}}}{\overline{\text{طا}}^2} = \frac{\overline{\text{حب}}^2}{\Sigma}$؛ ولكنَّ $\overline{\text{طا}} = \overline{\text{حك}}$ ، فيكون بالتالي بعد التبديل $\frac{\overline{\text{نح}}.\overline{\text{حك}}}{\overline{\text{حب}}^2} = \frac{\overline{\text{اط}}^2}{\Sigma} = \frac{1}{k}$.

٢٦- ص. ٢٢٥، س. ٤-٥: انظر الحاشية ٤ في الشرح الرياضي (الفصل الأوّل).

٢٧- ص. ٢٢٦، س. ٢: يتناول ابن الهيثم خطّين $\overline{\text{لت}}$ وَ $\overline{\text{لم}}$ ويرسم شكلين.

٢٨- ص. ٢٢٦، س. ٣: القطعة $\overline{\text{حب}}$ هي نصف قطر، كما كان ذلك في السابق.

٢٩- ص. ٢٢٦، س. ٣-٤: انظر الحاشية ٢٣.

٣٠- ص. ٢٢٦، س. ١٣-١٥: القطر يساوي ضعفي $\overline{\text{حب}}$؛ ويتناول ابن الهيثم نصف الضلع القائم. وهو يُواصِل، في كلّ ما يتبع، استخدامَ نصف القطر.

٣١- ص. ٢٢٩، س. ٢١: يقصِر ابن الهيثم المناقشة على الحالة التي تقبل فيها القطعة زاوية منفرجة في القطع الناقص وزاوية حادّة في القطع الزائد.

٣٢- ص. ٢٢٩، س. ٢٣: لا يقصد ابن الهيثم، هنا، بكلمة "طرف" نقطة القطع الناقص نفسها، بل نقطة في جوار هذه النقطة على القوس المعنية بالأمر الموتَّرة بالزاوية.

٣٣- ص. ٢٣١، س. ١٣: نحصل على الطول $\overline{\text{حط}}$ بواسطة عمل هندسيّ (انظر الشرح).

٣٤- ص. ٢٣١، س. ١٤: انظر التعليق الإضافيّ [٥].

٣٥- ص. ٢٣١، س. ١٦-١٧: تـُحدَّد النقطة ن بواسطة نفس العمل الهندسيّ.

٣٦- ص. ٢٣٣، س. ٤: وردت في المخطوطة القطعة ب ل بدلاً من م ل (انظر الشرح).

٣٧- ص. ٢٣٣، س. ٧: انظر الشرح الرياضي القضيّة ٢.

٣٨- ص. ٢٣٣، س. ١٢: انظر الشرح الرياضي القضيّة ٢.

٣٩- ص. ٢٣٤، س. ١: إذا كانت ن نقطة التقاطع بين القطع المكافئ وبين ل كـ، يجب أن يُثبَت أنَّ القطع الزائد يقطع ل كـ على النقطة نفسها، وهذا ما نحصل عليه مباشرة في التحليل ولا يتطلّب أيّة مناقشة.

٤٠- ص. ٢٣٦، س. ٥: يتعلّق الأمر بالخطّ المقارَب للقطع الزائد ذي السهم ا م.

٤١- ص. ٢٣٦، س. ١٥-١٦: لقد دُرِسَت الدائرة، التي هي مجموع النقاط ب التي تـُحقِّق المعادلة $\frac{ب د}{ب هـ} = \frac{ط}{كـ}$، في "التحليل والتركيب" القضيّة الأولى. يُحدَّد مركز الدائرة، هنا، كما جرى في القضيّة الأولى. ويُعطي التشابه بين البرهانين حجَّة مهمَّة لنسبة "تمام المخروطات" إلى ابن الهيثم.

٤٢- ص. ٢٣٨، س. ١٢-١٣: أيْ إذا كان $\frac{ط}{كـ} > 1$، تكون النقاط وفقاً للترتيب: ا، هـ وَ د.

٤٣- ص. ٢٣٩، س. ٤-٥: هذا يتضمَّن أنَّ ابن الهيثم يفترض، كما فعل في الحالة التي تكون فيها النقاط خارج القطع الزائد، أنَّ $\frac{ط}{كـ} > 1$ وأنَّ النقاط هي وفق الترتيب: ا، هـ وَ د.

٤٤- ص. ٢٤٠، س. ٣-٤: تحتوي المخطوطة على خمسة أشكال.

٤٥- ص. ٢٤٠، س. ٨-٩: يفترض ابن الهيثم أنَّ ز > د هـ، وهذا هو الشرط الضروريّ لكي يكون المثلّث ب د هـ موجوداً.

٤٦- ص. ٢٤١، س. ١٣-١٤: هذا يفرض أنَّ القطعَ المعلوم قطعٌ مكافئ أو زائد (انظر الشرح الريّاضي).

٤٧- ص. ٢٤٦، س. ٣-٤: لقد قُسِمِ الشكل إلى قسمين لأجل التمييز بين الحالات الثلاث المدروسة ولتجنُّب الالتباس الذي قد ينتج بسبب استخدام الحروف نفسها لنقاط مُختلِفة.

٤٨- ص. ٢٤٩، س. ٤-٥: انظر الشرح الرياضي.

٤٩- ص. ٢٤٩، س. ٤-٥: يُسمَّى القطر Δ، المرافِق لقطر مُجانِب D، القطرَ القائم (انظر القضية ٦ من المقالة السابعة من كتاب المخروطات لأبلونيوس ترجمة ب. فير إيك *P. Ver Eecke*، ص. ٥٥٧، الحاشية ٤). ويكون معنا، وفقاً للمقالة الأولى من كتاب "التعريفات الثانية"، التعريف الثالث، $a = \Delta^2$، حيث يكون الضلع القائم الخاصّ بـِ D.

٥٠- ص. ٢٥١، س. ٨-٩: هذا يفرض أنَّ: ^{2}زهـ > اد.دط .

٥١- ص. ٢٥١، س. ١٣: زع > اد ⇔ ^{2}زهـ > اد.اط (انظر الشرح الرياضي).

٥٢- ص. ٢٥٢، س. ١: يقصد ابن الهيثم أنَّ هذا الجداء مساوٍ لمربَّع القطر المُرْفَق.

٥٣- ص. ٢٥٢، س. ٧: يجب أن يكون الخطّ زهـ محصوراً بين السهم الأصغر والسهم الأعظم ؛ وهذه هي الخاصَّة العامَّة لكلّ قطر من أقطار القطع الناقص.

٥٤- ص. ٢٥٣، س. ٦: يفترض ابن الهيثم، في هذا القسم، أنَّ اد > اط ، ويأخذ عندئذ النقطة كـ على الامتداد المستقيم للخطّ زهـ من جهة ز.

٥٥- ص. ٢٥٤، س. ٢١-٢٢: هذه الجملة غير كاملة في المخطوطة في نهاية المسألة؛ ويجب أن نُكملها لكي تُصبِح على الشكل التالي: وتحديد هذه المسألة أن يكون الخطُّ المعلوم أعظم من مجموع السهم الأطول مع ضلعه القائم وأصغر من ضرب مجموع السهم الأطول مع ضلعه القائم في جذر نسبة السهم الأطول إلى الضلع القائم (انظر الشرح الرياضيّ).

٥٦- ص. ٢٥٦، س. ٤: القضيَّتان ٣٣ وَ ٣٥ من المقالة الأولى متعاكستان؛ والقضيّة ٣٥ هي التي استُخْدِمَت هنا.

٥٧- ص. ٢٦١، س. ١: توجد النقطة $\overline{\text{ب}}$ على الخطّ $\overline{\text{كـ ح}}$. وسيُبَيَّن لاحقاً أنــَّها على القطع.

٥٨- ص. ٢٦٢، س. ٣-٤: تــُكتَب المعادلة $\frac{\overline{\text{قك}}}{\text{قل}} = \frac{\overline{\text{كح}}}{\text{قح}}$ كما يلي: $\frac{\overline{\text{قك}}}{\text{كل} - \text{كق}} = \frac{\overline{\text{كح}}}{\text{كق} - \text{كح}}$، فنحصل على $\overline{\text{كق}}^2 = \overline{\text{كح}} \cdot \overline{\text{كل}}$.

٥٩- ص. ٢٦٢، س. ١٠: يريد ابن الهيثم أن يقول أنَّ المسألة ممكنة بدون شرط مفروض على القطعة المعلومة $\overline{\text{و}}$؛ وهو يقوم بالفعل بمناقشة ليُثبِت ذلك، أي أنــَّه يقوم بدراسة وجود الحلّ.

ب- "في شكل بني موسى"

١- ص. ٢٩٥، س. ٦: يُشير ابن الهيثم إلى كلّ المثلَّثات التي تُحقِّق ثناءً الفرضيات الموضوعة.

٢- ص. ٢٩٦، س. ١٤: يريد أن يقول "كلّ نقطة غير النقطة $\overline{\text{د}}$ ".

٣- ص. ٣٠٠، س. ١: يتعلــَّق الأمر بالزاوية التي يكون رأسها على القوس $\overline{\text{هلو}}$ والتي تُوَتِّر القوس $\overline{\text{هدو}}$.

٤- ص. ٣٠١، س. ٦: لا يكون هذا صحيحاً إلا إذا كانت $\overline{\text{ط}}$ قريبة بشكل كافٍ من $\overline{\text{د}}$ بحيث تكون $\overline{\text{ع}}$ بين $\overline{\text{ن}}$ وَ $\overline{\text{س}}$.

ج – "في مقدِّمة ضلع المسبَّع"

١- ص. ٤٧١، س. ١٧: هنا تنتهي المخطوطة [ع].

د- "في عمل المسبّع في الدائرة"

١- ص. ٤٧٦، س. ١٠ : لا يستخدم ابن الهيثم عبارة "القطع الزائد ذو الخطّين المقاربين"، بل القطع الزائد الذي لا يقع عليه خطّا..." وهذه العبارة، كما نعلم، هي ترجمة حرفيّة للعبارة ασυμπωτοζ المشتقــَّة من الفعل συμπωτοζ الذي يعني "وقع" أو "تلاقى".

٢- ص. ٤٨٠، س. ١-٢ : هذا يعني : نسبة المجموع ب ل + ب ح إلى المجموع ب جـ + ب ه.

٣- ص. ٤٨٦، س. ٥-٦ : انظر الشكل ٦٧ من الفصل الثالث ص. ٤٣٠.

٤- ص. ٤٨٦، س. ١٥ : انظر الشكل ٦٨ من الفصل الثالث ص. ٤٣١.

٥- ص. ٤٨٨، س. ٨- ١١ : لقد وضعنا بين معترضتين <...> الجمل التي أضفناها، عند إثبات النصّ، إلى الفقرة السابقة لهذه الفقرة. أمّا هذه الفقرة فيجب وضعها في التركيب وليس في التحليل.

هـ- "في مسألة عددية مجسَّمة"

١- ص. ٤٩٦، س. ١١: يتعلــَّق الأمر بالقضيّة ١١ في نشرة هايبرغ.

و- "في أصول المساحة"

١- ص. ٥٤٣، س. ١٣: المقادير المقصودة هي المقادير الخطّية.

٢- ص. ٥٤٣، س. ١٣: المكيال: يتعلــَّق الأمر، على الأرجح، بأداة لقياس حجم المواد الجافــَّة.

٣- ص. ٥٤٤، س. ١-٣: يُمكن أن نستشفَّ بين السطور مسألة تصويب القطوع المخروطية الثلاثة. لنذكِّر أنَّ ابن الهيثم قد عالج هذه المسألة في نصّ مفقود.

٤- ص. ٥٤٥، س. ٩: أي المستطيل.

٥- ص. ٥٤٦، س. ١٥: يتعلـــّق الأمر إذاً بالمربَّعات.

٦- ص. ٥٤٧، س. ٣: يتعلَّق الأمر بعرض مُختصَر حيث تكون قياسات الطول والعرض أعداداً صحيحة. ولنلاحظ أنَّ المفهوم الهندسيّ الوحيد المستخدَم هو الخاصَّة الزاويَّة للخطوط المتوازية (القضية ٢٩ من المقالة الأولى لكتاب "الأصول").

٧- ص. ٥٤٨، س. ٢: القضية ٣٤ من المقالة الأولى لكتاب "الأصول".

٨- ص. ٥٤٨، س. ١٤: القضية ٣٤ والقضية ٣٧ من المقالة الأولى لكتاب "الأصول".

٩- ص. ٥٤٩، س. ٤-٥: القضية ٤٧ من المقالة الأولى لكتاب "الأصول".

١٠- ص. ٥٤٩، س. ١٣: مسقط الحجر هنا هو القطعة ب د.

١١- ص. ٥٤٩، س. ١٨-١٩: الشكل في هذه الصفحة غير موجود في المخطوطة.

١٢- ص. ٥٥٣، س. ٦: لا يقول ابن الهيثم إنَّ القطعة هــ د هي نصف قطر الدائرة المحاطة بالمثلـــَّث.

١٣- ص. ٥٥٧، س. ٩: هذا السطحُ رباعيٌّ للأضلاع مُحدَّبٌ.

١٤- ص. ٥٥٧، س. ١٥-١٦: مُغنية عن اعتبار السطح: مُغنية عن معرفة إذا كانت الزوايا قائمة في حالة رباعيّ الأضلاع المُحدَّب.

١٥- ص. ٥٥٧، س. ٢٣-٢٤: انظر الصفحة التالية.

١٦- ص. ٥٥٨، س. ١٣: المقصود هو الشكل الثاني من المقالة السادسة من كتاب "الأصول".

١٧ - ص. ٥٥٨، س. ١٥: تخصُّ العمليّات، التي يُشير إليها ابن الهيثم في كلّ هذا القسم، الأعدادَ التي تُقاس بها القِطَعُ مع اتــِّخاذ الذراع كوحدة للطول.

١٨ – ص. ٥٥٨، س. ١٦: القِطَعُ ممثــَّلة بالقياسات العددية، بعد اختيار وحدة الطول. وهذا ما يسمح بتمثيل قطعة ما بحاصلة ضرب قياسها بوحدة الطول؛ توجَد طريقة مشابهة لهذه الطريقة في سياق مُختَلِف عند عمر ابن الخيّام ضمن كتابه في الجبر؛ انظر ر. راشد و ب. وهاب زاده: رياضيّات عمر الخيّام (بيروت ٢٠٠٥).

١٩ – ص. ٥٥٩، س. ١٤: يفترض ابن الهيثم، هنا، دون أن يُصرِّح بذلك، أنَّ مساحة المربَّع ن م ل ش المحيط بالدائرة أعظم من مساحة الدائرة [أرشميدس، "الكرة والأسطوانة"، المسلــَّمة ٤].

٢٠ – ص. ٥٥٩، س. ١٥: يُرمَز إلى أوساط الأوتار ا ب، ب جـ، جـ د وَ د ا بنفس الحرف ع.

٢١ – ص. ٥٥٩، س. ٢٣: أرشميدس، "الكرة والأسطوانة"، المسلــَّمة ٤.

٢٢ – ص. ٥٦٠، س. ٧: يُذكِّر ابن الهيثم بالقضيَّة الأولى من المقالة العاشرة لكتاب "الأصول" لأقليدس؛ انظر أيضاً شرح ابن الهيثم لهذه القضيّة، ضمن ر. راشد، الريّاضيات التحليلية، المجلــَّد الثاني، ص. ٤٦١–٤٦٢ ونقد ابن السري، ص. ٤٦٣–٤٧٤

٢٣ – ص. ٥٦١، س. ١: أيْ الذي هو جزء من المحيط ا ب جـ د.

٢٤– ص. ٥٦٢، س. ١: يرمز الحرف ض إلى عدة نقاط.

٢٥– ص. ٥٦٢، س.١٠: يرمز الحرف ض إلى أوساط الأقواس ا ك، ك د، ا ز وَ ز ب.

٢٦– ص. ٥٦٣، س.٦: هذا يعني أنَّ النسبة ليست نسبة عدد صحيح إلى عدد صحيح. يقول ابن الهيثم في كتابه حول تربيع الدائرة، بعكس ذلك، إنَّ النسبة موجودة ولو أنَّ معرفتها غير مُمكنة. يبدو، هنا، أنَّه لا يُطبِّق هذه النظريّة المتعارف عليها، إذ إنَّ نسبة القطر إلى المحيط هي نسبة خطّ منحنٍ إلى خطّ مستقيم. لقد كانت هذه النظرية معروفة، دون شكّ، لدى قرّاء هذا المؤلَّف.

٢٧- ص. ٥٦٥، س.٥: يتعلّق الأمر بالقضيّة ٣٥ من المقالة الثالثة من كتاب "الأصول".

٢٨- ص. ٥٦٦، س.١١: تبقى النتيجة صحيحة سواء أكان قطاع الدائرة أصغر أو أعظم من نصف دائرة.

٢٩- ص. ٥٦٦، س.١٣: يتوافق هذا مع الحالة التي تكون فيها القطعة الدائرية المعنية بالأمر أصغر من نصف دائرة. ولا يتناول ابن الهيثم الحالة التي تكون فيها القطعة أعظم من نصف دائرة.

٣٠- ص. ٥٦٧، س.١٠: إذا كانت القوس ا ب جـ أصغر من نصف دائرة، تكون النقطة ح على الامتداد المستقيم للقطعة ا ب. إذا كانت القوس ا ب جـ أعظم من نصف دائرة، تكون النقطة ح بين ا وَ ب.

٣١- ص. ٥٦٨، س.١١: انظر أعلاه ص. ٥١٣-٥١٤.

٣٢- ص. ٥٦٨، س.١٣: نسبة عدديّة: أي نسبة منطقة.

٣٣- ص. ٥٦٩، س.١٤: إذا كان المجسّم متوازيَ المستطيلات، يكون كلُّ سطح من سطوحه عموديّاً على السطوح الأربعة التي تحيط به.

٣٤- ص. ٥٦٩، س.٢٠-٢١: انظر الملاحظة السابقة.

٣٥- ص. ٥٧٢، س.٢: يتعلّق الأمر بالقضيّة السابعة وبلازمتها من المقالة السابعة من كتاب "الأصول" لأقليدس.

٣٦- ص. ٥٧٤، س.٣: هـ د هي قاعدة المثلّث هـ ب د.

٣٧- ص. ٥٧٧، س. ١٤: لا يمكن تطبيق هذه الملاحظة إلا على مخروط (هرم) ذي قاعدة مثلّثية. وإذا كان الهرمُ ذا رأس س وكانت قاعدته رباعيّ الأضلاع ا ب جـ د، وإذا أتّخذنا س ا ب كقاعدة، لا يُمكن أن نعتبر المجسّم كمخروط (هرم).

٣٨- ص. ٥٧٨، س. ١٦: يتعلّق الأمر بالقضايا ١٠ إلى ١٥ من المقالة السابعة من كتاب "الأصول"(انظر أعمال أقليدس المترجمة حرفيّاً من قِبَل ف. بيرارد (*F. Peyrard*)، طبعة جديدة، [باريس ١٩٦٦]، التعريفات المعطاة ص. ٣٩٧)؛ وربَّماَ فكّر ابن الهيثم ضمنيّاً أنَّ الاستدلال، المستخدَم للانتقال من الأسطوانة القائمة إلى الأسطوانة المائلة، قد يُستخرَج من ذلك الذي استخدمه أقليدس في القسم الأخير من القضيّة ٣١ من المقالة ١١ للانتقال من متوازي المستطيلات (أيْ القائم) إلى متوازي السطوح (أيْ المائل).

٣٩- ص. ٥٧٨، س. ١٩: يُميِّز ابن الهيثم كما نرى بين "المخروط المستدير" الذي هو "المخروط" المعروف و"المخروط" ذي القاعدة المضلَّعة الذي هو "الهرم" المعروف.

٤٠- ص. ٥٧٨، س. ٢١-٢٢: يتعلَّق الأمر بالقضيّة العاشرة من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" لأقليدس؛ وهي الخاصّة بالمخروط القائم.

٤١- ص. ٥٧٩، س. ٧-٨: هؤلاء المهندسون هم على الأخصّ بنو موسى. انظر: "كتاب معرفة مساحة الأشكال البسيطة والكريّة"، القضيّة ١٥، ضمن "الرياضيات التحليلية" المجلَّد الأوّل من هذه الموسوعة.

٤٢- ص. ٥٨٢، س. ١١: يبقى (أي البركار) على وضعه: أي لا تتغيَّر فتحته.

٤٣- ص. ٥٨٥، س. ٨-٩: النقاط ط، ل، هـ ، ف متسامتة على الخطّ ط ص نفسه؛ وهذا الخطّ يصل بين النقطتين ط وَ ل اللتين تمثِّلان وسط قدم "الإنسان المعتبِر"، في الموضعين المشار إليهما.

٤٤- ص. ٥٨٦، س. ٧: يجب أن نطرح وحدة الطول من طرفيْ المعادلة، بعد قلب النسبتين، ثمَّ نقلب من جديد النسبتين الحاصلتين لكي نحصل على النتيجة.

٤٥- ص. ٥٩٠، س. ٧-٨: نقطتا القسمة متقابلتان قطريّاً.

ز- "كتاب عمل الدائرة المقسومة بسبعة أقسام متساوية لأرشميدس"

١- ص. ٦١٧، س. ١٠-١١: المقصود: ...مساوياً لمجموع مربَّعي ا جــ وَ د ب.

٢- ص. ٦٢٤، س. ١٢-١٣: انظر الشرح.

٣- ص. ٦٢٦، س. ٢-٣: ملاحظة: هل هناك سهو عن المراحل المتوسِّطة في النصّ؟

يكون معنا حجـ/حب = زجـ/زب (لأنَّ زجــ = جــ دوَ زب = هــ ب)، فيكون

حجــ . زب = حب . زجــ = حب . جــ د = اد . جــ د (لأنَّ حب = اد وفقاً للقضيّة ٩). ويكون معنا، من جهة أخرى: حز . ب جــ = (حب + ب جــ) (جــ ز + زب) =

حب . جــ ز + حب . ب ز + ب ز . جــ ز + ب ز 2 =

حب . جــ ز +(حب + ب ز + زجــ) . ب ز =

حب . جــ ز + حجــ . ب ز = اد . جــ د . 2 .

ولكنَّ معنا وفقاً للقضيّة ٩ : حز = اب، فيكون اب . ب جــ = اد . جــ د . 2، فنحصل على:

اد . جــ د = مساحة(اب جــ).

٤- ص. ٦٢٧، س. ٧: يتعلــَّق الأمر بشكل آخر، إذ إنَّ النقطتين ح وَ ط مختلفتان عن النقطتين المستخدَمتين سابقاً. يجب أن نأخذ هنا ح على اد وَ ط على اهــ ، مع

د ح = هــ ط = جــ د = جــ ز.

٥- ص. ٦٢٧، س. ١٨: نحصل على النتيجة كما يلي:

اد .(محيط) = (اجـ + جـب + ب ا).(اجـ − جـب + ب ا) = اجـ^2 − (جـب + ب ا)^2؛ ولكنّ

اجـ^2 = ب جـ^2 + ا ب^2، فنحصل على: اد .(محيط) = اب.جـب. 2 = (مساحة ا ب جـ).4.

٦- ٦٣٠، س. ١٢: هذا يفرض أننا نعرف كيف نعمل القسمة (ا، جـ، د، ب) من النوع الأوّل، بواسطة القطوع المخروطيّة، وهذا ما لم يدرسه المؤلِّف.

ح- "كتاب عمل المسبَّع في الدائرة لأبي الجود..."

١- ص. ٦٣٦، س. ١٦: القضيّة ٥٢، وفقاً لنشرة هايبرغ.

٢- ص. ٦٣٦، س. ١٨: القضيّة ٥٤، وفقاً لنشرة هايبرغ.

٣- ص. ٦٣٧، س. ١٢: القضيّة ١٢، وفقاً لنشرة هايبرغ.

٤- ص. ٦٣٨، س. ١: القضيّة ١١، وفقاً لنشرة هايبرغ.

٥- ص. ٦٣٨، س. ١: القضيّة ٢٠، وفقاً لنشرة هايبرغ.

٦- ص. ٦٣٨، س. ٨-٩: يكون معنا: $\frac{\text{دم}}{\text{سم}} = \frac{\text{جـم}}{\text{بم}}$، فنحصل على $\left(\frac{\text{دم}}{\text{سم}}\right)^2 = \frac{\text{دم . جـم}}{\text{سم . بم}}$.

٧- ص. ٦٣٨، س. ١٩: $\frac{\text{اس}}{\text{اب}} = \frac{\text{هـس}}{\text{اهـ}} \Rightarrow \frac{\text{اس}}{\text{هـس}} = \frac{\text{اب}}{\text{اهـ}} \Rightarrow \frac{\text{اس}}{\text{اس} - \text{هـس}} = \frac{\text{اب}}{\text{اهـ} - \text{اب}} \Rightarrow \frac{\text{اس}}{\text{اهـ}} = \frac{\text{اب}}{\text{بهـ}}$.

٨- ص. ٦٣٩، س. ١٧: مبدأه: أي رأسه.

٩- ص. ٦٣٩، س. ١٨: القضيّة ٥٢، وفقاً لنشرة هايبرغ.

١٠- ص. ٦٣٩، س. ١٩: مبدأه: أي رأسه.

١١- ص. ٦٣٩، س. ٢٠-٢١: القضيّة ٥٤، وفقاً لنشرة هايبرغ.

١٢- ص. ٦٤٠، س. ٩-١٠: القضيّة ١٢، وفقاً لنشرة هايبرغ.

١٣- ص. ٦٤١، س. ٢-٣: القضيّة ١١، وفقاً لنشرة هايبرغ.

ط - "رسالة أبي الجود إلى محمّد عبد الله بن علي الحاسب..."

١- ص. ٦٤٥، س. ٤-٥: المثلَّثان جـق ا وَ ن ح ص متشابهان ووتراهما جـق وَ ن ص متساويان، فيكون معنا ص ح = ا جـ وَ ن ح = ق ا ولكنَّ ن ح // ق ا، فيكون جـ ص // ا ح.

٢- ص. ٦٥٠، س. ٢٠-٢١: لا يُشير المؤلِّف هنا إلى كيفية عمل هذه القسمة (انظر عمل هذه القسمة في نص أبي الجود الأوّل).

ي - "كتاب السجزي في عمل المسبَّع في الدائرة وقسمة الزاوية المستقيمة الخطَّين بثلاثة أقسام متساوية

١- ص. ٦٦٤، س. ١٧: قال: القائل هو أبو الجود؛ انظر المناقشة حول معنى الفعل "قلد" في الشرح.

٢- ص. ٦٦٤، س. ٢٠: قال: القائل هو دائماً أبو الجود، وفقاً لشهادة السجزي.

٣- ص. ٦٦٦، س. الشكل الأوّل في هذه الصفحة: يرسم السجزي (أو النسّاخ؟)، في المخطوطة [ب]، الخطّ د ط - الذي هو هنا ن م - بدون أن يستخدمه بعد ذلك؛ أما في المخطوطة [ت]، فنجد د هـ بدلاً د ط.

ك – "استخراج ويجن بن رستم المعروف بأبي سهل القوهي في عمل المسبَّع في دائرة معلومة؛ "رسالة أبي سهل ويجن بن رستم القوهي في استخراج ضلع المسبَّع"

١– ص. ٦٨٦، س. ١١: يتعلّق الأمر بالقضيّة ٢١ في نشرة هايبرغ والشكل ٢١ وفقاً لكتاب بني موسى.

ل – "رسالة في عمل المُسَبَّع المتساوي الأضلاع في الدائرة لأبي سهل القوهي "

١– ص. ٧٠٠، س. ٤: – المقصود هو مجموع الخطَّين ب د وَ د جـ.

٢– ص. ٧٠٢، س. ١٣–١٤: إنَّ التساوي بين الزاويتين هـ ب د وَ د هـ جـ نتيجة للفرضيّة جـ م . جـ ب = $\left(\text{د ا}\right)^2$ = $\left(\text{هـ جـ}\right)^2$، التي تعطي التشابه بين المثلّثين هـ ب د وَ د هـ جـ.

م – "رسالة الصاغاني إلى عضد الدولة في عمل المُسَبَّع المتساوي الأضلاع"

١– ص. ٧١١، س. ١٢: يتعلّق الأمر بالقضيّة ١١ من المقالة الثانية.

٢– ص. ٧١١، س. ١٥: يتعلّق الأمر بالقضيّة ٨ من المقالة الثانية.

٣– ص. ٧١١، س. ١٨: يتعلّق الأمر بالقضيّة ٣٠ من المقالة الأولى.

٤– ص. ٧١٢، س. ٥: لا يُشير المؤلِّف إلى أنَّ الحصول على المساواة كـ ظ = ش جـ يتمُّ باستخدام القضيّة ٨ من المقالة الثانية.

٥– ص. ٧١٢، س. ٨: يتعلّق الأمر بالقضيّة ٣٠ من المقالة الأولى.

٦– ص. ٧١٢، س. ١٠: يتعلّق الأمر بالقضيّة ١١ من المقالة الثانية.

٧– ص. ٧١٣، س. ٨: ب د > د ح : لقد بيّنّا أنَّ ا جـ > ز ح ؛ ولكنَّ ب د = ا جـ وَ ز ح > د ح، فيكون ب د > د ح.

٨- ص. ٧١٣، س. ١٢-١٣: القسمتان (ب، ص، د، ح) وَ (ا، هـ، ز، ح) متشابهتان لأنَّ ا ح //هـ ص // ز د.

ن - "كتاب كشف تمويه أبي الجود في أمر ما قدّمه من المقدِّمتين لعمل المُسَبَّع"

١- ص. ٧١٩، س. ١٥-١٦ : الجملة غامضة؛ انظر المناقشة حول معنى الفعل "قلّد" ص. ٣٢٧.

٢- ص. ٧٢٠، س. ١٥-١٦ : أيْ أنَّ القسمتين (د، ز، ح، ه) وَ (ا، ط، ب، هـ) متشابهتان؛ وذلك لأنَّ ا د //ط ز // ب ح (انظر الصاغاني ص. ٧١٣).

٣- ص. ٧٢٥، س. ١٧: يتعلّق الأمر بقسمة من النوع الثاني.

٤- ص. ٧٢٧، س. ٣-٤: انظر كتاب "في تركيب المسائل التي حلّلها أبو سهل العلاء بن سهل" ضمن كتاب رشدي راشد *Géométrie et dioptrique*، "الهندسة وانكسار الضوء في القرن العاشر، ابن سهل والقوهي وابن الهيثم"، باريس ١٩٩٣، الملحق الأوّل ص. ١٨٧.

٥- ص. ٧٢٧، س. ٩: لا يُبيِّن الشَّنّي أنَّ النقاط هـ، ط وَ د متسامتة؛

(انظر، *Géométrie et dioptrique*،"الهندسة وانكسار الضوء في القرن العاشر"، الشرح، الملحق الأوّل، ص.CII)

٦- ص. ٧٢٨، س. ١١-١٢: يتعلّق الأمر بأبي الجود.

س - "رسالة نصر بن عبد الله في استخراج وتر المُسَبَّع"

١- ص. ٧٣٧، س. ٥ : يكون معنا جـا = ب ا ، وفقاً للفرضيّات.

٢- ص. ٧٣٩، س. ١٦ :"زاوية الخطّين اللذين لا يقعان عليه": الزاوية المقصودة هي الزاوية المشكَّلة من أحد الخطّين المقاربين، ومن الامتداد المستقيم للخطّ المقارَب الآخر.

٣- ص. ٧٤٠، س. ٣ : يكون معنا د هـ . ا هـ = (ا ب)^2، ولكن لم نـبيِّن أنَّ هـ جـ = ا ب.

ع – "في البرهان على إيجاد المقدِّمة التي أهملها أرشميدس في كتابه في تسبيع الدائرة وكيفية ذلك"

١- ص. ٧٤٩، س. ١٤-١٥: هذا قول نسبه السجزي إلى أبي الجود.

٢- ص. ٧٥٠، س. ١٤-١٥: يتعلَّق الأمر بالمساواة بين المثلَّثين ا هـ ط وَ جـ ز د.

٣- ص. ٧٥٠، س. ١٥: تفصل النقطة كـ القطع كـ م إلى قسمين ويرمز كـ م إلى القسم الذي يقترب من الخطّ المقارَب كـ ل.

٤- ص. ٧٥٠، س. ١٧: "فهو أصغر": المقصود هو الخطّ ن كـ.

٥- ص. ٧٥٠، س. ٢٠: أبلونيوس، القضيّة ١٣ من المقالة الثانية من "المخروطات".

ف – "ممّا استخرجه سنان بن الفتح في المساحات المناظرية"

١- ص. ٧٦٢، س. ٤: الخطّان ب ا وَ د هـ عموديّان على ب هـ.

ص – فقرة من رسالة أبي صقر عبد العزيز بن عثمان القبيصي

١- ص. ٧٦٣، س. ١: انظر مخطوطة إستانبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الأوراق ٨٥ظ-٨٨و. قدَّم عادل أنبوبا نشرة نقديّة لهذا المؤلّـف ضمن:

« Un mémoire d'al-Qabīṣī(4ème siècle de l'Hégire) sur certaines sommations numériques », Journal for the History of Arabic Science, Vol 6, n° 1 et 2, p. 181-208,

ص. ١٨٨-١٨٩.

ق- في قسمة الخطّ الذي استعمله أرشميدس

١- ص. ٧٦٩، س. ٦: يريد ابن الهيثم أن يقول أنَّ هــ جــ // ا ح.

ر- في مقدِّمة أرشميدس لقسمة الخطّ (القوهي)

١- ص. ٧٨٢، س. ٦: الكلام هو على أرشميدس.

٢- ص. ٧٨٢، س. ٧: وحاول الماهاني استنباطها بالجبر.

٣- ص. ٧٨٢، س. ٧: معادلة المكعَّب والأموال عدداً: $x^3+a.x^2=c^3$؛ ولكنَّ المعادلة المعنيّة بالأمر ليست مطابقة لهذه المعادلة، كما سنرى لاحقاً. لقد ظنَّ ف. ويبك *(F.Woepke)* أنَّ الأمر يتعلَّق هنا بخطأ في الكتابة. إنَّه من المحتمل أيضاً أن يكون الخطأ قد حصلً خلال النسخ وأن تكون الجملة الأصليّة: "معادلة المكعّب والأموال والعدد". ويجب لحسم هذا الأمر أن نجد نصّاً لهذا المؤلَّف من مجموعة أخرى غير المجموعة الوحيدة التي لدينا. يتعلَّق الأمر، في الواقع، بالمعادلة $x^3+c^3=a.x^2$ على أن لا تكون حدودها متناسبة. وذلك أنــّنا ننتقل منها، بواسطة التآلف $x \leftarrow a-x$، إلى المعادلة $x^3+a^2.x=c^3+2a.x^2$.

٤- ص. ٧٨٢، س. ٩-١٠: لا يتناول القوهي، هنا، مقدِّمة أرشميدس بالعبارات نفسها التي استخدمها هذا الأخير(انظر الشرح أعلاه ص. ٧٧٥).

٥- ص. ٧٨٣، س. ٤-٦: القصيّة ١١ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات".

٦- ص. ٧٨٣، س. ١٠: القصيّة ١٢ من المقالة الثانية من كتاب "المخروطات".

٧- ص. ٧٨٦، س. ١٠: يتعلَّق الأمر بالمجسَّم المعمول على الضلع ا د.

ملحق للمجلّد الثاني[1]

الحسن بن الهيثم ومحمَّد بن الهيثم : الرياضيّ والفيلسوف

لقد أبْلَغْنا، في المجلّد السابق من هذه الموسوعة، تحت هذا العنوان نفسه، عن الخلط الذي حصل بشكل أكيد منذ عهد كاتب السِّيَر ابن أبي أصيبعة، أو قبل هذا العهد، بين شخصين عاشا في العصر نفسه: أبو علي الحسن بن الحسن بن الهيثم ومحمَّد بن الهيثم. ونحن نضيف اليوم إلى العديد من الحجَج، غير القابلة للدحْض، التي أوردناها في المجلَّد الثاني، ثلاث شهادات حصلنا عليها منذ ذلك الحين. لم يفطن أحد إلى هذه الشهادات التي تدعم برهاننا للالتباس الذي حصل بين هذين الشخصين.

١- يُقدِّم لنا الفيلسوف المشهور فخر الدين الرازي إحدى الدلائل الأكثر إقناعاً. فهو يُشير إلى اسم أبي علي الحسن بن الحسن بن الهيثم، كما يُشير أيضاً إلى محمَّد ابن الهيثم. وهو لا يتكلّم على الأوّل إلا عندما يتعلّق الأمر بالرياضيّات، في حين إنَّه لا يُشير إلى الثاني إلا في سياق فقهيّ فلسفيّ. ولا يخلط فخر الدين الرازي، في أيّ وقت من الأوقات، كما يبدو، بين الشخصين أو بين ميدانـــَي نشاطهما.

يُشير الرازي، ضمن أعماله الخاصّة، إلى عدّة مؤلَّفات ينسبها، بوضوح، إلى أبي علي الحسن بن الهيثم. هذه المؤلّفات هي "في المناظر"، "في حلّ شكوك كتاب أقليدس في الأصول"، "في المكان"، مؤلّف في القضيّة الأولى من المقالة العاشرة من كتاب الأصول، و"في تصحيح الأعمال النجوميّة". وتتوافق هذه العناوين، بالفعل، مع أعمال للحسن بن الهيثم محفوظة لدينا. فالرازي يُشير، في كتابه "المُلخـّـص"، إلى مؤلّف "في حلّ الشكوك"[2]

---

[1] يُتمِّم هذا الملحقُ البحثَ الوارد في المجلّد الثاني من هذه الموسوعة، ص. ٣٦-٥٥، ممّا يحسم الأمور بشكل نهائيّ في موضوع الالتباس بين الريّاضيّ والفيلسوف.

[2] انظر ص. ١٧٥ ضمن: «Die Erkenntnislehre des ʻAḍudaddīn al-Īcī, Übersetzung und Kommentar des ersten

Buches seiner Mawāqif von Josef van Ess, Akademie der Wissenschaften und der Literatur. Veröffentlichungen Band XXII (Wiesbaden, 19660 », der Orientalischen Kommission.

وإلى مؤلّف "في المكان"[٣]. ولقد كتب في مؤلّفه "المطالب العالية" سنة ٦٠٥ للهجرة (١٢٠٨/ ١٢٠٩ للميلاد)[٤]:

" إنّ لأبي عليّ بن الهيثم رسالة في بيان أنّ كلّ مقدار يفصل منه جزء من أجزائه، ويفصل من الباقي جزء نسبته إلى الجزء الأوّل مثل نسبة الجزء الأوّل إلى الكلّ، ويفعل ذلك دائماً، فإنّ جميع تلك الأجزاء المأخوذة على تلك النسبة إلى غير النهاية، إذا جمعت فليس تبلغ جملتها إلى الجزء الذي كان أعظم من الجزء الأوّل".

وهذا يعني أنّه إذا أخذنا مقداراً، A، وكان αA جزءاً من هذا المقدار، مع $0< \alpha < 1$، وإذا أخذنا متتالية من النسب المتساوية α_i ، مع $0< \alpha_i < 1$، و $\alpha = \alpha_i$، لكل $i=1$، 2، ...، ، يكون معنا: $\lim_{n \longrightarrow \infty} (1-\alpha)^n = 0$. وهذا هو بالضبط ما برهنه أبو علي بن الهيثم في مؤلّفه "في قسمة المقدارين المختلفين"[٥] وهذا أيضاً ما تناوله ثانية، نوعاً ما، ضمن مؤلّفه "في شرح مصادرات أقليدس"[٦].

وهكذا لا يكون هناك أدنى شكٍّ حول المصدر الذي استقى منه الرازي أو حول هويّة مؤلّفه.

ويذكر الرازي، بعد ذلك في الكتاب نفسه، الرياضيّ ابن الهيثم بالعبارات التالية:

"إنّ أبا علي بن الهيثم بيّن في كتاب حلّ شكوك أقليدس".[٧]

ويكتب الرازي، في المقالة الثامنة من الكتاب نفسه (ص. ١٥٥):

إنّ الشيخ أبا علي بن الهيثم صنّف رسالة في أنواع الخلل الواقع في آلات الرصد، وعدَّ منها قريباً من ثلاثين وجهاً من الوجوه التي لا يمكن الاحتراز عنها".

---

[٣] يُذكِّر الرازي، مستخدماً نفس عبارات ابن الهيثم، بنقد هذا الأخير للمفهوم التقليديّ للمكان المُعَرَّف بأنّه السطح المحيط بالجسم. انظر "الملخّص"، مخطوطة مجلس شورى، رقم ٨٢٧، الأوراق ٩٢-٩٣. انظر أيضاً المجلّد الرابع من هذه الموسوعة، حيث حقّقنا نصّ الرازي.
[٤] انظر: فخر الدين الرازي، "المطالب العالية"، نشر أحمد حجازي السقا (بيروت ١٩٨٧)، المجلّد السادس، ص. ٨١-٨٢.
[٥] انظر: المجلّد الثاني من هذه الموسوعة.
[٦] انظر المرجع السابق.
[٧] انظر: فخر الدين الرازي، "المطالب العالية"، ص. ١٦٥.

تدلُّ هذه الاستشهادات الموجودة ضمن مؤلّفَـي الرازي، "الملخَّص" والمطالب العالية"، بأنَّه كان مطّلِعاً على بعض أعمال الريّاضيّ الذي يُسَميّه بدون التباس: أبا عليّ بن الهيثم.

لنأخذ الآن كتاب الرازي " التفسير الكبير" للقرآن. يذكر الرازي، في هذه الموسوعة، أبا عليّ بن الهيثم ومحمَّد بن الهيثم، في آن واحد. يناقش الرازي، في المجلّد الثالث عشر من هذا المؤلّف، مسألة الضوء عند الفجر، فيكتب[8]:

"فإن قالوا: لم لا يجوز أن يقال: الشمس حين كونها تحت الأرض توجب إضاءة ذلك الهواء المقابل له (الضمير يعود إلى قرص الشمس)، ثمّ ذلك الهواء المقابل (مقابل) للهواء الواقف فوق الأرض، فيصير[ه]ضوء الهواء الواقف تحت الأرض سبباً لضوء الهواء الواقف فوق الأرض، ثمّ لا يزال يسري ذلك الضوء من هواء إلى هواء آخر ملاصق له حتـّى يصل إلى الهواء المحيط بنا؛ هذا هو الوجه الذي عول عليه أبو علي بن الهيثم في تقدير هذا المعنى في كتابه الذي سمّاه بالمناظر[الكثه؟]"

يبدأ الرازي، بعد أن يُلخِّصَ هذه النظرية، بنقده، مُظهراً بذلك اطّلاعه على كتاب "في المناظر" لابن الهيثم. ولكنّه يعرض في المجلّد الرابع عشر النظريّة الفلسفيّة الفقهيّة القائلة بأنَّ الله لا يُمكن أن يكون في مكان ولا في اتجاه. ويُقدِّم عدداً من الحُجَج، ومنها حجّة الفرق غير المنتهي بين الله والعالم[9]:

"فإن قيل: أليس أنّه تعالى متقدّم على العالم من الأزل إلى الأبد، فتقدّمه على العالم محصور بين حاصرين ومحدود بين حدّين وطرفين، أحدهما: الأزل، والثاني: أوّل وجود العالم، ولم يلزم من كون هذا التقدّم محصوراً بين حاصرين أن يكون لهذا التقدّم أوّل وبداية. فكذا ههنا. وهذا هو الذي عول عليه محمّد بن الهيثم في دفع هذا الإشكال عن هذا القسم".

وإذا تفحَّصنا قائمة كتابات محمَّد بن الهيثم، نجد فيها عدة كُتُب مرشَّحة لتكون المصدر الذي أخذ عنه الرازي. يُمكن على الأخصّ أن نذكر مؤلّفه: "مقالة في العالَم من جهة مبدئه وطبيعته وكماله".

إنَّ الاختلاف في السياق بين هذه الاستشهادات واضح دون إشكال، وخاصَّة أنَّ الرازي، كما رأينا أعلاه، كان قارئاً حذراً لكتابات أبي على بن الهيثم. فهو، باختصار، لا يُخطئ أبداً في تحديد العنوان أو المؤلّف، سواء أتعلّق الأمر بالرياضيّات والمناظر من

---

[8] انظر: انظر: فخر الدين الرازي، "التفسير الكبير"، النشرة الثالثة (بيروت، دون تاريخ)، المجلد الثالث عشر، ص. ٩٥-٩٦.
[9] انظر المرجع السابق، المجلد الرابع عشر، ص. ١١٠-١١١.

جهة، أو بالفلسفة والفقه[10] من جهة أخرى. وهو يُشير بوضوح إلى أبي علي بن الهيثم، أي إلى الحسن، في الحالة الأولى، وإلى محمّد بن الهيثم، في الحالة الثانية. وهكذا نرى بشكل بديهيّ لا يقبل النقاش أنّ الرازي كان يُميِّز جيِّداً بين هذين الشخصين.

٢- لنـُشِر أيضاً، بطريقة مشابهة لما سبق، إلى شهادة عبد اللطيف البغدادي(المتوَفــّى سنة ٦٢٩هـ/١٢٣١-١٢٣٢م). لم يستشهد هذا الأخير بالحسن بن الهيثم فحسب، بل ألّف أيضاً شرحاً نقديّاً لمؤلّفه "في المكان". كان البغدادي طبيباً وفيلسوفاً، ولكنّه، عند الكلام عن الحسن بن الهيثم، يصف هذا الأخير بأنّه عالم في المناظر وفي الفلك، ولم يصفه قطٌّ بأنّه طبيب أو فيلسوف. فهو يكتب بالفعل:

"غرضي في هذه المقالة أن أبحث عن ماهية المكان بحسب رأي ابن الهيثم. وهذا الرجل فاضل في العلوم الرياضية، واسع الدسيعة في أنواعها، طويل الباع في علم الهيئة وعلم المناظر، وهو من أهل مصر معاصر ابن رضوان الطبيب."[11]

يلوم البغدادي، خلال شرحه النقديّ لمؤلّف ابن الهيثم "في المكان"، هذا الأخير على قلّة معرفته بالمنطق ("قلّة رياضته في صناعة المنطق" و"إهماله لصناعة المنطق")، وبطريقة غير مباشرة على قلّة معرفته بكتابات أرسطو. تكمن أهمّيّة هذا الانتقاد في أنّ البغدادي، كما يبدو، كان جيِّد الاطلاع على كتابات ابن الهيثم. وهو يذكر، في هذا المؤلّف نفسه، كتاب ابن الهيثم "في حركة الالتفاف".

وإذا اختصرنا سيرة البغدادي، نقول إنّه كان فيلسوفاً وطبيباً مشهوراً، وكان تلميذاً لابن النائلي. وكان في الموصل بصحبة كمال الدين بن يونس، وفي دمشق والقدس وفي عكّا (٥٨٧هـ/١١٩٠م) وفي مصر (حيث التقى بابن ميمون). وكان مطّلعاً على كتابات الفلاسفة والأطبّاء والرياضيّين، مثل السموأل (وفقاً لأقوال ابن أبي أصيبعة)؛ وهو لا يرى في ابن الهيثم سوى الرياضيّ الجاهل بالمنطق، إي الجاهل بالفلسفة. ولكنّنا نعلم وفقاً لأقوال ابن أبي أصيبعة، أنَّ محمَّد بن الهيثم قد لخــَّص تفسير فرفوريوس (لمنطقيات

---

[10] لقد قدَّم ابن أبي أصيبعة معلومة تسمح لنا باستشفاف اهتماماته والوسط الذي عاش فيه. فهو ينسب إليه جوابين قدَّمهما إلى ابن فسانجس خلال مجادلة انتقد فيها هذا الأخير آراء المنجّمين. أمّا شخص ابن فسانجس فهو الذي يُقدِّم لنا بعض المعلومات. فهو، كما يروي لنا النجاشي(٣٧٢/٩٨٢. ٩٨٣-٤٥٠/١٠٥٨. ١٠٥٩)، من رجال الأدب، كتب في التاريخ وفي الفلسفة أيضاً، كما ترك لنا كتاباً ينتقد فيه المنجِّمين. ونحن لا نعلم بوجود أيّ مؤلّف له في الريّاضيّات أو في الفلك والمناظر.

[11] انظر: عبد اللطيف البغدادي، "مقالة في المكان"، (Bursa Çelebi 323) مخطوطة بورصة، شلبي ٣٢٣، الأوراق ٢٣-٥٢، مُحقّقة ضمن المجلّد الرابع من هذه الموسوعة.

أرسطو)، وكتاب المنطقيّات لأرسطو، وكتاب الروح، وكتاب السماع الطبيعي وكتاب السماء والعالم لهذا الأخير. ونحن نعلم أيضاً أنّه كان طبيباً، وأنّه لخـــَّص ثلاثين كتاباً من كتب جالينوس[١٢].

وهكذا كان البغدادي، على علم بكتابات علماء عصره بما فيها، على الأخصّ، كتابات الحسن ابن الهيثم؛ فكيف يُمكن، ضمن هذه الشروط، إذا كان الحسن ومحمَّد شخصاً واحداً، أن لا يشير البغدادي إلى الأعمال الطبّيّة لهذا المؤلّف الوحيد المزعوم، أو إلى صفته كطبيب؟

٣- لقد نسب البغدادي إلى محمَّد بن الهيثم، بشكل واضح، المؤلّفين التالييْن، ضمن ملحق كتابه الفهرسيّ: "كشف الظنون":

- "في إثبات النّبُوَّات"[١٣]؛ ولقد ذكر ابن أبي أصيبعة عنوان هذا الكتاب ضمن قائمة أعمال محمَّد بن الهيثم.

- "تفضيل أهواز على بغداد من جهة الأمور الطبيعيّة"[١٤]؛ ولقد ذكر ابن أبي أصيبعة عنوان هذا الكتاب، أيضاً، ضمن قائمة أعمال محمَّد بن الهيثم.

وهكذا يكون من المحتمل، أنَّ هذين الكتابين، كانا متداولين تحت اسم محمَّد ابن الهيثم عندما كتب البغدادي مُلحقه المذكور أعلاه.

تظهر لي هذه الدلائل، بالإضافة إلى البراهين المعروضة في المجلّد السابق، مُقنعة إلى حدٍّ كافٍ. فهي تــُبيِّن لنا أنَّ محمّد ابن الهيثم كان لا يزال معروفاً تاريخيّاً، خلال قرن على الأقلّ بعد وفاته، وأنَّ الخطأ الذي ارتكبه أحد المفهرسين لم يكن منتشراً بين كلّ الفلاسفة والعلماء في زمانه.

[١٢] انظر: ابن أبي أصيبعة، "عيون الأنباء في طبقات الأطبّاء"، نشرة ن. رضا(بيروت ١٩٦٥).
[١٣] انظر: حجّي خليفة، "كشف الظنون"(إسطنبول، ١٩٤٣)، ص. ٢٣.
[١٤] انظر: ابن أبي أصيبعة، "عيون الأنباء في طبقات الأطبّاء"، ص. ٣١١.

المراجـــع

١–مخطوطات النصوص العربية

مؤلف مجهول

تركيب لتحليل مقدّمة المسبّع المتساوي الأضلاع في الدائرة. القاهرة، دار الكتب، رياضة ٤١، الأوراق ١٠٠ظ–١٠١ظ.

[أرشميدس]

كتاب عمل الدائرة المقسومة بسبعة أقسام متساوية لأرشميدس، ترجمة ثابت بن قرّة الحرّاني. القاهرة، دار الكتب، رياضة ٤١، الأوراق ١٠٥و–١١٠و.

أبو الجود

كتاب عمل المسبّع في الدائرة لأبي الجود محمّد بن الليث، أرسله إلى أبي الحسن بن محمّد بن إسحاق الغادي. القاهرة، دار الكتب، رياضة ٤١، الأوراق ١١٧ظ–١٢٠و.

رسالة أبي الجود محمّد بن الليث إلى الأستاذ الفاضل أبي محمّد عبد الله بن علي الحاسب في الدلالة على طريقيْ الأستاذ أبي سهل القوهي المهندس وشيخه أبي حميد الصاغاني وطريقه الذي سلكه في عمل المسبّع المتساوي الأضلاع في الدائرة. باريس، المكتبة الوطنية، ٤٨٢١، الأوراق ٣٧ظ–٤٦و.

رسالة محمّد بن الليث إلى أبي محمّد عبد الله بن علي الحاسب في طريقيْ أبي سهل القوهي وشيخه أبي حميد الصاغاني في أعمال المسبّع المتساوي الأضلاع في الدائرة.

اكسفورد، مكتبة بودليان، Thurston 3، الأوراق ١٣٣و–١٣٤و

اكسفورد، مكتبة بودليان، Marsh 720، الأوراق ٢٦١و–٢٦٤و.

ابن عبد الله، نصر

رسالة نصر بن عبد الله في استخراج وتر المسبّع

اكسفورد، مكتبة بودليان، Thurston 3، الأوراق ١٣١و–ظ

اكسفورد، مكتبة بودليان، Marsh 720، الأوراق ٢٦٦و–٢٦٧و.

ابن الفتح، سنان

في المساحات المناظريّة. القاهرة: دار الكتب، رياضة ٢٦٠، ٩٤ظ–١٠٥ظ.

ابن الهيثم، الحسن

في عمل المسبّع في الدائرة

إسطنبول، السليمانية، عاطف ١٩/١٧١٤، الأوراق ٢٠٠ظ–٢١٠و [رمز A].

إسطنبول، المتحف العسكري، ٣٠٢٥، غير مرقمة [رمز M].

في استخراج أعمدة الجبال

اكسفورد، مكتبة بودليان، Seld. A. 32، الأوراق ١٨٧و–١٨٨و.

في معرفة ارتفاع الأشكال القائمة وأعمدة الجبال وارتفاع الغيوم

ليدن، مكتبة الجامعة، Or. 14/8، الأوراق ٢٣٦–٢٣٧ [رمز L].

نيويورك، مكتبة جامعة كولومبيا، Smith Or. 45/12، الأوراق ٢٤٣ظ–٢٤٤و [رمز K].

طهران، مجلس شورى، ٢/٢٧٧٣، الأوراق ١٩–٢٠ [رمز I].

طهران، ملـــّي ملك، ٣٤٣٣، الأوراق ١ظ–٢و [رمز A].

في مسألة عددية مجسّمة

لندن، المكتب الهندي، ١٢٧٠ (= Loth 734)، الأوراق ١١٨ظ–١١٩و.

في مقدّمة ضلع المسبّع

عليكرة، مكتبة الجامعة، عبد الحي ٦٧٨، الورقة ٢٧و–ظ [رمز O].

لندن، المكتب الهندي، ١٢٧٠ (= Loth 734)، الأوراق ١٢٢و–١٢٣ظ [رمز A].

اكسفورد، مكتبة بودليان، Thurston 3، الورقة ١٣١و–ظ (نسخة مختصرة).

في قسمة الخطّ الذي استعمله أرشميدس

إسطنبول، بشير آغا، ٤٤٠، الورقة ٢٧٥ظ [رمز B].

إسطنبول، Haci Selimaga، ٧٤٣، الأوراق ١٣٥و–١٣٦ظ [رمز S].

إسطنبول، السليمانية، عاطف ١٧/١٧١٢، الورقة ١٤٧و–ظ [رمز O].

إسطنبول، جار اللـــه ١٥٠٢، الأوراق ٢٢٢ظ–٢٢٣و [رمز C].

إسطنبول، توبكابي سراي، أحمد الثالث ١٦/٣٤٥٣، الورقة ١٧٩ظ [رمز D].

إسطنبول، توبكابي سراي، أحمد الثالث ١٨/٣٤٥٦، الأوراق ٨١ظ–٨٢و [رمز E].

ليدن، مكتبة الجامعة، Or. 14/16، الأوراق ٤٩٨–٤٩٩ [رمز L].

لندن، المكتب الهندي، ١٨/١٢٧٠، الورقة ١١٩ظ [رمز A].

في شكل بني موسى

عليكرة، مكتبة الجامعة، رقم ا، الأوراق ٢٨–٣٨ [رمز A].

إسطنبول، المتحف العسكري، ٣٠٢٥، غير مرقمة [رمز S].

إسطنبول، السليمانية، عاطف ١٧١٤، الأوراق ١٤٩و–١٥٧و [رمز T].

لندن، المتحف البريطاني، Add. 14332/2، الأوراق ٤٢–٦١ [رمز B].

لندن، المكتب الهندي، ١٢٧٠ (= Loth 734)، الأوراق ٢٨و–٢٨ظ [رمز L].

في تمام كتاب المخروطات

Manisa Genel ١٧٠٦، الأوراق ١ظ–٢٥و.

في أصول المساحة

سان بطرسبيرغ، مكتبة معهد الاستشراق، ب ٢١٣٩، الأوراق ١٠٠و–١٣٩ظ [رمز L].

لندن، المكتب الهندي، ١٢٧٠، الأوراق ٢٨ظ–٣٢ظ [رمز I].

إسطنبول، السليمانية، فاتح ٣٤٥٩، الأوراق ١٠٣ظ–١٠٤ظ [رمز F].

سان بطرسبيرغ، المكتبة الوطنية ١٤٣، الأوراق ١٣ظ–١٥ظ [رمز D].

ابن يونس، كمال الدين

رسالة المولى كمال الدين بن يونس إلى محمّد بن الحسين في البرهان على إيجاد المقدِّمة التي أهملها أرشميدس في كتابه تسبيع الدائرة وكيفية ذلك

الكويت، دار الآثار الإسلامية، LNS 67، الأوراق ١٣٨ظ–١٤٠و [رمز K].

إسطنبول، توبكابي سراي، أحمد الثالث، رقم ٣٣٤٢، ورقة غير مرقمة [رمز I].

رسالة لمولانا كمال الدين أبي موسى بن يونس في البرهان على إيجاد المقدِّمة التي أهملها أرشميدس في كتابه تسبيع الدائرة وكيفية ذلك

Manisa Genel، ١٧٠٦/٨، الأوراق ١٨٤ظ–١٨٥ظ [رمز C].

اكسفورد، مكتبة بودليان، Thurston 3، الأوراق ١٢٨ظ–١٢٩و [رمز O].

اكسفورد، مكتبة بودليان، Marsh 720، الأوراق ٢٥٧و–٢٥٨ظ.

القبيصي، أبو الصقر

في أنواع من الأعداد والطرائف من الأعمال

إسطنبول، السليمانية، آيا صوفيا، ٤٨٣٢، الأوراق ٨٥ظ–٨٨و.

القوهي، أبي سهل

استخراج ويجن بن رستم المعروف بأبي سهل القوهي في أعمال المُسَبَّع المتساوي الأضلاع في الدائرة

إسطنبول، السليمانية، آيا صوفيا، ٢٧/٤٨٣٢، الأوراق ١٤٥ظ–١٤٧ظ [رمز A].

القاهرة، دار الكتب، رياضة ٤٠، الأوراق ٢٢٢ظ–٢٢٥و [رمز Q].

دمشق، الظاهرية ٥٦٤٨، الورقة ٢١٥ظ–٢١٩ظ

طهران، دنيشكا ١٧٥١، الأوراق ٦٥ظ–٦٧و [رمز D].

رسالة لأبي سهل القوهي في استخراج ضلع المسبع المتساوي الأضلاع في الدائرة

اكسفورد، مكتبة بودليان، Thurston 3، الورقة ١٣٠و–ظ.

رسالة في أعمال ضلع المسبع المتساوي الأضلاع في الدائرة لأبي سهل القوهي

باريس، المكتبة الوطنية، ٤٨٢١، الأوراق ١ظ–١٨و [رمز B].

لندن، المكتب الهندي، Loth 767، الأوراق ١٨٢ظ–١٨٩و [رمز I].

Lemme à la division de la droite

Leiden, Universiteitsbibliotheek, Or. 168/8, fol. 80v-84v.

الصاغاني، أبو حامد

رسالة أحمد بن محمد بن الحسين الصاغاني إلى الملك الجليل عضد الدولة بن أبي علي ركن الدولة

باريس، المكتبة الوطنية ٤٨٢١، الأوراق ٢٣ظ–٢٩و.

الشَّنِّي، أبو عبد الله

كتاب تمويه أبي الجود فيما قدمه من المقدمتين لأعمال المسبّع

القاهرة، دار الكتب، رياضة ٤١، الأوراق ١٢٩ظ–١٣٤ظ [رمز Q].

كامبريدج، مكتبة الجامعة، T-S Ar. 41.64 (fragment) [رمز C].
لبنان، سان جوزيف ٢٢٣، الأوراق ١٦–١٩ (fragment)، [رمز L].

السجزي، عبد الجليل
كتاب أحمد بن محمد بن عبد الجليل السجزي في أعمال المسبع في الدائرة وقسمة الزاوية المستقيمة الخطّين بثلاثة أقسام متساوية
القاهرة، دار الكتب، رياضة ٤١، الأوراق ١١٣ظ–١١٥ظ
إسطنبول، Reshit 1191، الأوراق ٨٠ظ–٨٣و.
باريس، المكتبة الوطنية ٤٨٢١، الأوراق ١٠ظ–١٦ظ.
مقالة لأحمد بن عبد الجليل السجزي في أعمال المسبع في الدائرة وقسمة الزاوية المستقيمة الخطّين
اكسفورد، مكتبة بودليان، Thurston 3، الورقة ١٢٩و–ظ.
اكسفورد، مكتبة بودليان، Marsh 720، الأوراق ٢٦٧ظ–٢٦٨و.

٢– مخطوطات أخرى

أبلونيوس
كتاب المخروطات
إسطنبول، آيا صوفيا ٢٧٦٢ (أعاد إصدار صورة المخطوط م. ناظم تيرزاوغلو، منشورات معهد الأبحاث الرياضية، ٤ [اسطنبول، ١٩٨١]).

البغدادي، عبد اللطيف
مقالة في المكان
بورصا، شلبي ٣٢٣، الأوراق ٢٣–٥٢.

بنو موسى
مقدمة كتاب المخروطات
إسطنبول، السليمانية، آيا صوفيا ٤٨٣٢، الأوراق ٢٢٣ظ–٢٢٦ظ.

ابن أبي الشكر المغربي
شرح كتاب أبلونيوس في المخروطات
طهران، سبهسالار ٥٥٦.

الأصفهاني
تلخيص المخروطات
إسطنبول، آيا صوفيا، ٢٧٢٤.

الرازي، فخر الدين
الملخص
طهران، مجلس شورى، رقم ٨٢٧.

الشيرازي، أبو الحسين عبد الملك بن محمد
كتاب تصفح المخروطات
إسطنبول، السليمانية، جار الله ١٥٠٧.
إسطنبول، توبكابي سراي، أحمد الثالث، ٣٤٦٣.
إسطنبول، Yeni Cami، ٨٠٣.

السجزي، عبد الجليل
جواب أحمد بن محمد بن عبد الجليل عن مسائل هندسية سأل عنها أهل خراسان
دبلن، مكتبة Chester Beatty، ٣٦٥٢.
إسطنبول، Reshit ١١٩١.

ثابت بن قرة
في مساحة الأشكال المسطحة والمجسمة
إسطنبول، آيا صوفيا، ٤٨٣٢، الأوراق ٤١ظ–٤٤ظ.

الطوسي، نصير الدين
تحرير كتاب المخروطات
دبلن، مكتبة Chester Beatty، ٣٠٧٦.
لندن، المكتب الهندي، ٩٢٤.

٣– كتب ومقالات

M. Abdulkabirov, *Matematika i astronomiya v trudakh Ibn Sina, yego sovrenrennikov i posledovatelei* (Tachkent, FAN, 1981).

A. Anbouba
“*Tasbī’ al-Dā’ira* (La construction de l'heptagone régulier),” *Journal for the History of Arabic Science,* vol. 1, no. 2 (1977), pp. 352-384; résumé en français de cette étude, sous le titre “La construction de l'heptagone régulier,” Ibid., vol. 2, no. 2, pp. 264-269.
“Un mémoire d'al-Qabīṣī (4ème siècle H.) sur certaines sommations numériques.” *Journal for the History of Arabic Science:* vol. 6, nos. 1-2 (1982), pp. 181-208.

Apollonius
Les Coniques d'Apollonius de Perge, Œuvres traduites pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke, Nouveau tirage (Paris, 1959).
Apollonius Pergaeus, éd. J.L. Heiberg, 2 vol. (Leipzig, 1891-1893; repr. Stuttgart, 1974).
Voir aussi Th. L. Heath

Archimède, Commentaires d'Eutocius et fragments, Texte établi et traduit par Charles Mugler, Collection des Universités de France (Paris, 1972).

O. Becker
Grundlagen der Mathematik, 2ème éd. (Munich, 1964).
Das mathematische Denken der Antike (Göttingen, 1966).

Al-Bīrunī
al-Qanūn al-Mas'ūdī, Osmānia Oriental Publications Bureau (Hyderabad, 1954).
Kitāb maqālīd 'ilm al-hay'a: La Trigonométrie sphérique chez les Arabes de l'Est à *la fin du* x[ème] *siècle,* édition et traduction par M.-Th. Debarnot (Damas, Institut franqais de Damas, 1985).

M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages,* vol. V: *Quasi-Archimedean Geometry in the Thirteenth Century* (Philadelphia, 1984).

M. Decorps-Foulquier, *Recherches sur les* Coniques *d'Apollonios de Pergè* (Paris, Klincksieck, 2000).

E. J. Dijksterhuis, *Archimedes,* trans. by C. Dickshoorn with a new bibliographic essay by Wilbur Knorr (Princeton, 1987).

Euclide
L'Optique et la Catoptrique, Œuvres traduites pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke, Nouveau Tirage (Paris, Librairie Albert Blanchard, 1959).
Les Œuvres d'Euclide, traduites littéralement par F. Peyrard (Paris, 1819); Nouveau tiragé, augmenté d'une importante Introduction par M. Jean Itard (Paris, Librairie A. Blanchard, 1966).

الفارابي، أبو نصر محمد
إحصاء العلوم. تحقيق عثمان أمين. ط ٣. القاهرة، ١٩٣١.
Kitāb al-Mūsīqa al-kabīr, Edited and expounded by Ghattas Abd-el-Malek Khashaba, revised and introduced by Dr. Mahrnoud Ahmed El Hefny (Le Caire: The Arab Writer-Publishers and Printers, s.d.).

Th. Heath
The Works of Archimedes (Cambridge, 1897; Dover Reprint, 1953).
A Manual of Greek Mathematics (New York, Dover Publications, 1963).
Apollonius of Perga: Treatise on Conic Sections (Cambridge, 1896; repr. 1961).
A History of Greek Mathematics, 2 vols. (Oxford, 1921; reprod. Oxford, 1965).

Héron, *Metrica,* éd. E. M. Bruins, *Codex Constantinopolitanus Palatii Veteris n. 1 ,* Part two [Greek Text] (Leiden, 1964).

J. P. Hogendijk
"Greek and Arabic Constructions of Regular Heptagon," *Archive for History of Exact Sciences:* no. 30 (1984), pp. 197-330.

Ibn al-Haytham's Completion of the Conics, Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences; 7 (New York; Berlin; Heidelberg; Tokyo: Springer-Verlag, 1985.

ابن أبي أصيبعة، موفق الدين أبو العباس
عيون الأنباء في طبقات الأطباء. شرح وتحقيق نزار رضا (بيروت، دار مكتبة الحياة ١٩٦٥).

Ibn al-Haytham, *Majmū' al-rasā'il,* Osmānia Oriental Publications Bureau (Hyderabad, 1938-1939).
Ibn 'Irāq, *Rasā'il Abī Naṣr Manṣūr ibn 'Irāq ilā al-Bīrūnī,* Osmānia Oriental Publications Bureau (Hyderabad, 1948).
Khalīfa, Ḥajjī, *Kashf al-ẓunūn,* éd. Yatkaya (Istanbul, 1943).

Ch. Mugler, *Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs,* Etudes et commentaires, XXVIII (Paris, Librairie C. Klincksieck, 1958).
Al-Nadīm, *Kitāb al-fihrist,* éd. R. Tajaddud (Téhéran, 1971).

النجاشي، أبو العباس
رجال النجاشي. قم: مؤسسة النشر الإسلامي، ٣٧٢-٤٥٠هـ.

Pappus d'Alexandrie
Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit F. Hultsch, 3 vols. (Berlin, 1876-1878).
La Collection mathématique, Œuvres traduites pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke, 2 vols. (Paris; Bruges, 1933; Nouveau tirage Paris, 1982).
Pappus of Alexandria, Book 7 of the Collection. Part 1. *Introduction, Text, and Translation;* Part 2. *Commentary, Index, and Figures,* Edited with Translation and Commentary by Alexander Jones, Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences; 8 (New York; Berlin; Heidelberg; Tokyo: Springer-Verlag, 1986).

Al-Qifṭī, *Ta'rīkh al-ḥukamā,* éd. J. Lippert (Leipzig, 1903).

R. Rashed
"La Construction de l'heptagone régulier par Ibn al-Haytham," *Journal for the History of Arabic Science,* vol. 3, no. 2 (1979), pp. 309-387.
"Mathématiquese t philosophie chez Avicenne," dans *Etudes sur Avicenne,* dirigées par J. Jolivet et R. Rashed, Collection "Sciences et philosophie arabes – Etudes et reprises" (Paris, Les Belles Lettres, 1984), pp. 29-39; repr. dans *Optique et Mathématiques: Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe,* Variorum reprints (Aldershot, 1992), XV.
Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī, Œuvres mathématiques, 2 vols. (Paris, Les Belles Lettres, 1986).
"Al-Sijzī et Maïnonide: Commentaire mathématique et philosophique de la proposition II-14 des *Coniques* d'Apollonius" *Archives Internationales d'Histoire des Sciences,* vol. 37, no. 119 (1987), pp. 263-296; repr. dans *Optique et Mathématiques: Recherches sur l'histoire de la pensie scientifique en arabe,* Variorum reprints (Aldershot, 1992), XIII.
"La Philosophie mathématique d'Ibn al-Haytham I: L'Analyse et la synthèse", *Mélanges de l'Institut Dominicain d'Etudes Orientales du Caire (MIDEO),* vol. 20 (1991), pp. 31-231.
Optique et Mathématiques: Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe, Variorum reprints (Aldershot, 1992).
"La Philosophie mathématique d'Ibn al-Haytham II: Les Connus," *MIDEO,* vol. 21 (1993), pp. 87-275.
Les Mathématiques infinitésimales du IXème au XIème siècle. Vol. I: *Fondateurs et commentateurs: Banū Mūsā, Thābit ibn Qurra, Ibn Sinān, al-Khāzin, al-Qūhī, Ibn al-Samḥ, Ibn Hūd* (Londres, al-Furqān, 1996); Vol. 11: *Ibn al-Haytham* (Londres, al-Furqān, 1993).
Géométrie et dioptrique au Xème siècle. Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham (Paris, Les Belles Lettres, 1993).
Les Œuvres scientifiques et philosophiques d'al-Kindi. Vol. I: *L'Optique et la Catoptrique d'al-Kindī* (Leiden, E.J. Brill, 1996).
"L'histoire des sciences entre épistémologie et histoire," *Historia scientiarum,* vol. 7, no. 1, 1997, pp. 1-10.
"L'Algèbre," dans: R. Rashed (éd.), *Histoire des sciences arabes,* 3 vols. (Paris: Le Seuil, 1997), vol. 11, pp. 31-54.

Les Catoptriciens grecs I: *Les Miroirs ardents,* Textes établis, traduits et commentés, Collection des Universités de France, publiée sous le patronage de 1'Association Guillaume Budé (Paris: Les Belles Lettres, 2000).
R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān: Logique et géométrie au* X$^{\text{ème}}$ *siècle* (Leiden, E.J. Brill, 2000).
R. Rashed et B. Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien* (Paris, Blanchard, 1999).

الرازي، فخر الدين
المطالب العالية. تحقيق أحمد حجازي السقا. بيروت: دار الكتاب العربي، ١٩٨٧
التفسير الكبير. ط ٣. بيروت: دار إحياء التراث العربي، [د. ت.]. ج ١٣.

Kh. Samir, "Une Correspondance islamo-chrétienne entre Ibn al-Munağğim, Hunayn ibn Isḥāq et Qusṭā ibn Lūqā," Introduction, édition, divisions, notes et index par Khalil Samir; introduction, traduction et notes par Paul Nwyia dans F. Graffin, *Patrologia Orientalis,* t. 40, fasc. 4, no. 185 (Turnhout, 1981).

Y. Samplonius, "Die Konstruktion des regelmässigen Sibeneckes nach Abū Sahl al-Qūhī Waiğan ibn Rustam," *Janus,* 50 (1963), pp. 227-249.

C. Schoy
"Graeco-Arabische Studien nach mathematischen Handschriften der Viekoniglichen Bibliothek zu Kairo," *Isis*, vol. 8 (1926), pp. 21-40.

Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen Abū'l Raiḫān Muḫmmad Ibn Aḫmad al-Bīrūnī (Hanovre, 1927).

J. Sesiano, "Mémoire d'Ibn al-Haytham sur un problème arithmétique soliden," *Centaurus,* 20.3 (1976), pp. 189-195.

F. Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifttums.* Band V: *Mathematik* (Leiden, E.J. Brill, 1974).

N. Terzioğlu, *Das Achte Buch zu den* Conica *des Apollonius von Perge Rekonstruiert von Ibn al-Haysam,* Herausgegeben und eingeleitet von N. Terzioğlu (Istanbul, 1974).

G. Vajda, *Index général des manuscrits arabes musulmans de la Bibliothèque nationale de Paris,* Publications de 1'Institut de recherche et d'histoire des textes (Paris, éd. du CNRS, 1953).

J. Van Ess, *Die Erkenntnislehre des 'Adudaddīn a Icī,* Ubersetzung und Kommentar des ersten Buches seiner Mawāqif, Akademie der Wissenschaften und der Literatur Veröffentlichungen der Orientalischen Kommission, Band XXII (Wiesbaden, Franz Steiner Verlag GMBH, 1966).

E. Wiedernann, *Aufsätze zur arabischen Wissenchafts-Geschichte* (Hildesheim; New York, 1970), vol. I.

J. J. Witkam, *Jacobius Golius (1596-1667) en zijn handschriften,* Oosters Genootschap in Nederland; 10 (Leiden, E.J. Brill, 1980).
F. Woepcke, *L'Algèbre d'Omar Alkhayyāmī,* publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits (Paris, Benjamin Duprat, 1851); repr. dans *Etudes sur les mathématiques arabo-islamiques,* herausgegeben von Fuat Sezgin (Frankfurt am Main, 1986).

هذا الكتاب

لقد صدر للأستاذ رشدي راشد، باللغة الفرنسية، خمسة مجلدات، غاية في الضخامة، وتحت عنوان واحد: **الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة** (بين القرنين التاسع والحادي عشر الميلادي).

وقد كرَّس المؤلِّف هذا **المجلد الثالث** لدراسة أعمال ابن الهيثم الهندسية، موضحاً موضعها ضمن الأعمال الهندسية التي ظهرت بين القرن التاسع والقرن الحادي عشر للميلاد؛ ففيه نجد دراسات للمخطوطات الخاصة بنظرية المخروطات وعمل المسبَّع المتساوي الأضلاع في الدائرة وقسمة الخطّ وفقاً لمقدمة أرشميدس، مع تفاصيل مهمة عن المجادلات التي حصلت بين رياضييّ ذلك العصر، كما نجد فيه دراسة للمخطوطات الخاصة بالهندسة العملية مثل علم المساحة وقياس أحجام المجسّمات.

كما يضم هذا المجلد العديد من نصوص المخطوطات التي جرى تحقيقها لأوّل مرّة؛ وهذا ما يعطي فكرة متكاملة عن البحوث الهندسية، من خلال وصفٍ حيٍّ لها، كما يوضح إسهامات ابن الهيثم نفسه.

وتبقى **الترجمة العربية** لهذه المجلدات الخمسة، محافظةً، حتى درجة عالية من المسؤولية والحِرَفية، على ما جاء في النص الأصلي (باللغة الفرنسية). وهو جهد جليل للمؤلِّف والمترجمين وفريق العمل العلمي والتقني.

وهو إنجاز تراثي كبير يقدِّمه **مركز دراسات الوحدة العربية**، بالتعاون مع **مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية**، إلى القارئ العربي.

مركز دراسات الوحدة العربية

بناية «بيت النهضة»، شارع البصرة، ص. ب: ٦٠٠١ ـ ١١٣
الحمراء ـ بيروت ٢٤٠٧ ٢٠٣٤ ـ لبنان

تلفون: ٧٥٠٠٨٤ ـ ٧٥٠٠٨٥ ـ ٧٥٠٠٨٦ ـ ٧٥٠٠٨٧ (٩٦١١+)

برقياً: «مرعربي» ـ بيروت

فاكس: ٧٥٠٠٨٨ (٩٦١١+)

e-mail: info@caus.org.lb

Web site: http://www.caus.org.lb

الثمن للمجموعة الكاملة

للأفراد: ١٠٠ دولار أو ما يعادلها

للمؤسسات: ١٥٠ دولاراً أو ما يعادلها

ISBN 978-9953-82-375-1